

修士論文

不連続因子を用いた中性子輸送計算手法に
関する研究

名古屋大学大学院

工学研究科博士前期課程

総合エネルギー工学専攻

山本章夫研究室

大島吉貴

令和4年2月

緒言： 炉心解析で利用される中性子輸送計算では不連続因子を用いることで、計算コストを抑えながら高精度な解を得ることができる。不連続因子は中性子束の不連続性を定量的に扱うパラメータであり、適切な値を設定することで空間均質体系の計算において非均質体系の領域境界中性子流(漏洩率)を保存できる。これにより空間均質化などに起因する離散化誤差を低減し、均質体系計算で非均質体系の解を再現できる。炉心解析の高度化には不連続因子の更なる活用や不連続因子を用いた中性子輸送計算手法の改良が必要となる。本研究では不連続因子の適用可能性拡大を目的として、①不連続因子を応用した非線形収束加速法の収束性解析[1,2,3,5]、②不連続因子を適用した確率論的中性子輸送計算手法(DF-MC 法)の開発[4,6,7]、に取り組んだ。本発表では DF-MC 法にのみ言及する。

DF-MC 法： 従来、不連続因子は決定論的中性子輸送計算手法に対して適用され、確率論的手法(モンテカルロ法, MC) への適用方法は確立されていなかった。そこで本検討では、領域毎 even-parity 不連続因子(EPDF)を適用したモンテカルロ計算

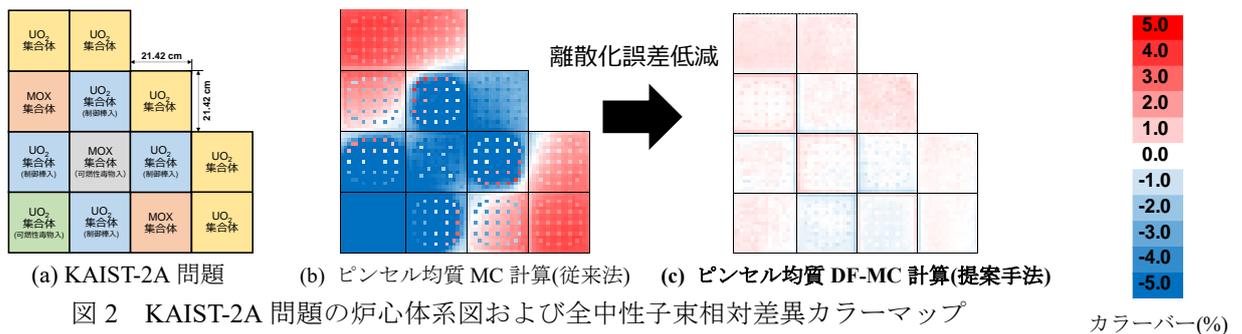
$$\begin{array}{c}
 f_L \quad \quad \quad f_R \\
 \left. \begin{array}{l} \psi_{L,out}(\vec{\Omega}) \\ \psi_{L,in}(-\vec{\Omega}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \left. \begin{array}{l} \psi_{R,in}(\vec{\Omega}) \\ \psi_{R,out}(-\vec{\Omega}) \end{array} \right\} \\
 \text{左側領域L} \quad \text{右側領域R}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \psi_{R,in}(\vec{\Omega}) = \frac{2f_L}{f_R + f_L} \psi_{L,out}(\vec{\Omega}) + \frac{f_L - f_R}{f_R + f_L} \psi_{R,out}(-\vec{\Omega}) \\
 \psi_{L,in}(-\vec{\Omega}) = \frac{2f_R}{f_R + f_L} \psi_{R,out}(-\vec{\Omega}) + \frac{f_R - f_L}{f_R + f_L} \psi_{L,out}(\vec{\Omega})
 \end{array}$$

f : EPDF, ψ : 角度中性子束, $\vec{\Omega}$: 中性子飛行方向
 $L \rightarrow R$ の透過係数 $R \rightarrow R$ の反射係数
 $R \rightarrow L$ の透過係数 $L \rightarrow L$ の反射係数

図1 二領域問題における EPDF と角度中性子束の関係

手法(DF-MC 法)を新たに開発した。EPDF とは決定論的手法で提案された不連続因子の一種である。DF-MC 法では光学のアナロジーに基づき、EPDF と角度中性子束の関係式(図 1)によって定義される透過・反射係数を用いて空間領域境界で中性子を透過・反射させ、中性子束の空間的不連続性を扱う。これにより体系を粗く離散化した空間均質化体系でも、非均質体系の解を高精度に再現する計算ができる。

検証計算： KAIST-2A 問題において、燃料ピンセル均質炉心体系で検証計算を行う。本検討では従来 MC 計算と DF-MC 計算(提案手法)で得られる全中性子束空間分布の参照解との相対差異を比較する。参照解には非均質体系計算の結果を利用する。EPDF は事前に行う単一集合体計算から燃料集合体毎に計算する。両計算ケースの全中性子束相対差異カラーマップ(図 2)より、DF-MC 計算では従来 MC 計算に比べ体系全体で相対差異が大幅に低減された。本結果より DF-MC 法の妥当性および炉心体系への適用性が示された。本検討により、不連続因子を適用した確率論的中性子輸送計算手法を新たに開発し、不連続因子の適用可能性を拡大した。



公刊論文および口頭発表

[1]. Y. Oshima et al., *Nucl. Sci. Eng.*, **194**(6), pp. 477–491 (2020); <https://doi.org/10.1080/00295639.2020.1722512>.
 [2]. Y. Oshima et al., *Nucl. Sci. Eng.* (2021); <https://doi.org/10.1080/00295639.2021.1982549>.
 [3]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫, 日本原子力学会 2021 年春の年会, 2B15, 3 月 17 日–19 日 (2021).
 [4]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫 他, 日本原子力学会 2021 年秋の大会, 2I02, 9 月 8 日–10 日 (2021).
 [5]. Y. Oshima, A. Yamamoto, and T. Endo, *Proc. M&C 2021*, Online, October 3–7 (2021).
 [6]. Y. Oshima, T. Endo, A. Yamamoto et al., *Trans. Am. Nucl. Soc.*, Online, November 30–December 3 (2021).
 [7]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫 他, 日本原子力学会 2022 年春の年会, 2D11, 3 月 16 日–18 日 (2022).

目次

第 1 章	序論.....	1
1.1	背景.....	1
1.2	本研究の目的.....	5
1.3	本論文の構成.....	6
1.4	参考文献.....	7
第 2 章	中性子輸送計算における非線形収束加速法.....	8
2.1	本章の概要.....	8
2.2	中性子輸送計算手法.....	9
2.3	非線形収束加速法の概要.....	12
2.4	Coarse mesh finite difference (CMFD) 加速法.....	15
2.4.1	計算理論.....	15
2.4.2	計算手順.....	21
2.4.3	CMFD 加速法の収束性.....	22
2.5	CMFD 加速法における収束性向上手法.....	25
2.5.1	収束性向上手法の分類.....	25
2.5.2	Partial current-based CMFD (pCMFD) 加速法.....	27
2.5.3	Linear prolongation CMFD (lpCMFD) 加速法.....	28
2.5.4	収束性向上を目的として提案された拡散係数.....	29
2.6	非線形収束加速法の収束性評価方法.....	35
2.6.1	解析的な収束性評価手法 (線形化フーリエ解析).....	35
2.6.2	数値的な収束性評価手法 (反復計算に基づく方法).....	37
2.7	本章のまとめ.....	39
2.8	参考文献.....	40
第 3 章	中性子輸送計算における離散化誤差低減手法.....	43
3.1	本章の概要.....	43
3.2	不連続因子.....	44
3.3	Superhomogenization (SPH) 法.....	47
3.4	領域毎 even-parity 不連続因子 (EPDF).....	53
3.5	本章のまとめ.....	60
3.6	参考文献.....	61
第 4 章	非線形収束加速法の空間離散化および角度離散化と収束性の関係に関する検討.....	62
4.1	本章の概要.....	62
4.2	本章の目的.....	62
4.3	提案する非線形収束加速法.....	64

4.3.1	各手法の概要	64
4.3.2	Flat Source Analytic CMFD 加速法 (FS ACMFD)	65
4.3.3	Linear Source Analytic CMFD 加速法 (LS ACMFD)	73
4.3.4	Flat Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC 加速法(FS ADMOC)	78
4.3.5	Linear Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC 加速法(LS ADMOC)	80
4.4	1 群 1 次元均質平板体系における収束性評価	81
4.4.1	線形化フーリエ解析による収束性評価	81
4.4.2	数値計算による収束性評価	86
4.5	本章のまとめ	97
4.6	参考文献	98
第 5 章	領域毎 even-parity 不連続因子を扱う多群モンテカルロ法 (DF-MC)	101
5.1	本章の概要	101
5.2	角度中性子束と領域毎 even-parity 不連続因子の関係	103
5.3	DF-MC 法	105
5.3.1	本手法の概要	105
5.3.2	中性子の透過および反射	105
5.3.3	負のウエイトの扱う中性子ランダムウォーク	109
5.3.4	Weight cancellation	110
5.3.5	計算手順	114
5.4	固定源計算による検証計算	118
5.5	固有値計算による検証計算	124
5.5.1	二次元単一集合体体系	124
5.5.2	二次元炉心体系 (KAIST-2A ベンチマーク問題)	135
5.6	本章のまとめ	146
5.7	参考文献	148
第 6 章	結論	150
6.1	まとめ	150
6.2	今後の課題	152
Appendix A	線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出	154
A.1	本章の概要	154
A.2	CMFD 加速法	154
A.3	p-CMFD 加速法	167
A.4	GCMR 加速法	176
A.5	FS ACMFD 加速法	181
A.6	本章のまとめ	185
A.7	参考文献	186

Appendix B	中性子束傾きを更新する LS ACMFD 加速法.....	187
B.1	本章の概要.....	187
B.2	計算方法.....	188
B.3	1 群 1 次元平板体系における数値計算による収束性評価.....	198
B.4	本章のまとめ.....	202
	公刊論文.....	203

第1章 序論

1.1 背景

原子炉の安全性および経済性を評価するには、シミュレーションによって炉心特性を精度よく予測することが必要である。炉心特性の解析（炉心解析）では、中性子の挙動を記述した中性子輸送方程式を数値的に解くことで炉心特性である実効増倍率や中性子束分布を適切に評価する。このとき中性子輸送方程式を数値的に解くことを中性子輸送計算と呼ぶ。中性子輸送計算には様々な手法が提案されているが、大別して決定論的手法と確率論的手法がある。以下に決定論的手法および確率論的手法の概要を示す。

● 決定論的中性子輸送計算手法

決定論的中性子輸送計算手法では、中性子輸送方程式の変数である空間、中性子飛行方向、エネルギーを離散化し、適切な近似を適用することで数値解析を行う。決定論的手法は反復法に基づいており、中性子束分布の更新と核分裂源（実効増倍率）の更新を相互に繰り返すことで収束解を求める。決定論的手法の中でも、離散化手法や適用する仮定によって細分化され、特に中性子飛行方向の取り扱い方によって区別される。飛行方向を離散的に扱う方法としては method of characteristics (MOC, characteristics 法) [1][2]や Sn 法（離散座標法）[3][4]などがある。また角度中性子束を直交基底関数で展開する方法として、Pn 法[5]や SP3 法[6][7]、拡散法[8]などがある。決定論的手法は、計算機性能の乏しい場合でも、少ない計算コストで比較的高精度な解を求めることができる。

● 確率論的中性子輸送計算手法

確率論的中性子輸送計算手法では、乱数を用いて中性子の挙動を模擬及び追跡することで炉心特性を求める。本手法はモンテカルロ法とも呼ばれる[9]。中性子ランダムウォークの扱い方によってアナログおよび非アナログモンテカルロ法と区別される。またエネルギーの取り扱いによっても、連続エネルギーモンテカルロ法と多群モンテカルロ法に分けられる。確率論的手法は、乱数を用いるため統計的不確かさが生じるが、決定論的手法のように変数の離散化や仮定がなくとも計算が可能であり、離散化および近似誤差をほとんど排除した高精度な数値解を求めることができる。従って、参照解を求める手法としてよく利用される。

決定論的手法と確率論的手法はいずれも利点と欠点があり、計算体系や使用可能な計算機資源と要求される計算精度のバランスを考慮して使い分けられる。しかしいずれの手法でも、実機軽水炉のような大型で非均質性の強い炉心体系に対して、短時間で正確な解を直接的に求めることは困難である。計算コストを低減するためには、変数を粗く離散化するもしくは追跡する中性子数を低減すればよいが、その場合は離散化誤差が大きく計算精度が劣化する。対して計算精度を優先すると詳細な離散化や十分な数の中性子追跡が必要であ

り、現実的な計算コストで解析を完了できない。すなわち中性子輸送計算手法の発展は、計算機性能および計算コストと切っても切れない関係にある[10]。

そこで、中性子輸送計算分野では高い計算精度を保ちながら計算コストを低減するための工夫として、不連続因子が利用されている。不連続因子とは、決定論的中性子輸送計算に適用される離散化誤差低減手法の一種である。不連続因子の利用により、ある物理量の不連続性を定量的に扱うことで、別の物理量の連続性を保存することができる。この性質を応用することで、不連続因子の様々な利用方法が提案されている。以下に本研究で注目する2つの不連続因子利用手法について述べる。

● 離散化誤差低減による炉心解析の高精度化

不連続因子により離散化誤差を低減した多段階の中性子輸送計算により、大型非均質炉心体系の核特性値を高精度に求めることができる。実機軽水炉のような大型非均質炉心体系の高精度な核特性値を、短時間かつ直接的に求めることは計算コスト上困難である。対して単一の燃料集合体体系や集合体単位で空間均質化された炉心体系であれば、空間領域数が低減するため高速かつ高精度な解を求めることができる。そこで、集合体均質化炉心体系計算で核特性値を求めることを考える。

このとき、集合体均質化領域毎の均質化断面積が入力となるが、均質化断面積を求めるためには燃料集合体内の全中性子束分布が必要となる。しかし集合体内の全中性子束分布を正確に求めるには、非均質炉心体系で中性子輸送計算を行わなくてはならないが、そもそも非均質炉心体系計算は計算コストの観点で実施することが困難である。そこで無限配列の非均質な単一集合体体系で詳細な輸送計算を実施し、得られた集合体内全中性子束分布を用いて、集合体平均反応率を保存するように均質化断面積を計算する。これにより集合体均質化断面積を近似的に求めることができる。しかし、この均質化断面積を用いて計算される中性子流（漏洩率）は非均質体系と一致しない。そのため、非均質集合体と均質集合体で反応率が一致せず、集合体均質化炉心計算の計算精度悪化に繋がる。

そこで、均質化集合体体系で不連続因子を適用し、均質化に起因する離散化誤差（均質化誤差）を低減する。このとき、非均質集合体と均質集合体の中性子流が一致する（保存される）ように、体系領域境界全中性子束の不連続性を考慮し、この不連続性を不連続因子で表す。従って、不連続因子 DF は非均質集合体と均質集合体の全中性子束 $\phi^{hetero}, \phi^{homo}$ を用いて下式から計算する。

$$DF = \frac{\phi^{hetero}}{\phi^{homo}}. \quad (1.1.1)$$

これをすべての燃料集合体についても求める。そして、不連続因子を適用した集合体均質化炉心体系計算を実行する。これにより、不連続因子によって均質化誤差は低減され、炉心計算の計算精度は向上する。すなわち、単一集合体計算と集合体均質化炉心計算の二段階の計算を不連続因子で結合することで、大型非均質炉心の核特性値を高精度に評価できる。

以上が、不連続因子による離散化誤差低減し、多段階の中性子輸送計算の結合による炉心解析を高精度化できる。実際に不連続因子は決定論的手法、特に近代ノード法による炉心計算、に適用され実機軽水炉解析の計算精度の向上に貢献している[11]。

● 非線形収束加速法による高速化

不連続因子による反応率保存を利用した非線形収束加速法を、詳細な離散化条件での中性子輸送計算（詳細計算）に適用することで、収束に要する反復回数を減らし計算を高速化できる。軽水炉における詳細な離散化条件での中性子輸送計算は、巨視的断面積の値や膨大な領域数に依存して、多くの反復回数が必要となる[12]。そこで、詳細計算の解の収束を、粗い離散化条件下の中性子輸送計算（粗計算）の解を用いて加速することを考える。このとき単に粗計算を実施しても詳細計算の解と一致せず収束加速を行うことができない。これは詳細計算と粗計算で反応率が保存されないためである。

そこで、不連続因子を用いて粗計算の離散化誤差を低減し、詳細計算と反応率を保存する。具体的には不連続因子を用いて粗計算の全中性子束不連続性を考慮し、詳細計算と粗計算間で中性子流（漏洩率）を保存する。これにより、不連続因子を適用した粗計算は詳細計算の解を再現可能となる。このとき中性子流補正項（不連続因子と全中性子束の積）は、詳細計算の反復毎に得られた中性子流と粗計算モデルから計算される中性子流の差異から計算される。中性子流の具体的な計算方法を第2章で述べる。従って不連続因子の値は、詳細計算の反復毎に異なる。このような、不連続因子を適用した粗計算（加速計算）の解から詳細計算の収束を加速する方法を非線形収束加速法と呼ぶ。なお、非線形収束加速法における不連続因子は中性子流補正係数と呼ばれるのが一般的である。

非線形収束加速法の適用により、詳細計算の収束性は大幅に向上する[12]。なお、非線形収束加速法適用により加速計算だけ計算量が増加するが、加速計算は詳細計算に比べると高速に計算が完了する。すなわち加速計算の計算量増加よりも詳細計算の計算量低減が上回るため、計算全体での計算量は大幅に低減され計算の高速化を達成できる。

以上のとおり、不連続因子および不連続因子を用いた計算手法の利用により、決定論的中性子輸送計算手法による高精度かつ高速な炉心解析を実施できる。すなわち不連続因子利用による離散化誤差低減は計算精度、非線形収束加速法は計算時間（反復回数）の観点で有用性が示されている。

しかし、不連続因子を用いる中性子輸送計算手法は実用的にも学術的にも未だ発展途上である。具体的には、不連続因子を用いる決定論的中性子輸送計算手法および確率論的中性子輸送計算手法について、それぞれ以下の課題がある。

● 決定論的手法：非線形収束加速法のさらなる収束性向上

非線形収束加速法の収束性向上によって、中性子輸送計算の計算精度を向上させること

ができる。中性子輸送計算の計算精度向上には、中性子輸送計算モデルの高度化や離散化条件の詳細化が考えられるが、これらは計算機性能に大きく依存する。収束性向上により少ない反復回数で収束解が得られるようになると、中性子輸送計算の収束判定基準を厳しくしても、あるいは詳細な離散化を用いても、言い換えるとすなわち計算精度を上げて収束性向上前と同じ計算時間で計算を完了することができる。従って、中性子輸送計算の収束性向上による高精度化を図るには、非線形収束加速法の収束性向上が重要となる。

現行の決定論的中性子輸送計算コードでは詳細計算では MOC が、非線形収束加速法では拡散計算に基づく計算モデルが良く利用されている。非線形収束加速法の計算原理より、詳細計算と加速計算の計算モデル乖離が小さいほど収束性が向上すると推測される。しかし、拡散計算以外の計算モデルを利用した非線形収束加速法は数少ない。また、空間離散化手法についても、MOC と同じ flat source 近似や linear source 近似を用いた加速法も提案および収束性を評価されていない。そのため、加速法の計算モデルと収束性の関係の系統的な評価に関する検討は行われていない。

以上より、詳細計算手法と非線形収束加速法間の計算モデル乖離と収束性の関係性を評価することで、さらなる収束性向上を達成できる非線形収束加速法の開発に繋がると期待される。

● 確率論的手法：不連続因子適用手法の確立

確率論的手法に対する不連続因子適用手法は未だ確立されていない。これは、確率論的手法では離散化誤差を排除した計算が可能であることや、従来利用されてきた不連続因子と確率論的手法との相性が悪いこと、が理由として挙げられる。

確率論的手法は離散化誤差を排除した計算が可能であるため、不連続因子を適用する動機がなかった。また、決定論的な輸送計算手法に対する不連続因子には様々な適用方法が提案されており、どの適用方法が最適化は未だ明らかになっていない。決定論的輸送計算手法に対する不連続因子の多くは角度依存性を有している。そのため仮に決定論的輸送計算手法に対する不連続因子をそのまま確率論的手法へ適用することを考えると、角度離散化誤差が無視できるほど角度について詳細に離散化された不連続因子を計算しなくてはならず、効率的ではない。そのため、確率論的手法と親和性の高い不連続因子の定義と適用方法を新たに開発する必要がある。本課題の解決は、確率論的手法の実用上の利点は乏しいが、不連続因子を適用する確率論的中性子輸送計算手法という原子炉物理学における新たな分野を開拓する、学術的価値の高い検討であると考えられる。

以上より、炉心解析の高度化や不連続因子適用手法の発展のために、決定論的手法および確率論的手法の両観点から、不連続因子を用いた中性子輸送計算手法の知見の深化や新規手法の開発が期待される。

1.2 本研究の目的

1.1 節で述べたとおり、不連続因子の利用により離散化誤差の低減や非線形収束加速法による収束加速を行うことができ、中性子輸送計算の計算コスト削減や精度向上を達成できる。そのため、より高速かつ高精度な炉心解析を行うにあたり中性子輸送計算のさらなる効率化および高度化を実現化するには、不連続因子および不連続因子を用いた中性子輸送計算手法に関する知見の深化やより高度な新規手法の開発が要求される。

そこで本研究では、中性子輸送計算の効率化と高度化を実現化するために、不連続因子の利用可能性の拡大を目的とする。本目的達成のために、本論文では不連続因子を用いる決定論的および確率論的中性子輸送計算手法に関する検討をそれぞれ行なう。以下に各検討の目的と検討内容を示す。

1. 決定論的手法：非線形収束加速法における計算モデルと収束性の関係解明

非線形収束加速法の収束性は、詳細計算と非線形収束加速法の計算モデルの乖離度合によって決定づけられると推測される。そのため、従来よりも高次な中性子輸送計算手法に基づく非線形収束加速法を新たに開発することで、さらなる収束性向上を達成できる可能性がある。

そこで本検討では、詳細計算と非線形収束加速法の空間および角度離散化モデルの乖離性と収束性の関係を系統的かつ定量的に評価することを目的とする。本検討では、不連続因子も活用しつつ異なる空間および角度離散化モデルに基づく新たな非線形収束加速法を 4 つ開発し、それら加速法および従来の加速法の収束性を評価および比較する。

2. 確率論的手法：不連続因子を用いた確率論的手法の開発および妥当性の検証

確率論的中性子輸送計算手法（モンテカルロ法）では、中性子輸送方程式にほとんど近似を適用せず数値解を求めることができるため、不連続因子の適用が検討されず適用方法が確立されていなかった。そのため、モンテカルロ法に対する不連続因子適用手法の開発は新たな中性子輸送計算分野の開拓に貢献する学術的意義があると考えられる。また当該手法は確率論的手法による炉心解析の実現化や計算の高速化など、実用上の観点でも有用である可能性がある。

そこで本検討では、領域毎 **even-parity** 不連続因子を多群モンテカルロ法に適用する手法（DF-MC 法）を新たに開発しその妥当性を検証することを目的とする。本検討では DF-MC 法の計算理論を確立し、炉心体系での検証計算を実施する。

1.3 本論文の構成

本論文は 6 章構成となっている。第 1 章では本論文の序論を述べた、第 2, 3 章では従来の中性子輸送計算手法に対する非線形収束加速法および離散化誤差低減手法についてまとめる。第 4, 5 章では本論文の検討内容および提案手法の検証計算について述べる。最後に第 6 章では、本論文についてまとめ結論および今後の課題を示す。

以下に各章の内容を示す。第 1 章では本研究の背景、目的および構成を述べた。

第 2 章では、決定論的な中性子輸送計算に対する非線形収束加速法の計算理論とその収束性評価についてそれぞれ述べる。非線形収束加速法の一般的な計算理論だけでなく、特に利用されることの多い CMFD 加速法の収束性や収束性向上手法についても述べる。

第 3 章では、決定論的な中性子輸送計算で用いられる離散化誤差低減手法の理論について述べる。本章では特に不連続因子、SPH 法、領域毎 even-parity 不連続因子の理論と計算方法をそれぞれ述べる。

第 4 章では、非線形収束加速法の空間および角度離散化モデルと収束性の関係に関する検討結果について示す。本章では本論文で新たに提案する 4 つの非線形収束加速法の計算理論とともに、それら加速法の収束性評価結果および加速計算モデルと収束性の関係に関する検討結果をそれぞれ示す。

第 5 章では、本論文で新たに提案する領域毎 even-parity 不連続因子を適用した多群モンテカルロ (DF-MC) 法の計算理論と検証計算について示す。DF-MC 法で特有な、中性子の透過および反射の原理と計算方法を示す。DF-MC 法を用いた一次元固定源計算および二次元体系固有値計算の検証計算結果をそれぞれ示す。

第 6 章では、本論文の結論及び今後の課題について述べる。

1.4 参考文献

- [1]. J. R. ASKEW, “A Characteristics Formulation to the Neutron Transport Equation in Complicated Geometries,” AEEW-M1108, United Kingdom Atomic Energy Establishment (1972).
- [2]. 牛尾直史, “Characteristics 法の基礎”, 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2004).
- [3]. R. E. ALCOUFFE, R. S. BAKER, J. A. DAHL et al., “PARTISN: A Time-Dependent, Parallel Neutral Particle Transport Code System,” LA-UR-08-07258 (2008).
- [4]. 「遮蔽ハンドブック」研究専門委員会, “放射線遮蔽ハンドブック—基礎編一,” 日本原子力学会, 98-103, ISBN 978-4-89047-161-4 (2015).
- [5]. 小林啓祐, 原子炉物理, コロナ社 (1996).
- [6]. E. W. LARSEN, J. E. MOREL, J. M. MCGHEE, “Asymptotic Derivation of the Multigroup P1 and Simplified PN Equation with Anisotropic Scattering,” *Nucl. Sci. Eng.*, **123**, 328–342 (1996); <https://doi.org/10.13182/NSE123-328>.
- [7]. 多田健一, “高精度 BWR 炉心計算手法に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科修士論文 (2008).
- [8]. 山本章夫, “拡散方程式の数値解法の基礎”, 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2004).
- [9]. 長家康展, “モンテカルロ計算の基礎理論および実験解析への適用,” 第 38 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.153-188, 日本原子力学会 (2006).
- [10]. K. S. SMITH, “Experiences and Historical Perspectives on the Development and Application of Reactor Physics Methods for LWR Core Neutronic Analysis,” 炉物理の研究, **73**, 日本原子力学会 炉物理部会 (2021); https://rpg.jaea.go.jp/else/rpd/annual_report/index.html. (2022 年 1 月 7 日現在)
- [11]. 佐治悦郎, 岩本達也, 丸山博見, 田原義寿, 森正明, “商業用軽水炉核計算手法の高度化”, 日本原子力学会会誌, **36**, 484–494 (1994).
- [12]. 大島吉貴, “Method of Characteristics における Coarse Mesh Finite Difference 加速法の収束性に関する研究,” 名古屋大学工学部物理工学科, 卒業論文 (2020).

第2章 中性子輸送計算における非線形収束加速法

2.1 本章の概要

本章では、中性子輸送計算における非線形収束加速法の理論と収束性解析について述べる。中性子輸送計算手法には乱数を用いる確率論的手法（モンテカルロ法）と、方程式を離散化し反復法により数値解を求める決定論的手法がある。炉心解析では計算コストと計算精度の観点から、決定論的手法による中性子輸送計算が実行される。

ほとんどの決定論的手法は反復法に基づく数値解法であり、中性子束や実効増倍率に関する反復計算を行うことで収束解を求めている。このとき反復の収束性が悪いと、反復毎に求まる解が要求される計算精度を満たすまで膨大な反復回数が必要となり、現実的な計算時間での解析が困難となる。特に、実機軽水炉解析で実行される決定論的中性子輸送計算の収束率は非常に悪く、収束加速法なしでは膨大な反復回数が必要となる。

そこで決定論的手法による中性子輸送計算では、一般に非線形収束加速法を適用することで収束率を向上させる。これにより収束までに要する反復回数を低減し、現実的な計算時間で高精度な収束解を求めることが可能となる。非線形収束加速法では、反復毎に収束加速計算で用いる係数行列が変化する。これにより、線形収束加速法よりもより効率的に、収束加速を行うことができる。すなわち非線形収束加速法は中性子輸送計算手法と並んで、現在の炉心解析において必要不可欠な手法である。

そこで本章では決定論的中性子輸送計算における非線形収束加速法の計算理論とその収束性について述べる。非線形収束加速法には様々な方法が提案されているが、その中でも特に利用されている **coarse mesh finite difference (CMFD)** 加速法を中心に述べる。CMFD 加速法は、より粗く離散化された拡散計算の解を用いて、被加速計算（詳細な輸送計算）の収束性を向上させる手法である。ただし CMFD 加速法は計算条件によって数値的不安定性を示すことが知られている。そのため、数値的不安定性を解消するような収束性向上手法が提案されている。本章では CMFD 加速法の理論と収束性を示すとともに、CMFD 加速法で利用される収束性向上手法についても併せて示す。

本章の構成を以下に示す。2.2 節では中性子輸送計算手法の概要を示す。特に決定論的手法の種類とその特徴についてまとめる。2.3 節では非線形収束加速法の概要を示す。具体的には、非線形収束加速法がどのような原理で中性子輸送計算の収束を加速しているのかを述べる。2.4 節では代表的な非線形収束加速法である **coarse mesh finite difference (CMFD)** 加速法の計算理論および計算手順、その収束性について述べる。2.5 節では CMFD 加速法における収束性向上手法について述べる。2.4.3 項でも述べるが、CMFD 加速法の収束性は散乱比や粗メッシュ光学距離などに依存し、計算条件によっては計算が収束しない場合がある。そこで先行研究により、CMFD 加速法の収束性向上手法が多く提案されている。2.6 節では、非線形収束加速法の収束性評価方法について述べる。収束性評価方法には、反復計算間の中性子束残差から求める数値的な方法と、線形化フーリエ解析による解析的な方法がある。2.7 節では、CMFD 加速法以外の代表的な収束加速法および高速化手法について述べ

る。最後に、2.8節には本章のまとめ、2.9節には参考文献をそれぞれ示す。

2.2 中性子輸送計算手法

本節では、中性子輸送計算で用いられる計算手法について述べる。原子炉内の中性子挙動はボルツマン輸送方程式によって記述される。従って、炉内の中性子密度及びエネルギー分布を正確に求めることは、ボルツマン輸送方程式を如何に精度よく解けるかという問題に帰着する。ボルツマン輸送方程式は、本来気体分子の密度及び速度分布を記述するために導出された方程式であるが、炉内の中性子についても適用可能である。炉内の中性子に対するボルツマン輸送方程式は、以下の仮定をおくことで導出される。詳細な導出については参考文献[1]を参照されたい。

- 中性子は電氣的に中性であること、またその質量は十分小さいことから電磁気力及び重力を無視し、核力のみを考慮する。
- 一般に、炉内の中性子数密度が約 10^{10} cm^{-3} であるのに対して、媒質の原子核数密度が約 10^{23} cm^{-3} であることから、中性子間の衝突は無視する。

以上の仮定を置くことで中性子の挙動は気体分子同様に統計的に扱うことが可能となり、ボルツマン輸送方程式として中性子挙動を記述できる。なお、本来ボルツマン輸送方程式は、時間依存の項を含むが、一般的な炉心計算では定常状態における中性子束分布を求めるため、時間依存性は無視する。本論文における中性子輸送方程式とは、中性子に対する定常状態のボルツマン輸送方程式（中性子輸送方程式）を指す。なお時間依存の中性子輸送計算手法（動特性計算）については参考文献[2]–[4]を示すに留める。

定常中性子輸送計算では、式(2.2.1)に示す定常状態の中性子輸送方程式を数値計算によって解く[5]。

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \quad (2.2.1)$$

ここで、 \vec{r} は位置、 E は中性子のエネルギー、 $\vec{\Omega}$ は中性子束の飛行方向、 $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は角度中性子束、 $\Sigma_t(\vec{r}, E)$ は巨視的全断面積、 $Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は中性子源であり式(2.2.2)で表される。

$$\begin{aligned} Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = & \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE' \\ & + \frac{\chi(E)}{4\pi} \frac{1}{k_{eff}} \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE' + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ここで、 $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ は巨視的散乱断面積（エネルギー E' から E 、方向 $\vec{\Omega}'$ から $\vec{\Omega}$ への散乱）、 $\chi(E)$ は核分裂スペクトル、 $\nu \Sigma_f(\vec{r}, E')$ は巨視的生成断面積、 k_{eff} は実効増倍率、 $S(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は外部中性子源である。

なお、角度中性子束と全中性子束は異なる物理量である。角度中性子束はある方向（立体角）に進む中性子が飛行方向を法線とする単位面積を単位時間に通過する中性子数であ

る。全中性子束は、ある位置における角度中性子束を全方向（全立体角）で積分して得られる中性子数である。単に中性子束と言った場合は全中性子束のことを指すのが一般的である。本論文ではこれらの混同を避けるため、角度中性子束と全中性子束を区別して記述し、これらをまとめて指す場合は中性子束という単語を用いる。

式(2.2.1)は位置 \vec{r} でエネルギー E 、飛行方向 $\vec{\Omega}$ に飛ぶ中性子の流れに関する保存式である。式(2.2.1)の左辺第一項は中性子の漏洩項、第二項は吸収項、右辺は式(2.2.2)で表され第一項は散乱中性子源項、第二項は核分裂中性子源項、第三項は外部中性子源項である。中性子輸送方程式は（中性子の消滅量）＝（中性子の生成量）という形式で記述されており、定常状態では両者が釣り合うことを意味する。なお、式(2.2.1)は微分演算子及び積分演算子両方を含んでいることから、微積分型中性子輸送方程式とも呼ばれる。

式(2.2.1), (2.2.2)から分かるとおり、中性子輸送方程式は6変数（位置3変数、エネルギー1変数、飛行方向2変数）からなる偏微分方程式であり代数的に解くことは困難なため、解析的ではなく数値的に解かれることが一般的である。このとき中性子輸送方程式に対する数値計算手法は、確率論的手法と決定論的手法に大別される。

確率論的手法は、乱数を用いて中性子輸送方程式を解く方法であり、モンテカルロ法とも呼ばれる。モンテカルロ法では、乱数を用いて中性子の挙動を直接的にシミュレーションする。このとき中性子の挙動を模擬する方法として、アナログモンテカルロ法と非アナログモンテカルロ法がある。

アナログモンテカルロ法では中性子の状態を存在するかしないか（ウエイトが0か1）のどちらかのみである。中性子が衝突反応を起こす場合、核反応断面積の値からどの核反応が生じるかを判定する。散乱反応が起きれば中性子の追跡を継続し、吸収反応が起きたら中性子は消滅させ追跡を終了する。本方法は直感的にも分かりやすいが、統計的不確かさが大きくなるという欠点がある。例えば遮蔽計算などで中性子が非常に低確率で到達する領域が存在する場合、その領域の中性子束を得るためには、たまたま領域内に到達した中性子が核反応を起こさなければならず、ばらつきが大きくなる。

非アナログモンテカルロ法では追跡する中性子にウエイト（重み）という概念を導入する。ウエイトは実数値をとり中性子の存在確率を表す。また、吸収反応が起きたらそれに相当する分だけウエイトを減少させる。これにより吸収断面積の大きい領域にも多くの中性子が到達し、統計的不確かさを低減できる。

モンテカルロ法では複雑な幾何形状の体系であっても、空間および飛行方向をほとんど近似なく取り扱い可能である。またエネルギーについては、評価済み核データを直接取り扱う連続エネルギーモンテカルロ法と、多群近似から求まる多群断面積を取り扱う多群モンテカルロ法の2種類の取り扱い方がある。モンテカルロ法は近似をほとんど適用せずに中性子輸送方程式を解くことができるため、参照解の計算によく利用される。しかし乱数を用いるため計算結果には統計的不確かさが付随する。統計的不確かさを十分小さくするためには、追跡する中性子数を増やす必要があるため、計算コストが膨大となる。近年は、計算

機性能の向上や計算手法の高度化により、複雑かつ大型な体系でもモンテカルロ計算が実行可能となっている。しかし実機炉心解析を現実的な計算機リソースで行うまでには至っておらず、さらなる計算速度の高速化や計算コストの低減が今後の課題となる。モンテカルロ法の具体的な計算理論や計算手順は参考文献[7]–[13]を参照すること。

決定論的手法では、中性子輸送方程式を空間・飛行方向・エネルギーについて離散化して数値計算を行う。式(2.2.1)を離散化した行列形式の方程式は固有値問題となり、最大固有値が実効増倍率、最大固有値に対応する固有ベクトルが中性子束に相当する。(空間領域数)×(エネルギー群数)が N のとき、式(2.2.1)は N 次元行列の固有値問題となる。 N 次元行列の固有値問題は余因子展開を行うことで N 次代数方程式と等価になるが、代数学におけるアーベル-ルフィニの定理[14]より、一般に5次以上の代数方程式は四則とべき乗で表される解の公式が存在せず、これを有限回の代数演算で解くことは出来ない。一般的な炉心計算において N は5を遥かに超えるため、炉心計算全般でこの定理が当てはまる。従って炉心計算では、固有値方程式を解析的(直接的)に解くことはせず、反復法を用いる。なお、解の公式が存在しないだけであり、5次以上の代数方程式でも条件によっては解析解を求めることができる。ただし方程式の次元数が大きい場合、解析解を求めることができるかを判定するのは困難であるため、初めから反復法で解を求めるのが一般的である。中性子輸送計算における決定論的手法とは、反復法による数値計算手法のことを指す。

反復法とは、適当な初期解から計算を繰り返すことで近似解を真の解に近づけていき、近似解が必要な精度まで収束したら計算を終了する数値解法のことである。反復法を用いた数値計算によって式(2.2.1)を解く場合、空間、エネルギー、中性子の飛行方向、を離散化もしくは関数展開する必要があり、その離散化方法によって計算手法が区別される。以下に、決定論的手法における各変数の離散化方法について述べる。

空間の離散化では、計算体系を微小な空間領域に分割し、空間的に連続な物理量を各空間領域点に離散化および近似する。このとき、各空間領域内で中性子束や中性子源が一定であると仮定する **Flat source** (平坦中性子源) 近似や、空間分布を線形と仮定する **Linear source** (線形中性子源) 近似がある。

エネルギーの離散化では、断面積の複雑なエネルギー依存性を複数のエネルギー群に離散化および近似する。このとき、あるエネルギー領域を平均化させることでそのエネルギー群における値を求める多群近似が利用される。多群近似ではエネルギー群内の反応率や中性子束が保存されるように計算される。例として、エネルギー群 g の巨視的断面積は式(2.2.3)から計算される。

$$\Sigma_g(\vec{r}) = \frac{\int_{g-1}^g \Sigma(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E) dE}{\int_{g-1}^g \phi(\vec{r}, E) dE} \quad (2.2.3)$$

多群近似を用いることで中性子輸送方程式からエネルギーの変数がなくなり、総エネルギー

一群数 G 個の連立微分方程式となる。

中性子飛行方向の離散化では、全立体角にランダムに飛行する中性子の飛行方向を離散化もしくは直交基底関数展開する。決定論的手法は、飛行方向の離散化方法によって呼び名が異なることが多い。飛行方向を離散化する方法では、各方向の角度中性子束をそれぞれ計算し、ガウス求積法により立体角積分を行い、全中性子束を求める。具体的な計算手法として S_n 法（離散座標法）や Method of characteristics（MOC）などがある。直交基底関数で展開する方法では、中性子束を球面調和関数（もしくはルジャンドル多項式）で展開することで、中性子輸送方程式を中性子束モーメントの次数個の連立方程式に変形し数値計算を行う。具体的な計算手法として、拡散法（拡散計算）や P_n 法、SP3 法などがある。いずれの決定論手法にも、利点および欠点がそれぞれあるため、計算体系や要求される計算精度および計算時間によって、どの手法を用いるべきか事前に検討する必要がある。決定論的手法の具体的な計算理論や計算手順は参考文献[2]–[5],[4]–[21]を参照すること。

以上が中性子輸送方程式および中性子輸送計算手法の概要である。本論文は、不連続因子を用いる中性子輸送計算手法に主題を置いているため、一般的な中性子輸送計算手法の計算理論や計算手順に関する記述は省略する。

2.3 非線形収束加速法の概要

中性子輸送計算では一般に反復法に基づく数値解法が利用されるが、その収束性は散乱比やドミナンス比に依存する。散乱比とは全断面積に対する散乱断面積の比であり、ドミナンス比とは最大固有値に対する絶対値が二番目に大きい固有値の比である。これらの値は収束率と同等の意味を持つ。すなわち 1 に近いほど収束性が悪く、収束まで多くの反復回数が必要となる。実機軽水炉の炉心体系ではこれらの値がどちらも 1 に近く、収束までに多くの反復回数が必要となる（計算体系や条件にもよるがおよそ 100~1000 回）。そのため現実的な計算時間で計算を収束させるためには、非線形収束加速法適用による収束加速は必須である。

中性子輸送計算における非線形収束加速法では、詳細な中性子輸送計算（詳細計算もしくは被加速計算）の反復間に粗く離散化された中性子輸送計算（加速計算）を行い、被加速計算の収束を加速する。非線形収束加速法は、その名のとおり非線形反復計算を行うため、反復毎に演算に用いる定数係数の値が異なる。そのため線形収束加速法よりも最適化された収束加速を行えるため収束性が良く、少ない反復回数で収束する。また非線形収束加速法は 1 反復当たりの演算を行列形式で記述することができないため、解析的な収束率を評価することが困難である。ただし、いくつかの仮定を置くことで解析的な収束率を評価する方法（線形化フーリエ解析）が利用されている。

中性子輸送計算における非線形収束加速法では、詳細計算の収束を、加速計算の解を用いて加速するが、このとき加速計算で詳細計算の解を再現するためには反応率を保存する必要がある。加速計算で用いられる核定数は、反応率保存に基づく空間均質化やエネルギー群

縮約から計算されるが、この核定数を単に用いるだけでは漏洩率（中性子流）が保存されない。従って、反応率保存から求まる核定数を用いて粗い離散化による中性子輸送計算を実行しても詳細計算を再現した計算にならない。そこで加速計算では、詳細計算の中性子流を保存するために中性子流補正項が用いられる。中性子流補正項は、詳細計算から求まる中性子流と、加速計算モデルに基づき計算される中性子流の差異を埋め合わせるように計算される。一般的に中性子流補正項は中性子流補正係数と全中性子束の積から成る。中性子流補正項を用いることで詳細計算の反応率を保持した加速計算を行うことができ、詳細計算の解を再現可能となる。

非線形収束加速法を適用した中性子輸送計算の大まかな計算手順を図 2.3.1 に示す。以下では、図 2.3.1 に従って計算手順を説明する。なお、具体的な計算式については、各手法の説明時に示し、本説明では概念的な計算手順についてのみ述べる。

まずは詳細計算を少数回反復(通常は 1-2 回)する。次に、詳細計算の少数回反復後に得られた中性子束や中性子流を用いて、加速計算で用いる核定数や中性子流補正係数を計算する。この操作を **restriction** (制限補間など) と呼ぶ。中性子輸送計算における **restriction** は、空間については均質化、エネルギー群については縮約と呼ばれるのが一般的である。このとき **restriction** では、詳細計算と加速計算間で反応率が保存されるように各パラメータが計算される。次に **restriction** で得られた入力パラメータを用いて加速計算を実行する。このとき加速計算は解が収束するまで反復する。そして加速計算の収束解を用いて、詳細計算の解を更新する。これを **prolongation** (延長補間など) と呼ぶ。中性子輸送計算における **prolongation** では、加速計算前後の中性子束分布を用いて詳細計算の全中性子束分布や体系境界の角度中性子束を更新する。そして詳細計算の収束判定を行い、収束していなければ詳細計算の反復から上記の手順を繰り返す。収束していれば計算を終了する。以上が非線形収束加速法を適用した中性子輸送計算の計算手順である。

中性子輸送計算における非線形収束加速法には、様々な方法が提案されている。各方法は、加速計算で用いる計算モデルと補正係数の定義がそれぞれ異なる。中性子輸送計算では、加速計算モデルとして一般的に拡散計算が用いられる。これは、少ない計算コストで比較的高精度な解を求められるためである。補正係数には様々な定義が提案されており、定義によって収束性が異なる。代表的な手法としては、**coarse mesh rebalance (CMR)** 加速法[22]、**coarse mesh finite difference (CMFD)** 加速法[23]、**generalized coarse mesh rebalance (GCMR)** 加速法[24]がある。

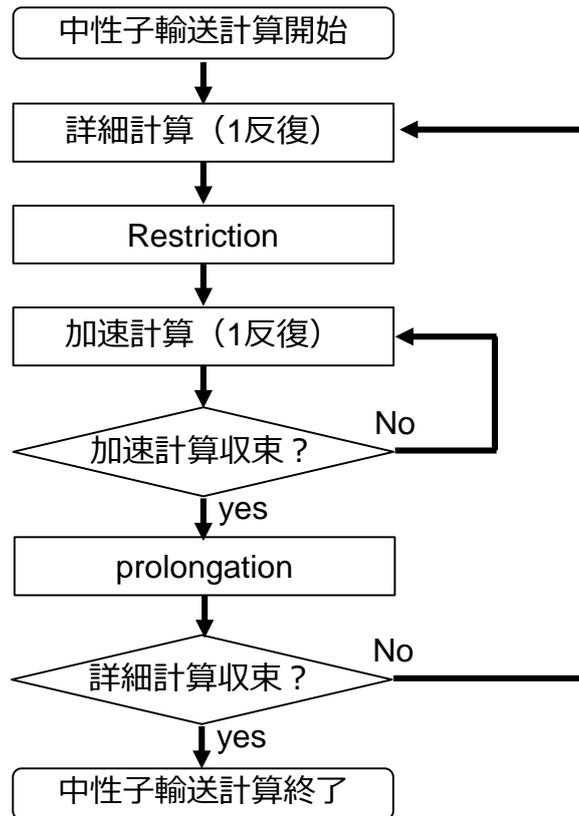


図 2.3.1 非線形収束加速法の大まかな計算手順

また、図 2.3.1 で説明した中性子輸送計算における非線形収束加速法は、multigrid 法（多重格子法）と呼ばれる数値計算手法の一種である[25]–[27]。multigrid 法は、方程式を多段階層に離散化し、各離散方程式の数値解を restriction と prolongation で結合させることで、最も詳細に離散化した方程式の解を高速に求める数値計算手法である。これは離散幅の異なる方程式間の補外ともいえる。multigrid 法は、任意の離散化手法や計算モデルと組み合わせることができる。また非線形反復だけでなく線形反復による収束加速も可能である。線形反復を用いる場合は、行列演算による解析的な収束率評価が可能である。

multigrid 法には、物理的な性質を仮定して加速計算モデル（深い階層の離散方程式）を構築する幾何的 multigrid 法と、すべて代数的に行う代数的 multigrid 法がある。原子炉物理学における収束加速法は、幾何的 multigrid 法に基づく手法がほとんどである。ただし非構造格子体系における中性子輸送計算に対しては代数的 multigrid 法に基づく非線形収束加速法も提案および適用されている。

非線形収束加速法は、restriction と prolongation を用いて多段階層に離散化した方程式の解を結合させている。すなわち、離散階層を 2 層以上深くとることも可能である。すなわち、図 2.3.1 では 1 層（1-level）の加速計算のみを考えているが、2 層以上の加速計算を考えることも可能である。このとき n 層目（ n -level）の加速計算では、 $n - 1$ 層目の加速計算の収束

を加速する ($n > 1, n \in \mathbf{N}$)。このとき層が深いほど、中性子輸送方程式は粗く離散化される。Multigrid 法における多段階層化を multi-level と呼ぶ。例えば、多段階な CMFD 加速法は multi-level CMFD と呼ばれる。CMFD 加速法以外の収束加速法でも多段階加速は可能である。

離散層の段数や計算手順には様々な方法が提案されているが、一般的には V サイクルもしくは W サイクルが利用される。それぞれ、各階層への行き来の順番が異なる。炉心体系計算における multi-level CMFD 加速法では、2 段階の加速がよく利用される。1-level 目では燃料ピンセル均質化体系 (pin-level CMFD)、2 level 目では集合体均質化体系 (assembly-level CMFD) が用いられる。pin-level CMFD 加速計算は空間領域数が多く、加速計算自体の収束性が悪い。そのため assembly-level CMFD 加速計算により pin-level CMFD 加速計算の収束を加速している。2-level の非線形収束加速法は、AEGIS コード[28]や GENESIS コード[29][30]、CASMO-5 コード[31][32]で利用されている。

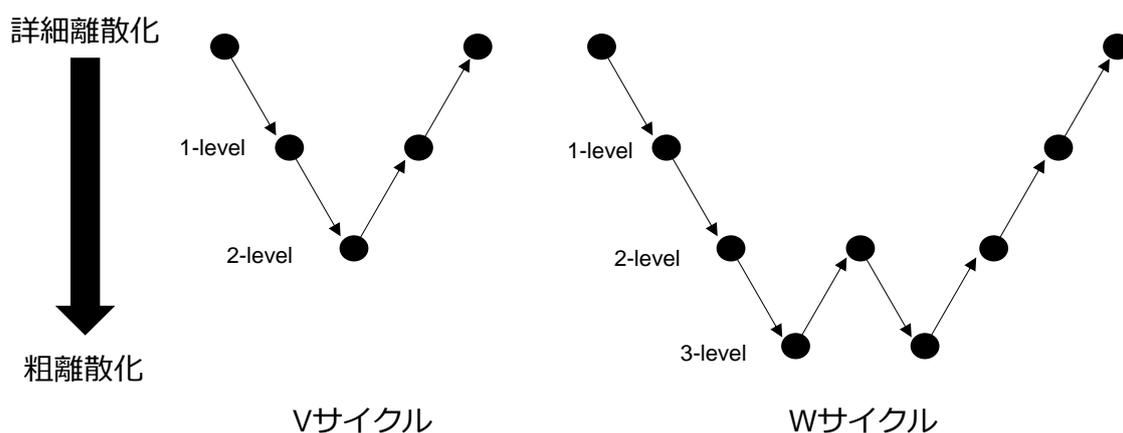


図 2.3.2 V サイクルおよび W サイクルの概念図

2.4 Coarse mesh finite difference (CMFD) 加速法

本節では CMFD 加速法の理論および計算手順、収束性について述べる。本節では簡単のため一次元平板体系を仮定して計算理論および計算手順を説明する。

2.4.1 計算理論

本項では、CMFD 加速法の計算理論について述べる。CMFD 加速法は非線形加速法の一つであり、K. Smith によって提案された非線形収束加速法である[23]。当初は近代ノード法に対して適用されていたが、現在は MOC などの輸送計算手法にも適用される。

CMFD 加速法では、詳細な計算条件での中性子輸送計算 (詳細計算) の反復間に、CMFD 加速計算を行い、加速計算の解から詳細計算の解を更新することで収束を加速する。ここで

言う詳細計算とは、詳細な計算条件での中性子輸送計算を指し、特定の計算手法に限定しない。CMFD 加速計算とは、粗い離散化条件下での拡散計算をベースとした反復計算を指す。CMFD 加速計算は、空間均質化もしくはエネルギー群縮約を行った均質体系で実行されることが多い。例えば図 2.4.1 に示すとおり、詳細計算で扱う非均質体系を空間均質化し、均質体系で加速計算を実行する。これにより、空間領域数を減らし加速計算の計算コストを低減できる。

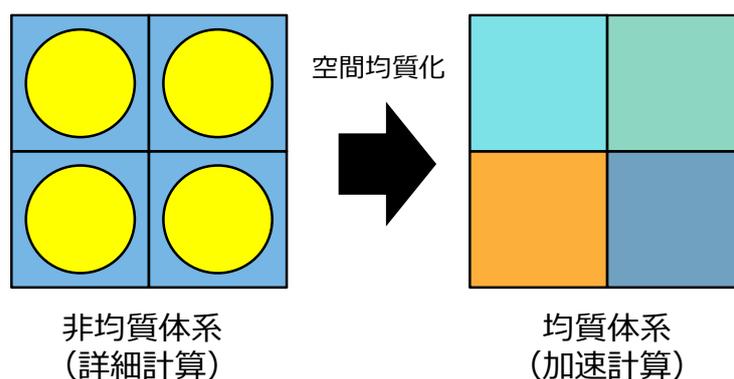


図 2.4.1 詳細計算における非均質体系と加速計算における均質体系の例

単に均質体系で拡散計算を行うだけでは、詳細計算との離散化誤差の差異や空間均質化誤差およびエネルギー群縮約誤差によって、拡散計算の解が詳細計算の解を再現せず、詳細計算の収束を加速できない。これは上記の離散化誤差により領域内の反応率が保存されないためである。そこで、詳細計算の解（反応率）を保存するように、拡散計算における中性子流に補正項を加える。補正項は空間均質化から求まる全中性子束と補正係数から成る。補正係数は、拡散近似から求まる中性子流と中性子流補正項の和が詳細計算の中性子流と一致するように値が決定する。従って CMFD 加速計算では単に拡散計算を行うのではなく、中性子流補正項を含む形式の拡散計算を行う。これにより CMFD 加速計算は詳細計算の解を再現し、詳細計算の収束を加速できる。CMFD 加速法の適用により、計算体系や計算条件にもよるが、炉心体系計算における詳細計算の場合は反復回数が約 1/10~1/100 に低減される。これにより、現実的な計算時間で詳細計算が実行可能となる。

CMFD 加速法で用いる均質化領域は、原理上任意に設定可能である。そのため、非均質体系をそのまま CMFD 加速法で用いることも可能である。ただしその場合は空間領域数が多く、CMFD 加速計算自体の計算時間が長くなる。また、集合体単位もしくは複数の集合体単位で空間均質化を行うことも可能である。ただし、CMFD 加速法の収束性は均質化領域の光学距離（巨視的全断面積と均質化領域サイズの積）に依存する。そのため均質化領域サイズが大きすぎると、光学距離が 1 を超え収束性が悪化する。従って、計算体系や計算条件によって CMFD 加速計算で用いる均質化領域をどのように設定するか検討する必要がある。

なお、CMFD 加速計算自体の収束性が悪い場合は、multi-level CMFD 加速法が利用される。このとき、低 level CMFD 加速計算の収束性を高 level CMFD 加速計算で加速する。

以下に CMFD 加速法の計算理論を示す。まず CMFD 加速法における restriction について述べる。Restriction では空間均質化もしくはエネルギー群縮約と、中性子流補正係数の計算をそれぞれ行う。

まずは空間均質化およびエネルギー群縮約について説明する。詳細計算における反応率を保存するように均質化断面積を求める。均質化断面積とは詳細計算で求まる全中性子束を用いて均質領域内反応率を保存するように計算された断面積のことである。例えば、均質化領域*i*および粗いエネルギー群*G*内の反応率を積分すると下式のとおりである。

$$\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \Sigma_{t,g,k} \phi_{g,k} V_k, \quad (2.4.1)$$

ここで*k*は均質化領域*i*に含まれる詳細領域のインデックス、*g*は粗いエネルギー群*G*に含まれる詳細なエネルギー群のインデックス、*V_k*は領域*k*の体積である。このとき、均質化領域内で断面積が一定であると仮定した上で、上式の反応率の積分値と等しくなるように均質化全断面積を定義すると式(2.4.2)のとおりとなる。

$$\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \Sigma_{t,g,k} \phi_{g,k} V_k = \Sigma_{t,G,i} \sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \phi_{g,k} V_k. \quad (2.4.2)$$

すなわち、空間均質化およびエネルギー群縮約を行う場合の均質化全断面積*Σ_{t,G,i}*は式(2.4.3)から計算される。

$$\Sigma_{t,G,i} = \frac{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \Sigma_{t,g,k} \phi_{g,k} V_k}{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \phi_{g,k} V_k}. \quad (2.4.3)$$

均質化断面積*Σ_{t,G,i}*を用いることで、詳細計算で得られた反応率である式(2.4.1)は保存される。他の核反応における均質化断面積（吸収および除去断面積）も同様に計算できる。ただし均質化生成断面積、散乱断面積および核分裂スペクトルは下式(2.4.4)–(2.4.6)から計算する。

$$\nu \Sigma_{f,G,i} = \frac{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \nu \Sigma_{f,g,k} \phi_{g,k} V_k}{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \phi_{g,k} V_k}, \quad (2.4.4)$$

$$\Sigma_{s,G \rightarrow GG,i} = \frac{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} \Sigma_{s,g \rightarrow g',k} \phi_{g',k} V_k}{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \phi_{g,k} V_k}, \quad (2.4.5)$$

$$\chi_{G,i} = \frac{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \chi_{g',k} \sum_{g'' \in G} \nu \Sigma_{f,g'',k} \phi_{g'',k} V_k}{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \nu \Sigma_{f,g,k} \phi_{g,k} V_k}. \quad (2.4.6)$$

また、均質化領域における全中性子束は均質化領域内の中性子数が保存されるように式(2.4.7)から計算される。

$$\phi_{G,i} = \frac{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} \phi_{g,k} V_k}{\sum_{k \in i} \sum_{g \in G} V_k}. \quad (2.4.7)$$

CMFD 加速法では均質化断面積だけでなく拡散係数についても直接均質化を行う場合があ

る。ただし、ボイド近傍の領域が存在すると、拡散係数を均質化した場合と核反応毎に断面積を均質化した場合とで拡散係数の値が異なる。これにより CMFD 加速法の収束性に違いが生じる。均質化断面積を用いると拡散係数は式(2.4.8)のとおり計算される。なお GENESIS コードや本論文では、式(2.4.8)から拡散係数を計算している。

$$D_{G,i} = \frac{1}{3\Sigma_{tr,G,i}}. \quad (2.4.8)$$

CMFD 加速計算では、均質化領域境界の正味中性子流を全中性子束の有限差分式で表現する。このとき均質化領域*i*における一次元拡散方程式は以下のとおり表される。

$$\frac{J_{G,i+1/2} - J_{G,i-1/2}}{\Delta x_i} + \Sigma_{t,G,i}\phi_{G,i} = \sum_{G'} \Sigma_{s,G' \rightarrow G,i} \phi_{G',i} + \frac{\chi_{G,i}}{k_{eff}} \sum_{G'} \nu \Sigma_{f,G',i} \phi_{G',i}, \quad (2.4.9)$$

$$J_{G,i+1/2} = -\tilde{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1} - \phi_{G,i}), \quad (2.4.10)$$

$$J_{G,i-1/2} = -\tilde{D}_{G,i-1/2}(\phi_{G,i} - \phi_{G,i-1}), \quad (2.4.11)$$

ここで \tilde{D} は拡散係数から成る結合係数であり下式(2.4.12)で定義される。

$$\tilde{D}_{G,i+1/2} \equiv \frac{2D_{G,i}D_{G,i+1}}{D_{G,i+1}\Delta x_i + D_{G,i}\Delta x_{i+1}}. \quad (2.4.12)$$

しかし、単に式(2.4.9)–(2.4.12)に示す均質化領域の拡散方程式を解いても、詳細計算の解を再現できない。これは、詳細計算と加速計算の計算モデルの差異や、空間均質化およびエネルギー群縮約に起因する誤差によって、式(2.4.10)および(2.4.11)に示す漏洩項（正味中性子流）が、詳細計算で求まる値と一致しないためである。

そこで CMFD 加速法では、式(2.4.10)および(2.4.11)が詳細計算の正味中性子流を再現するように中性子流補正係数から成る補正項を加える。以下に補正項の定義と補正係数の計算方法を示す。まず、詳細計算から均質化領域境界の正味中性子流 $J_{G,i+1/2}^{fine}$ を求めておく。 $J_{G,i+1/2}^{fine}$ の計算方法は、詳細計算で用いる中性子輸送計算手法によって異なるため、本項では説明を割愛する。拡散計算の場合は、Fick の拡散法則の式と全中性子束から計算できる。輸送計算手法（MOC や Sn 法など）の場合は領域境界の放出角度中性子束をその方向の立体角および領域境界面で積分することで求まる。MOC における領域境界の正味中性子流の詳しい計算方法は参考文献[4]を参照すること。

前述のとおり、詳細計算による正味中性子流 $J_{G,i+1/2}^{fine}$ は、詳細計算で求めた均質化領域平均全中性子束 $\phi_{G,i+1}^{fine}$, $\phi_{G,i}^{fine}$ を式(2.4.10)に示す拡散近似に基づく中性子流差分式に代入して得られる正味中性子流と一致しない。

$$J_{G,i+1/2}^{fine} \neq -\tilde{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1}^{fine} - \phi_{G,i}^{fine}). \quad (2.4.13)$$

そこで、式(2.4.13)右辺が左辺と一致するように、右辺に補正項を加える。

$$J_{G,i+1/2}^{fine} = -\tilde{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1}^{fine} - \phi_{G,i}^{fine}) + \hat{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1}^{fine} + \phi_{G,i}^{fine}). \quad (2.4.14)$$

ここで、 $\hat{D}_{G,i+1/2}$ は中性子流補正係数である。このとき中性子流補正係数 $\hat{D}_{G,i+1/2}$ の値は式(2.4.15)から計算される。

$$\hat{D}_{G,i+1/2} = \frac{J_{G,i+1/2}^{fine} + \tilde{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1}^{fine} - \phi_{G,i}^{fine})}{\phi_{G,i+1}^{fine} + \phi_{G,i}^{fine}}. \quad (2.4.15)$$

そのため CMFD 加速法では式(2.4.15)から計算された中性子流補正係数を用いて、正味中性子流差分式には以下の式をそれぞれ用いる。

$$J_{G,i+1/2} = -\tilde{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1} - \phi_{G,i}) + \hat{D}_{G,i+1/2}(\phi_{G,i+1} + \phi_{G,i}), \quad (2.4.16)$$

$$J_{G,i-1/2} = -\tilde{D}_{G,i-1/2}(\phi_{G,i} - \phi_{G,i-1}) + \hat{D}_{G,i-1/2}(\phi_{G,i} + \phi_{G,i-1}), \quad (2.4.17)$$

なお、補正項が全中性子束の和で表されているのは補正係数計算時(式(2.4.15))にゼロ除算が生じないようにするためである。全中性子束の差で表すと、全中性子束空間分布が平坦な場合に、式(2.4.15)右辺分母が 0 に近い値をとり補正係数を適切に評価することができなくなる。以上が CMFD 加速法における中性子流補正係数の計算方法である。

式(2.4.16)および(2.4.17)を、式(2.4.9)に示す中性子バランス式に代入し整理することで、詳細計算の解を再現する拡散計算(CMFD 加速計算)を実行できる。一次元体系の場合、以下に示す全中性子束に関する三点階差式を解けばよい。

$$\begin{aligned} A_{G,i-1/2}\phi_{G,i-1} + A_{G,i}\phi_{G,i} + A_{G,i+1/2}\phi_{G,i+1} \\ = \sum_{G'} \Sigma_{s,G' \rightarrow G,i} \phi_{G',i} + \frac{\chi_{G,i}}{k_{eff}} \sum_{G'} \nu \Sigma_{f,G',i} \phi_{G',i}, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

ここで、定数係数 A は以下のとおりとなる。これらは、補正項の存在のため、拡散計算の場合と異なる値となる。

$$A_{G,i-1/2} = -\frac{1}{\Delta x_i} (\tilde{D}_{G,i-1/2} + \hat{D}_{G,i-1/2}), \quad (2.4.19)$$

$$A_{G,i+1/2} = -\frac{1}{\Delta x_i} (\tilde{D}_{G,i+1/2} + \hat{D}_{G,i+1/2}), \quad (2.4.20)$$

$$A_{G,i} = \Sigma_{r,G,i} - (A_{G,i-1/2} + A_{G,i+1/2}) + \frac{2}{\Delta x_i} (\hat{D}_{G,i-1/2} + \hat{D}_{G,i+1/2}). \quad (2.4.21)$$

式(2.4.18)を行列演算によって解くことで、詳細計算の解を再現する均質化領域全中性子束分布を計算できる。なお、拡散計算同様、二次元および三次元体系についても上記の議論を拡張することで、二次元および三次元体系に対する CMFD 加速計算の階差式を得ることができる。また、境界条件の取り扱いについても拡散計算同様である。実効増倍率の計算方法も一般的な拡散計算と同様である。

次に CMFD 加速法における prolongation について述べる。式(2.4.18)を解いて得られる均

質化領域全中性子束分布に基づく均質化領域内反応率が保存されるように、式(2.4.22)によって詳細計算の全中性子束分布を更新する。

$$\phi_{g,k}^{after} = \phi_{g,k}^{before} \frac{\phi_{G,i}^{after}}{\phi_{G,i}^{before}} \quad (2.4.22)$$

ここで、上付き文字*before, after*は、CMFD 加速計算前後の値であることを表している。すなわち詳細計算の全中性子束分布は、CMFD 加速計算前の全中性子束分布に CMFD 加速計算前後の均質化領域平均全中性子束の比を乗じることで、値が更新される。このとき、MFD 加速計算前後の均質化領域平均全中性子束の比 ($\phi_{G,i}^{after} / \phi_{G,i}^{before}$) を **rebalance factor** と呼ぶ。

Rebalance factor は、詳細計算の全中性子束が含まれる均質化領域および粗いエネルギー群の値をそれぞれ用いる ($k \in i, g \in G$)。

以上が、CMFD 加速法の計算理論である。上記から分かるとおり、CMFD 加速計算の計算アルゴリズムは、CMFD 加速計算前の **restriction** (空間均質化、エネルギー群縮約および中性子流補正係数の計算)、CMFD 加速計算後の **prolongation** (詳細計算の解の更新) を除けば、拡散計算とほぼ同等である。従って、CMFD 加速法のコーディングは拡散計算をベースにすれば比較的容易である。

最後に、中性子流補正係数の物理的意味について考える。式(2.4.14)–(2.4.17)から分かるとおり、中性子流補正項を用いることで詳細計算と加速計算間で正味中性子流が保存される。このとき、補正係数は均質領域平均全中性子束に乘じられる。そのため、詳細計算と加速計算間の正味中性子流を保存されるように、中性子流補正係数を用いて均質領域境界全中性子束を不連続としていると考えることができる。そこで、中性子流補正係数からなる中性子流差分式(2.4.15)を、領域境界全中性子束に対して不連続因子を適用した場合の中性子流差分式に変形する。ここでは簡単のためエネルギー群のインデックスは省略する。

不連続因子 DF を用いて領域境界全中性子束の不連続性を式(2.4.23)のとおり仮定する。

$$DF_{i,x+} \phi_{i,x+} = DF_{i+1,x-} \phi_{i+1,x-} \quad (2.4.23)$$

ここで下付き文字 $x-, x+$ は x 軸正負方向をそれぞれ表している。式(2.4.23)には二つの変数(不連続因子)が含まれる。しかし制約条件は正味中性子流連続式の1つだけであるため、2変数の値を求めることができない。そこでさらに、 $DF_{i,x+} = 1$ を仮定し $f_{i+1/2}$ を新たに定義すると、境界条件は以下のとおりとなる。

$$\phi_{i,x+} = f_{i+1/2} \phi_{i+1,x-} \quad (2.4.24)$$

$$f_{i+1/2} \equiv \frac{DF_{i+1,x-}}{DF_{i,x+}} = DF_{i+1,x-} \quad (2.4.25)$$

この境界条件では、全中性子束の不連続性を $i+1$ 側領域における領域境界全中性子束のみで扱っており、その不連続性は $f_{i+1/2}$ で定量的に扱われている。この境界条件を仮定すると、

拡散近似に基づく正味中性子流差分式は以下のとおり表される。

$$J_{i+1/2} = -\frac{2D_{g,i}D_{g,i+1}f_{i+1/2}}{D_{g,i+1}\Delta x_i + D_{g,i}\Delta x_{i+1}f_{i+1/2}}(\phi_{g,i+1} - \phi_{g,i}) \quad (2.4.26)$$

このとき式(2.4.26)で表される中性子流差分式が、式(2.4.16)表される補正項を含む差分式と等価になる場合、以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned} & -\frac{2D_{g,i}D_{g,i+1}f_{i+1/2}}{D_{g,i+1}\Delta x_i + D_{g,i}\Delta x_{i+1}f_{i+1/2}}(\phi_{g,i+1}^{fine} - \phi_{g,i}^{fine}) \\ & = -\tilde{D}_{g,i+1/2}(\phi_{g,i+1}^{fine} - \phi_{g,i}^{fine}) + \hat{D}_{g,i+1/2}(\phi_{g,i+1}^{fine} + \phi_{g,i}^{fine}) \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

この式を $f_{i+1/2}$ について解けば、中性子流補正係数と不連続因子の関係が導かれる。上式を $f_{i+1/2}$ について解くと下式のとおりとなる。

$$f_{i+1/2} = D_{g,i+1}\Delta x_i \left(\frac{2D_{g,i}D_{g,i+1}}{\hat{D}_{g,i+1/2} - \tilde{D}_{g,i+1/2} \frac{\phi_{g,i+1}^{fine} + \phi_{g,i}^{fine}}{\phi_{g,i+1}^{fine} - \phi_{g,i}^{fine}}} - D_{g,i}\Delta x_{i+1} \right)^{-1} \quad (2.4.28)$$

上式より、中性子流補正係数の値を用いて、均質化領域境界全中性子束の不連続性を表すことができる。従って、中性子流補正係数は領域境界全中性子束に対する不連続因子の一種であるといえる。ただし本導出では、片側の不連続因子が 1.0 であることを仮定しているため、中性子流補正係数と不連続因子は完全に等価ではない。

2.4.2 計算手順

本項では、CMFD 加速法の計算手順を述べる。CMFD 加速法は、詳細計算の内部反復（固定源計算）および外部反復（固有値計算）のいずれにも適用可能である。ここでは例として、固有値計算における MOC に対する CMFD 加速法の計算フローを図 2.4.2 に示す。図 2.4.2 を概念図として表したのが、図 2.3.1 である。なお、計算コードによっては CMFD 加速計算が詳細計算の外部反復収束判定前もしくは内部反復前に行われる場合もあるが、収束性に大きな差はないことが経験的に知られている。本論文で用いる GENESIS コードや自作 MOC コードでは、アルゴリズムの簡素化を目的として MOC 外部反復収束判定後に CMFD 加速計算を実行している。

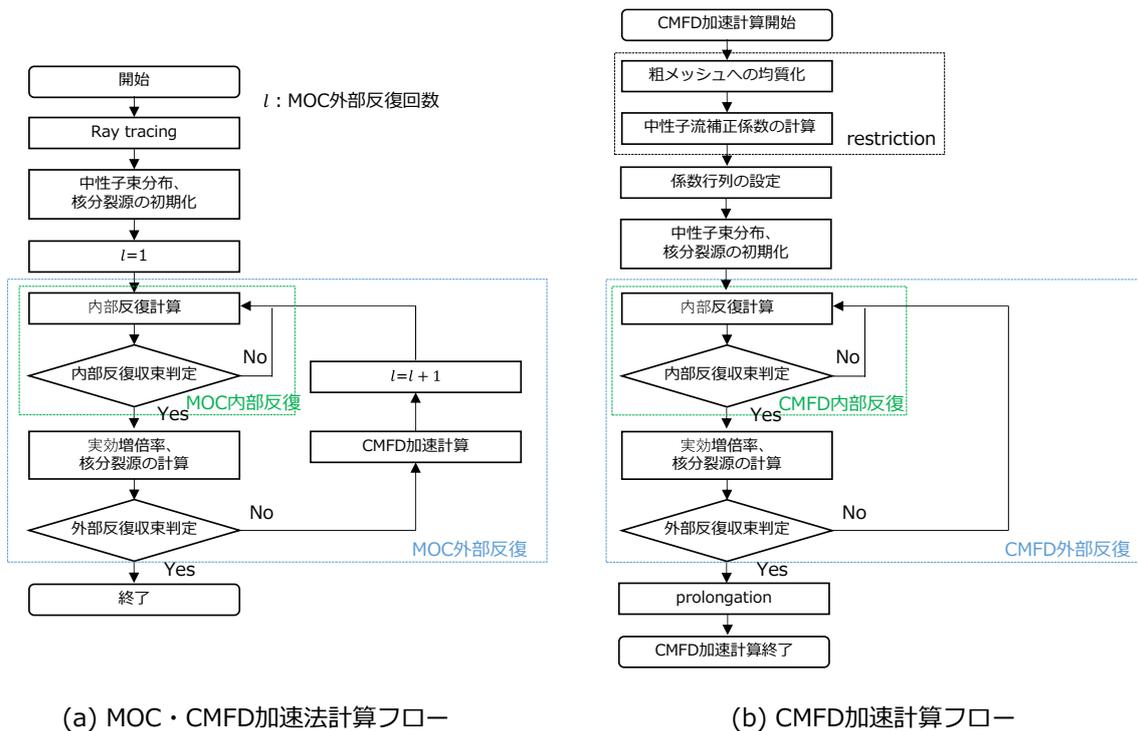


図 2.4.2 MOC および CMFD 加速法の計算フロー

2.4.3 CMFD 加速法の収束性

CMFD 加速法の収束性は、多くの数値計算や線形化フーリエ解析によって評価されてきた[33]-[41]。その結果、CMFD 加速法の収束性は多くのパラメータに依存することが分かっている。その中でも特に、CMFD 加速計算で用いる粗メッシュ光学距離 τ 、散乱比 c および均質化領域数 p に大きく依存することが分かっている。ここで光学距離および散乱比は以下の式で表される

$$\tau_i = \Sigma_{t_i} \Delta x_i \tag{2.4.29}$$

$$c = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tr}} \tag{2.4.30}$$

また p は空間均質化において均質化領域あたりに均質化される詳細空間領域数である。これらの値や他のパラメータの値によって CMFD 加速法の収束性は大きく変化する。

ここでは、CMFD 加速法の収束性の例として、領域毎の平坦中性子分布を仮定する step characteristics 法を用いる S64 (Gauss-Legendre 分点) に対する CMFD 加速法の収束性を示す。非線形収束加速法の収束性評価方法については 2.6 節で詳しく述べる。

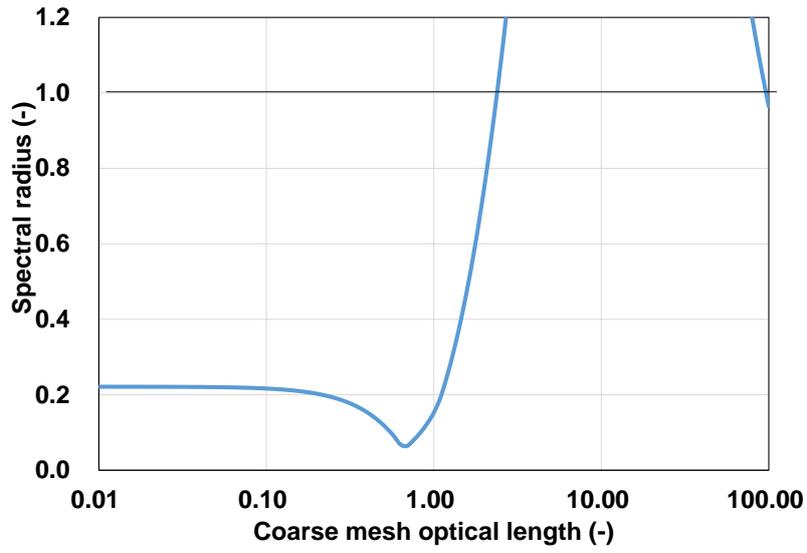
MOC に対する CMFD 加速法の散乱比、光学距離とスペクトル半径 (収束率) の関係を図 2.4.3 に示す。図 2.4.3 では、散乱比 $c = 0.99$ に固定し、均質化領域数 p および光学距離 τ を変化したときのスペクトル半径を示している。本計算条件は、実機軽水炉解析において CMFD

加速法がとりうる収束性を網羅している。スペクトル半径は 1 反復当たりの中性子束残差の低減率を表している。1 未満であれば反復毎に残差が低減されるため計算は収束し、1 を超えると反復毎に残差が増倍されるため計算は収束しない。

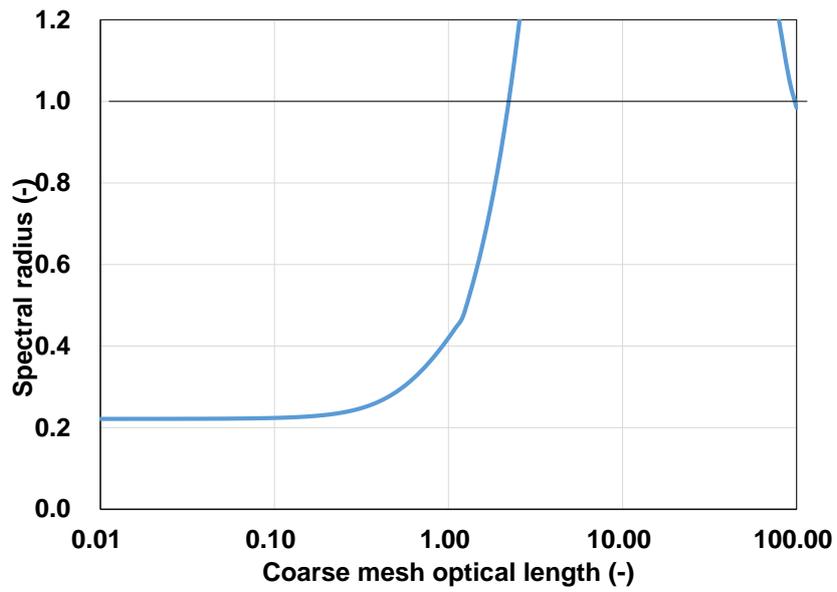
図 2.4.3 より、散乱比 c が 1 に近い場合、光学距離が 1 未満であればスペクトル半径は小さく、少ない反復回数で収束することが分かる。対して、光学距離が 1 を超えるとスペクトル半径は急増し 1 を超えるようになり計算が収束しなくなる。この収束性は均質化領域数 $p = 1, 4$ のいずれの条件でも現れる。従って、散乱比が 1 に近い場合、空間均質化の有無によらず光学距離が 1 を超えると CMFD 加速法は収束しなくなる。

また、CMFD 加速法の収束性の散乱比依存性を確認するため、 $p = 4$ において散乱比と光学距離を変えてスペクトル半径を評価した結果を図 2.4.4 に示す。図 2.4.4 では横軸に光学距離、縦軸に散乱比をとってカラーマップにより各点のスペクトル半径を表している。本評価では計算体系サイズおよび巨視的断面積の値を固定して、数値計算による収束性評価を実施したため、光学距離が離散的となっている。図 2.4.4 より、散乱比が 0.9 以下では光学距離に依らずスペクトル半径は 1.0 未満となり計算は収束するが、散乱比 0.9 以上となると図 2.4.3 と同様の収束性を示す。さらに散乱比が 1.0 に近づくほど、スペクトル半径が 1.0 以上となる光学距離領域が増大する。本図より、CMFD 加速法の収束性は散乱比の値にも大きく関係していることが分かる。

一般的な炉心計算では軽水領域が存在するため散乱比は 0.99 以上の値をとり、空間均質化もピンセルもしくは集合体単位で行うため、光学距離が 1 以上かつ $p > 1$ となる。そのため炉心計算において収束性向上手法を適用しない CMFD 加速法は収束しない場合が多い。従って、CMFD 加速法が利用されるほとんどの場合で、2.5 節に示す収束性向上手法が利用される。



(a) $c = 0.99, p = 1$ における CMFD 加速法の光学距離とスペクトル半径の関係



(b) $c = 0.99, p = 4$ における CMFD 加速法の光学距離とスペクトル半径の関係

図 2.4.3 $c = 0.99$ の CMFD 加速法における p と光学距離およびスペクトル半径の関係

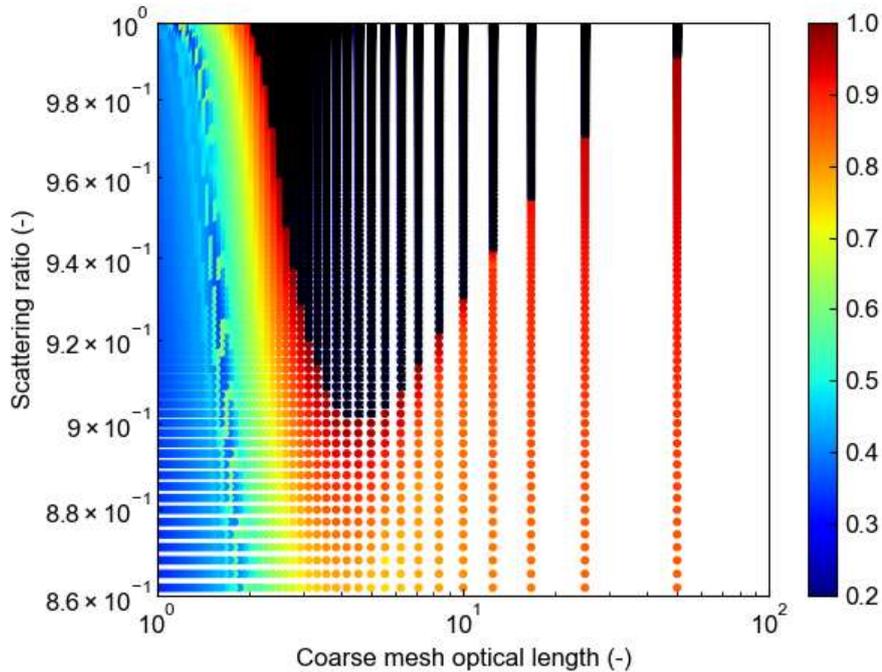


図 2.4.4 $p = 4$ のCMFD 加速法における散乱比と光学距離およびスペクトル半径の関係

2.5 CMFD 加速法における収束性向上手法

2.5.1 収束性向上手法の分類

本項では CMFD 加速法における収束性向上手法の概要を述べる。2.4.3 項に示すとおり、CMFD 加速法では、散乱比が 1 に近く均質化領域の光学距離が大きく場合に収束率（スペクトル半径）が 1 を超えて、計算が収束しないことが知られている。そこで、CMFD 加速法の収束性を向上させる手法が多く提案されている。これら手法は、計算手順（計算コード）を大幅に変更することなく収束性を向上できるため、多くの CMFD 加速法実装コードで利用されている。

参考文献[41]では、現在までに提案されている収束性向上手法は以下の 4 種類に分類できると書かれている。各分類とその詳細について述べる。

1. 各種パラメータに対して緩和係数を用いた後退加速（ダンピング） [42]

CMFD 加速法では、CMFD 加速計算の毎に均質化核定数や中性子流補正係数を求める。このとき計算されるパラメータは、詳細計算収束時の値ではなく、反復途中の値である。従って詳細計算の反復によりこれらパラメータの値は、大きく変動する可能性がある。このとき変動幅が大きすぎると、収束値から大きく離れた値となり数値的不安定性の原因になりうる。そこで、パラメータに対して後退加速（ダンピング）を行うことで、数値的安定性を向上する。後退加速は緩和係数 w を用いて下式のとおり実行される。

$$\tilde{D}^{\ell+1} = w\tilde{D}^{\ell+1/2} + (1-w)\tilde{D}^{\ell}. \quad (2.5.1)$$

ここで、 $\tilde{D}^{\ell+1}, \tilde{D}^{\ell}$ は詳細計算の外部反復 $\ell + 1$ および ℓ 回後の CMFD 加速法で用いる中性子流補正係数、 $\tilde{D}^{\ell+1/2}$ は詳細計算の外部反復 $\ell + 1$ 回後に計算される中性子流補正係数である。緩和係数 w は $[0.0, 1.0]$ の定義域で任意に設定される。

2. CMFD 加速計算の実行頻度低減

2.4 節では、詳細計算のすべての外部反復後に CMFD 加速法を適用する場合について説明した。しかし計算体系や条件によっては、詳細計算の内部反復 1 回目後に CMFD 加速を適用すると計算が収束しない場合がある。これは、収束値と大きく離れた詳細計算の反復途中解から、均質化パラメータが計算され、CMFD 加速計算が詳細計算の収束解をうまく推定できないためである。

CMFD 加速法の計算理論上、CMFD 加速計算は任意の外部反復後に適用可能である。そのため、CMFD 加速計算の実行頻度を内部反復毎ではなく、内部反復 2 回後に 1 回などと低減することで数値的不安定性が解消される。また、高 level CMFD 加速計算の実行頻度を減らすことなども、収束安定性向上に繋がる。

3. CMFD 加速計算で用いる拡散係数の補正

CMFD 加速計算は拡散計算に基づく加速計算手法を用いている。そのため、中性子流差分式において拡散係数を用いる。多くの収束性解析により、CMFD 加速計算で用いる拡散係数を補正する（新たな定義の拡散係数を用いる）ことで、収束性が向上することが知られている。そこで、CMFD 加速計算では、一般的な拡散係数ではなく、CMFD 加速計算専用の拡散係数を用いることで収束性を向上できる。本手法は、CMFD 加速計算コードをほとんど修正することなく実装できるため、多くの計算コードで活用されている。拡散係数の具体的な定義については 2.5.4 項に示す。

4. Prolongation における後退加速および線形内挿

CMFD 加速計算が収束したら prolongation を行い、詳細計算の中性子束を更新する。このとき、CMFD 加速計算の解によっては、更新することで収束値から離れる場合がある。このように prolongation による中性子束更新量が振動する場合は、後退加速を行うことで収束性を向上できる。後退加速は中性子流補正係数の場合と同様に、緩和係数 w を用いて

$$\phi^{\ell+1} = w\phi^{\ell+1/2} + (1-w)\phi^{\ell}. \quad (2.5.2)$$

ここで、 $\phi^{\ell+1}, \phi^{\ell}$ は詳細計算の外部反復 $\ell + 1$ および ℓ 回後の詳細計算における全中性子束、 $\phi^{\ell+1/2}$ は詳細計算の外部反復 $\ell + 1$ 回後の CMFD 加速計算で更新された詳細計算における全中性子束である。緩和係数 w は $[0.0, 1.0]$ の定義域で任意に設定される。

以上が代表的な収束性向上手法の分類である。さらに収束性向上手法の中でも、特に代表的な手法を次項以降で述べる。

2.5.2 Partial current-based CMFD (pCMFD) 加速法

本項では pCMFD 加速法の理論について述べる[43]。p-CMFD 加速法では、中性子流補正係数を用いて部分中性子流および正味中性子流を保存する。これにより、CMFD 加速法よりも収束性を向上することができる。pCMFD 加速法は、CMFD 加速法とは中性子流差分式の形式のみが異なる。

p-CMFD 加速法における中性子流差分式を導出する。ここで、粗メッシュ i および $i+1$ から成る一次元二領域問題を考える。このとき粗メッシュ i から $i+1$ に流入する部分中性子流 $J_{i+1/2,x+}$ は下式のとおり表される。

$$J_{i+1/2,x+} = -\frac{\tilde{D}_{i+1/2}}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) + \hat{D}_{i+1/2,x+}\phi_i, \quad (2.5.3)$$

ここで、 $i+1/2$ はメッシュ境界、 $x+$ は x 軸正方向、 \tilde{D} は有限差分近似において拡散係数から成る結合係数、 \hat{D} は部分中性子流補正係数をそれぞれ表す。同様に、粗メッシュ $i+1$ から i に流入する部分中性子流 $J_{i+1/2,x-}$ は下式のとおりである。

$$J_{i+1/2,x-} = \frac{\tilde{D}_{i+1/2}}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) + \hat{D}_{i+1/2,x-}\phi_{i+1}, \quad (2.5.4)$$

ここで $x-$ は x 軸負方向を表す。部分中性子流補正係数 $\hat{D}_{i+1/2,x+}$, $\hat{D}_{i+1/2,x-}$ の値は、詳細計算の部分中性子流を保存するように、下式から求められる。

$$\hat{D}_{i+1/2,x+} = \frac{\left(J_{i+1/2,x+}^{fine} + \frac{\tilde{D}_{i+1/2}}{2}(\phi_{i+1}^{fine} - \phi_i^{fine}) \right)}{\phi_i^{fine}}, \quad (2.5.5)$$

$$\hat{D}_{i+1/2,x-} = \frac{\left(J_{i+1/2,x-}^{fine} - \frac{\tilde{D}_{i+1/2}}{2}(\phi_{i+1}^{fine} - \phi_i^{fine}) \right)}{\phi_{i+1}^{fine}}, \quad (2.5.6)$$

ここで上付き文字 *fine* は詳細計算から求めた値であることを表している。そこで、正味中性子流 $J_{i+1/2}$ は部分中性子流を用いて、下式のとおり書き表すことができる。

$$\begin{aligned} J_{i+1/2} &= J_{i+1/2,x+} - J_{i+1/2,x-} \\ &= -\tilde{D}_{i+1/2}(\phi_{i+1} - \phi_i) + (\hat{D}_{i+1/2,x+}\phi_i - \hat{D}_{i+1/2,x-}\phi_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

以上が pCMFD 加速法における中性子流差分式である。従って、pCMFD 加速計算では式 (2.5.7) で記述される差分式を用いて、中性子バランス方程式を解けばよい。導出過程から分かるとおり、pCMFD 加速法では、1 境界あたり中性子流補正係数を 2 つ計算する。これにより、正味中性子流だけでなく部分中性子流も保存でき、収束性が向上する。

既存 CMFD 加速法コードから中性子流補正係数の計算および中性子流差分式を変更すれ

ば pCMFD 加速法を実装できる。そのため CMFD 加速法から一部コード修正を行うことで pCMFD 加速法を実行できる。ただし既存の輸送計算コードで pCMFD 加速法を直接実装することは少なく、pCMFD 加速法の収束性と等価になるよう補正された拡散係数を CMFD 加速法で用いることが多い。本内容については 2.5.4 項で後述する。

2.5.3 Linear prolongation CMFD (lpCMFD) 加速法

本項では lpCMFD 加速法の計算理論について説明する[44]。lpCMFD 加速法では、prolongation による中性子束更新時に、線形補間を用いる手法である。中性子流補正項の定義や加速計算方法自体は CMFD 加速法と同様である。

以下で二次元平板体系における lpCMFD 加速法による prolongation 方法を示す。lpCMFD 加速法では下式に従って、prolongation を行う。

$$\phi_{g',k}^{after} = \phi_{g',k}^{before} + \delta\phi_{g,k}, \quad (2.5.8)$$

ここで $\delta\phi_k$ は均質化領域境界における中性子束 $\delta\phi_{BC,i}$ から内挿される値である。領域境界における中性子束 $\delta\phi_{BC,i}$ は、4 点ある頂点 (図 2.5.1 の白丸) に対して式(2.5.9)で定義される。

$$\delta\phi_{BC,i} = \begin{cases} \delta\phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} (\phi_{i-1,j-1} - \bar{\phi}_{k\in i-1,j-1}) + (\phi_{i,j-1} - \bar{\phi}_{k\in i,j-1}) \\ + (\phi_{i-1,j} - \bar{\phi}_{k\in i-1,j}) + (\phi_{i,j} - \bar{\phi}_{k\in i,j}) \end{array} \right) \\ \delta\phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} (\phi_{i,j-1} - \bar{\phi}_{k\in i,j-1}) + (\phi_{i+1,j-1} - \bar{\phi}_{k\in i+1,j-1}) \\ + (\phi_{i,j} - \bar{\phi}_{k\in i,j}) + (\phi_{i+1,j} - \bar{\phi}_{k\in i+1,j}) \end{array} \right) \\ \delta\phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} (\phi_{i-1,j} - \bar{\phi}_{k\in i-1,j}) + (\phi_{i,j} - \bar{\phi}_{k\in i,j}) \\ + (\phi_{i-1,j+1} - \bar{\phi}_{k\in i-1,j+1}) + (\phi_{i,j+1} - \bar{\phi}_{k\in i,j+1}) \end{array} \right) \\ \delta\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} (\phi_{i,j} - \bar{\phi}_{k\in i,j}) + (\phi_{i+1,j} - \bar{\phi}_{k\in i+1,j}) \\ + (\phi_{i,j+1} - \bar{\phi}_{k\in i,j+1}) + (\phi_{i+1,j+1} - \bar{\phi}_{k\in i+1,j+1}) \end{array} \right) \end{cases}, \quad (2.5.9)$$

ここで $\phi_{i\pm a, j\pm b}$ ($a, b = 0, 1$, 順不同) は CMFD 加速計算後の均質化領域 ($i \pm a, j \pm b$) 平均中性子束、 $\bar{\phi}_{k\in i,j}$ は CMFD 加速計算前の均質化領域 (i, j) の平均中性子束である。 i, j は x, y 軸の領域インデックスを表す。

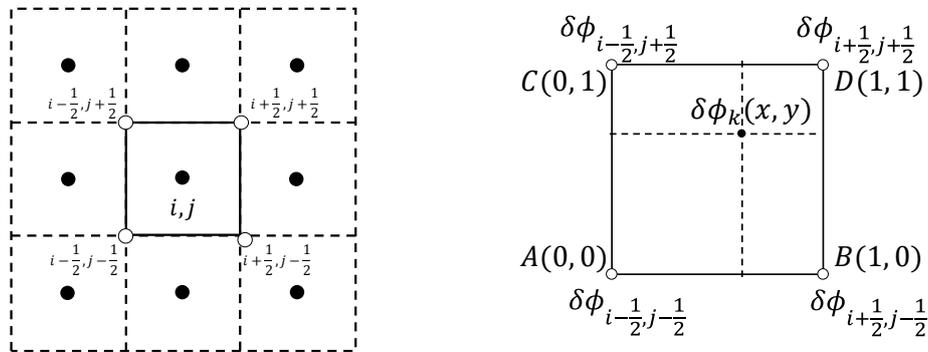


図 2.5.1 二次元均質化領域のインデックスおよび座標

式(2.5.9)で計算される $\delta\phi_{BC,i}$ をそれぞれ用いることで、 $\delta\phi_k$ は式(2.5.10)の通り計算される。ここで均質化領域内座標は A を原点とし、均質化領域幅は 1 に規格化している。よって $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ である。

$$\begin{aligned} \delta\phi_k(x, y) = & (1-x)(1-y)\delta\phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + x(1-y)\delta\phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \\ & + (1-y)y\delta\phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + xy\delta\phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

式(2.5.10)から計算される $\delta\phi_k$ を用いて、式(2.5.8)から prolongation を行う。一次元および三次元体系でも同様の考えで線形補間による prolongation を実行できる。以上が lpCMFD 加速法の計算理論である。

本手法は、均質化領域内の全中性子束分布の更新量を、周囲の均質化領域平均全中性子束の線形内挿によって補間する。これにより、均質化領域内中性子束分布を平坦ではなく線形と仮定するため、空間均質化誤差を低減でき、収束性が向上する。ただし均質化領域内中性子束分布形状が急峻な場合は、適切な仮定とならず十分な収束性向上は期待できない。

2.5.4 収束性向上を目的として提案された拡散係数

本項では CMFD 加速法の収束性向上を目的として提案された拡散係数の定義について述べる。CMFD 加速法の収束性は、従来の拡散係数を補正することで向上することが知られている。拡散係数の補正方法には様々な手法が提案されている。本項ではその中でも特に利用される拡散係数について述べる。

● Artificial grid diffusion coefficient (AGD)

AGD とは、従来の拡散係数に均質化領域の定数倍の値を加算した拡散係数である[35]。AGD の定義を式(2.5.11)に示す。

$$D_i^{AGD} = D_i^{conv} + \alpha\Delta_i \quad (2.5.11)$$

ここで、 D_i^{AGD} は AGD、 D_i^{conv} は従来の拡散係数 ($= 1/3\Sigma_{tr}$)、 α は補正係数、 Δ は均質化領域サイズである。式(2.5.11)のとおり、AGD は従来の拡散係数に補正項を加えることで値を人工的に増大させている。 α の値は任意の値を入力値として与える必要があるが、0.15–0.25 のとき収束性が向上することが確認されている。

また、 $\alpha = 0.25$ のとき、AGD を用いた CMFD 加速法は、pCMFD 加速法と等価な収束性を示すことが線形化フーリエ解析および数値計算によって示されている[35]。そのため、 α の値を明示せず AGD を用いる場合は $\alpha = 0.25$ が設定されることが一般的である。なお、 $\alpha = 0.25$ における AGD と pCMFD の等価性については、Appendix A で述べる。

- **Effective diffusion coefficient (EffD)**

Deff は、ダイヤモンド差分を用いる Sn 輸送方程式から得られる全中性子束分布のうち、空間について 2 次多項式分布までを拡散方程式で再現する場合に定義される拡散係数である [45]。EffD は実効的な拡散係数とも呼ばれる。EffD の定義を以下に示す。

$$D_i^{Eff} = D_i^{Conv} + \Delta_{i,k} \rho_{i,x} / 2, \quad (2.5.12)$$

ここで、

$$\rho_{i,x} = \frac{\sum_{p=0} \cos \theta_p \omega_p \alpha_{i,x,p}}{\sum_{p=0} \omega_p}, \quad (2.5.13)$$

$$\alpha_{i,x,p} = \frac{1 + e^{-\gamma_{i,x,p}}}{1 - e^{-\gamma_{i,x,p}}} - \frac{2}{\gamma_{i,x,p}}, \quad (2.5.14)$$

$$\gamma_{i,x,p} = \frac{\Delta_{i,k}}{3D_i^{Conv} \cos \theta_p}, \quad (2.5.15)$$

ここで、 p は詳細計算における角度インデックス、 ω_p は方向 p における重み、 θ_p は x 軸からの角度である。

- **Transport consistent diffusion coefficient (TCD)**

TCD は、even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式に基づいて解析的に求まる正味中性子流を再現するように定義された拡散係数である [40]。TCD では、ポイド領域に対して有限の拡散係数を与えるために、ポイド領域を含む体系において、加速計算の収束安定性が向上する可能性がある。TCD の定義式を以下に示す。角度に関する積分はガウス求積法を用いて数値的に計算される。

$$\begin{aligned} D_i^{TCD} &= \frac{1}{\Sigma_{ti}} \frac{\tau_i^2 \int_{-1}^{+1} \mu \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu}\right) d\mu}{4\tau_i - 2 \int_{-1}^{+1} \mu \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu}\right) d\mu} \\ &\approx \frac{1}{\Sigma_{ti}} \frac{\tau_i^2 \sum_p w_p \mu_p \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu_p}\right)}{4\tau_i - 2 \sum_p w_p \mu_p \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu_p}\right)} \\ &= 3D_i^{Conv} \frac{\tau_i^2 \sum_p w_p \mu_p \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu_p}\right)}{4\tau_i - 2 \sum_p w_p \mu_p \tanh\left(\frac{\tau_i}{\mu_p}\right)}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

ここで μ_p は角度 p における方向余弦、 τ は光学距離をそれぞれ表す。

- **optimally diffusive coarse mesh finite difference (odCMFD)**

odCMFD は、AGD における補正係数 a を、線形化フーリエ解析による収束性解析に基づきスペクトル半径が小さくなるようフィッティングした値を用いる拡散係数である [36]。

odCMFD の定義は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} D_i^{od} &= \frac{1}{3\Sigma_{t,i}} + \theta_{od}\Delta_i \\ &= D_i^{Conv} + \theta_{od}\Delta_i. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

ここで、 θ_{od} はフィッティングパラメータでありいくつかの定義が提案されている。現在は、参考文献[41]で提案された値が最も収束性が良いとされている。このとき θ_{od} は 7 次多項式で表されその値は以下のとおりである[41]。

$$\theta_{od} = \begin{cases} 0, & \tau < 1.0 \\ \sum_{j=0}^6 \alpha_j (\tau_i)^j, & 1.0 \leq \tau \leq 12.1, \\ 0.145, & 12.1 \leq \tau \end{cases} \quad (2.5.18)$$

ここで α_j はj次の展開係数であり各値は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -4.96426444 \times 10^{-2}, \\ \alpha_1 &= 8.31678059 \times 10^{-2}, \\ \alpha_2 &= -1.92235257 \times 10^{-2}, \\ \alpha_3 &= 2.64444518 \times 10^{-3}, \\ \alpha_4 &= -2.10979559 \times 10^{-4}, \\ \alpha_5 &= 8.95901428 \times 10^{-6}, \\ \alpha_6 &= -1.56116397 \times 10^{-7}. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

以上が、CMFD 加速法で用いられる代表的な拡散係数である。

以下に拡散係数の光学距離依存性を示す。図 2.5.2 に各拡散係数の光学距離依存性を図示した。図 2.5.2, (a)は $0 \leq \tau \leq 5$ の範囲、(b)は $1 \leq \tau \leq 100$ の範囲で図示している。ここで AGD における補正係数 $\alpha = 0.25$ としている。また拡散係数を無次元化するため、縦軸は $D\Sigma_t$ を示している ($\Sigma_t = 1.0$)。図より、光学距離が小さい ($0 \leq \tau \leq 5$) 場合は、各拡散係数の値は大きく異なる。しかし光学距離が大きくなり 10 以上となると、いずれの拡散係数も光学距離に対して一定の傾きを有する。光学距離が十分大きいときの各拡散係数の漸近値は以下のとおりである。このような拡散係数の光学距離依存性が、CMFD 加速法の収束性を決定づける要素の1つとなっている。

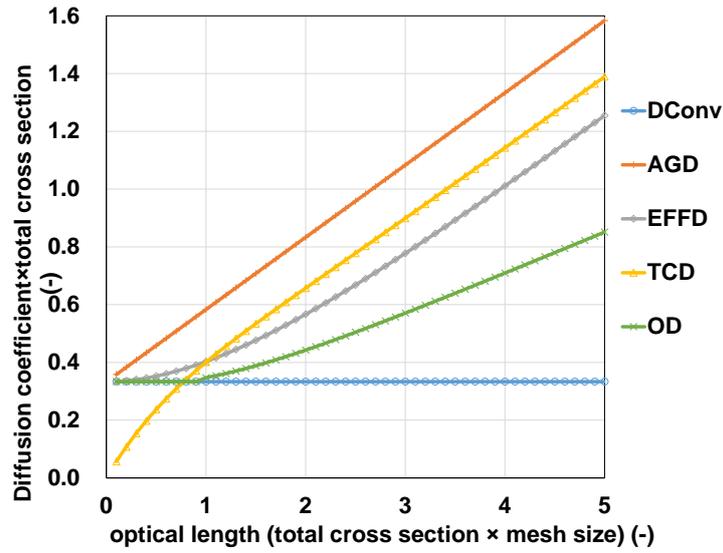
$$D^{Conv} = \frac{1}{3\Sigma_t} \quad (2.5.20)$$

$$D^{AGD} \approx \alpha \frac{\tau}{\Sigma_t} \quad (\alpha = 0.25 \text{ なら } \frac{\tau}{4\Sigma_t}) \quad (2.5.21)$$

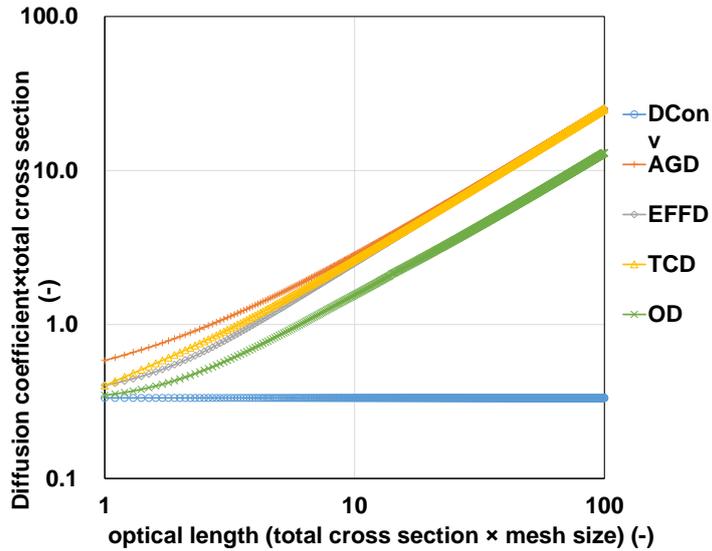
$$D^{Eff} \approx \frac{1}{4\Sigma_t} \left(\tau - \frac{4}{3} \right) \quad (2.5.22)$$

$$D^{TCD} \approx \frac{1}{4\Sigma_t} \left(\tau + \frac{1}{2} \right) \quad (2.5.23)$$

$$D^{od} \approx 0.145\Delta = 0.58 \frac{\tau}{4\Sigma_t} \quad (2.5.24)$$



(a) $0 \leq \tau \leq 5$ における拡散係数の光学距離依存性

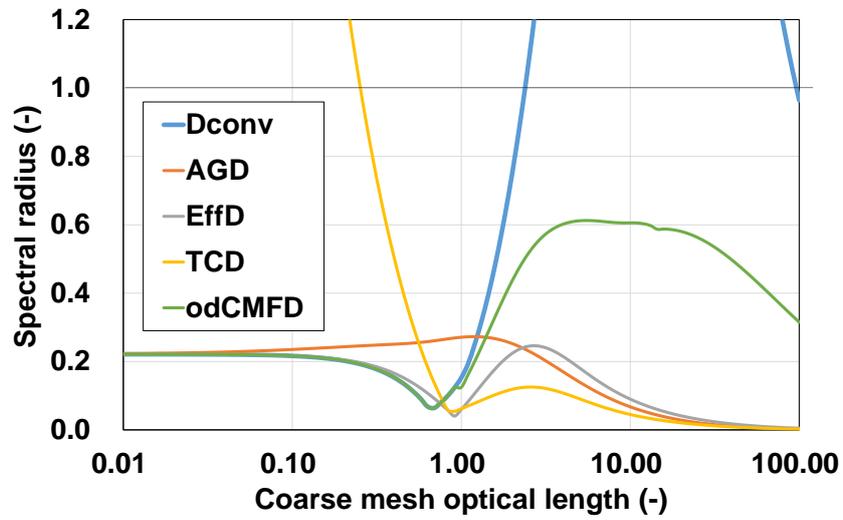


(b) $1 \leq \tau \leq 100$ における拡散係数の光学距離依存性

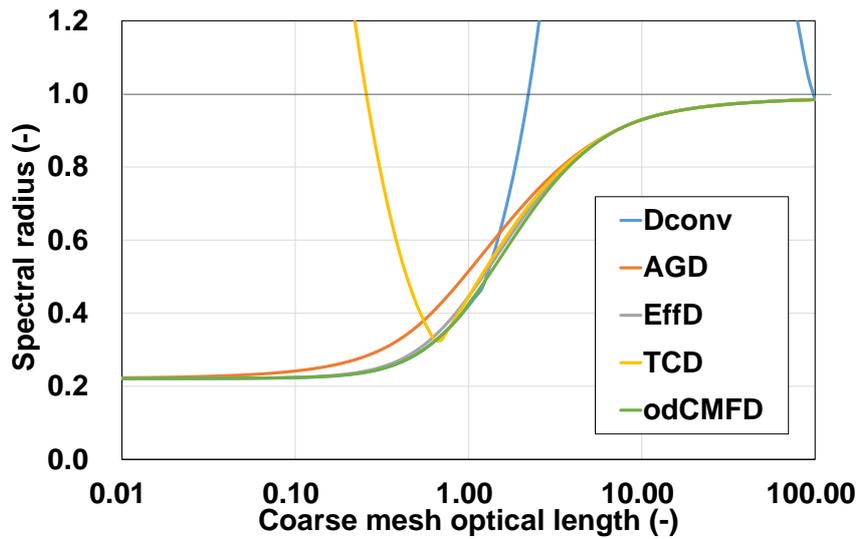
図 2.5.2 拡散係数の光学距離依存性

最後に、これら拡散係数を用いた場合の線形化フーリエ解析による CMFD 加速法の収束性評価結果を図 2.5.3 に示す。計算条件は 2.4.3 項の図 2.4.3 と同様である。AGD では $\alpha = 0.25$ としている。本解析では、散乱比 c は 0.99 に固定し、均質化領域数 $p = 1, 4$ のそれぞれで収束性を評価した。

図 2.4.3 より、 $p = 1, 4$ において AGD、EffD および odCMFD はいずれの光学距離でもスペクトル半径が 1.0 未満となり、安定して収束することが分かる。これらは、従来の拡散係数 D_{conv} と比べると収束性が向上している。 $p = 1$ において光学距離が 1 以上の場合に odCMFD のスペクトル半径が 0.6 程度まで増加しているが、これは odCMFD の展開係数をフィッティングする際に $p = 1$ の結果を用いていないためであると推測する。 $p = 4$ では、いずれの拡散係数で収束性に大きな差は確認されない。また TCD は光学距離が 1 以上の場合には安定して収束するが、1 未満の場合は光学距離が小さくなるほどスペクトル半径は増大し収束性が悪化している。従って CMFD 加速法の収束性向上には、 p の値に依らず幅広い光学距離において安定して収束する AGD もしくは EffD を用いるのがよいと推測される。



(a) $c = 0.99, p = 1$ における各拡散係数を用いた CMFD 加速法の収束性



(b) $c = 0.99, p = 4$ における各拡散係数を用いた CMFD 加速法の収束性
 図 2.5.3 各拡散係数を用いた CMFD 加速法の線形化フーリエ解析結果

2.6 非線形収束加速法の収束性評価方法

本節では、非線形収束加速法の収束性評価方法について述べる。収束性評価方法には解析的な方法（線形化フーリエ解析）と数値的な方法がある。次項ではそれぞれの方法について述べる。

2.6.1 解析的な収束性評価手法（線形化フーリエ解析）

本項では、非線形収束加速法の解析的な収束性評価手法である線形化フーリエ解析について述べる。非線形収束加速法は、1反復当たりの演算を行列形式で表示することが困難であり、収束率を解析的に評価することは困難である。しかし、簡易体系において線形化などいくつかの仮定を置くことで、非線形収束加速法の解析的な収束性を評価することができる。この方法を線形化フーリエ解析と呼ぶ。

以下に線形化フーリエ解析の概要を示す。エネルギー1群1次元無限均質平板体系において固定中性子源が与えられている場合、中性子輸送方程式の解析解を求めることができる。線形化フーリエ解析では、解析解近傍で解析解と収束途中の解の差異を誤差関数を用いて展開することにより、中性子束の差異を線形近似する。これにより、非線形性が線形化され1反復当たりの演算を行列形式で記述することが可能となる。さらに誤差関数をフーリエ級数展開し、展開係数を固有値方程式の形式（線形反復法の一般式）に変形する。この固有値方程式から解析的な収束率を求めることができる。以上が線形化フーリエ解析の概要である。

ここで、線形化フーリエ解析の解析手順と解析結果の例を示す。具体的に、CMFD加速法などに適用する場合の仮定や導出は複雑なため Appendix A に記述する。本項では具体的な式変形は行わず、導出の概要と固有値方程式を示す。線形化フーリエ解析では以下の仮定を明示的に置く。なお、実際に非線形収束加速法に適用する場合は、詳細計算手法および加速計算手法に関する仮定も考える必要がある。

- 1次元均質平板体系
- 固定源計算、等方散乱源
- エネルギー1群
- 周期境界条件（1次元均質平板では完全反射境界条件に相当）

線形化フーリエ解析の解析手順は大きく分けて以下の5stepである。なお本解析手順は参考文献[40]の補足資料に基づいている。

step 1) 基礎方程式の列挙

解析対象となる計算手法で用いる基礎方程式を列挙する。基本的には、詳細計算で用いる輸送方程式、非線形加速法で用いる輸送方程式、restrictionの式、prolongationの式がそれぞれ必要となる。

step 2) 誤差関数を用いて中性子束を線形近似および線形化

エネルギー1群1次元均質平板体系では、固定源 q 中および巨視的吸収断面積を用いて、中性子束の解析解を q/Σ_a と計算できる。そこで、全中性子束 ϕ および角度中性子束 ψ を解析解近傍で、誤差関数 ζ, ξ を用いて線形近似する。

$$\phi^l = \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta^l), \quad (2.6.1)$$

$$\psi^{l+1/2} = \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \xi^{l+1/2}), \quad (2.6.2)$$

ここで q は固定源、 l は反復回数を、 $l + 1/2$ は詳細計算 l 回後（加速計算前）を、 ε は微小量を表す。この線形近似をすべての基礎方程式に適用し、誤差関数 ζ, ξ について整理する。このとき、 $\varepsilon^2 \approx 0$ と近似することで、各方程式を線形化する。

step 3) 誤差関数をフーリエ級数展開および

誤差関数 ζ, ξ をフーリエ級数展開する。下式では、ある波数 λ についてのみ記述する。

$$\zeta^l = \omega^l A \exp(j\lambda x), \quad (2.6.3)$$

$$\xi^{l+1/2} = \omega^l a \exp(j\lambda x), \quad (2.6.4)$$

ここで、 ω は複素振幅率、 A, a は展開係数、 j は虚数単位、 λ は波数をそれぞれ表している。フーリエ級数展開をすべての方程式に適用し、展開係数の関係式を得る。

step 4) 固有値方程式の導出

展開係数の関係式を整理すると、誤差関数の展開係数を固有ベクトル、複素振幅率を固有値とした固有値方程式が得られる。この固有値方程式が、非線形収束加速法を適用した中性子輸送計算の1反復当たりの演算に対応する。

$$\omega \vec{A} = \mathbf{M} \vec{A}, \quad (2.6.5)$$

ここで、 \vec{A} は展開係数ベクトル、 \mathbf{M} は反復行列である。MOCに対するCMFD加速法では、反復行列 \mathbf{M} は式(2.6.6)のとおり表される。

$$\mathbf{M} = -\theta \mathbf{W} + (\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}) \mathbf{H}, \quad (2.6.6)$$

ここで、 \mathbf{W} は空間均質化演算子に対応する行列、 \mathbf{H} は詳細計算演算子に対応する行列、 \mathbf{I} は単位行列、 θ はCMFD加速計算およびprolongation演算子に対応するスカラー値である。各行列は正方行列であり、行数および列数は均質化領域数 p に対応する。

step 5) スペクトル半径（収束率）の計算

式(2.6.5)のとおり得られた固有値方程式から、固有値および固有ベクトルを計算する。こ

のとき非線形収束加速法の収束率は、固有値方程式におけるスペクトル半径に相当する。このときスペクトル半径 ρ は下式のとおり計算される。スペクトル半径は直接法などを用いて、解析的に計算される。

$$\rho = \max_{\lambda} \left(\max \left(\text{abs}(\text{eig}(\mathbf{M})) \right) \right) \quad (2.6.7)$$

ここで、 $\text{eig}(\)$ は固有値を求める演算子、 $\text{abs}(\)$ は絶対値を求める演算子である。式(2.6.7)は、反復行列 \mathbf{M} の固有値の絶対値の最大値について λ の取りうる範囲での最大値がスペクトル半径であることを示している。なお、 λ は定義上いかなる正の実数を取りうるが、式(2.6.3)および(2.6.4)から分かるとおり周期性を有している。

以上の解析手順により、非線形収束加速法の収束性を解析的に評価可能である。具体的な導出過程や固有値方程式における各行列の要素などは、Appendix A に記載する。

線形化フーリエ解析で得られるスペクトル半径は、2.6.2 項で説明する数値的な収束性評価手法から求めるスペクトル半径と概ね一致する。線形化フーリエ解析ではスペクトル半径を求めるだけでなく、非線形収束加速法の収束性がどのようなパラメータに依存しているかを、固有値方程式に基づいて評価することができる。すなわち実際に輸送計算を実行しなくとも、収束率に対する各パラメータの感度解析を行うことができる。また、2.5.4 項で示した拡散係数も線形化フーリエ解析に基づいて導出されており、収束性向上手法が開発する上で非常に重要な役割を有している。

線形化フーリエ解析は非線形収束加速法の収束性を解析的に評価することができるが、多くの仮定を置く必要がある。そのため、実機軽水炉のような多群多次元非均質体系の収束性を求めることはできない。また、本解析では中性子束の反復に関する収束性しか評価できず、均質化パラメータなど他パラメータの収束性を評価することはできない。しかし、本手法により、新たに提案される非線形収束加速法および収束性向上手法の妥当性を確認および検証することができる。

2.6.2 数値的な収束性評価手法（反復計算に基づく方法）

本項では数値的な収束性評価手法について述べる。本方法は、実際に非線形収束加速法を適用した中性子輸送計算を実行した結果から、収束率（スペクトル半径）を求める。本方法は、反復計算結果からスペクトル半径を求めることができるため、線形化フーリエ解析では扱えない計算体系や計算条件における収束性も評価可能である。また、収束性評価を行うために新たな仮定を置く必要はない。

以下に数値的なスペクトル半径評価方法を述べる。反復 l 回後の中性子束 ϕ^l を、収束値 ϕ^∞ と収束値との差異 ε で表すと以下のとおりとなる。

$$\phi^l = \phi^\infty + \varepsilon, \quad (2.6.8)$$

このとき、反復を1回行い、中性子束と収束値との差異が ρ 倍に低減されるとすると、反復

$l + 1$ 回後および反復 $l + 2$ 回後の中性子束は下式のとおりそれぞれ表すことができる。

$$\phi^{l+1} = \phi^\infty + \rho\varepsilon, \quad (2.6.9)$$

$$\phi^{l+2} = \phi^\infty + \rho^2\varepsilon, \quad (2.6.10)$$

式(2.6.8)と(2.6.9)、式(2.6.9)と(2.6.10)において辺々差をとると、下式のとおりとなる。

$$\phi^{l+1} - \phi^l = (\rho - 1)\varepsilon, \quad (2.6.11)$$

$$\phi^{l+2} - \phi^{l+1} = \rho(\rho - 1)\varepsilon, \quad (2.6.12)$$

さらに式(2.6.11)および(2.6.12)で辺々割ると、下式のとおりとなる。

$$\frac{\phi^{l+2} - \phi^{l+1}}{\phi^{l+1} - \phi^l} = \frac{\rho(\rho - 1)\varepsilon}{(\rho - 1)\varepsilon} = \rho, \quad (2.6.13)$$

反復間の中性子束差異は負の値も取りうる。また、中性子束は空間領域数およびエネルギー群数に応じたベクトルとなる。そのため一般的には、式(2.6.13)の1次ノルムをスペクトル半径として計算する。

$$\rho^{l+2} = \frac{|\vec{\phi}^{l+2} - \vec{\phi}^{l+1}|}{|\vec{\phi}^{l+1} - \vec{\phi}^l|}, \quad (2.6.14)$$

式(2.6.8)–(2.6.13)から分かるとおり、中性子束が収束するには $|\rho| < 1$ を満たす必要がある。

以上が、数値的な収束性評価手法によるスペクトル半径の計算方法である。本評価方法では、反復3回分の収束パラメータの値を用いてスペクトル半径を評価する。しかし計算コード上で反復3回分の収束パラメータ値を保持する必要はなく、式(2.6.14)の分母および前回反復分の収束パラメータベクトルを保持すれば、次の反復計算で得られる収束パラメータベクトルを用いて、その反復におけるスペクトル半径を評価できる。また式(2.6.14)より、 ρ の値は反復回数によって変化する。一般的には中性子輸送計算が終了した際に最後の反復計算から評価された ρ を、その計算におけるスペクトル半径とする。

本方法では、反復間で収束率 ρ が一定であると仮定している。スペクトル半径が1.0に近い値をとる場合は、反復による誤差の低減率はほとんど一定であり、本仮定は十分妥当である。ただしスペクトル半径が0に近い値をとる場合は、反復数回で計算が終了し丸め誤差が生じるため、正確な値を評価することが難しい。

数値的な収束性評価手法で得られるスペクトル半径は、計算体系および計算条件を揃えれば、2.6.1項で説明した線形化フーリエ解析から求めるスペクトル半径と概ね一致する。また、上記の導出では中性子束に着目して収束率の導出を行ったが、中性子束以外の収束パラメータについても同様にスペクトル半径を評価可能である。本方法はスペクトル半径評価のために新たに仮定を考える必要がない。さらに、計算体系や計算条件に関する制約もないため、線形化フーリエ解析で扱うことができない多群多次元非均質炉心体系における非線形収束加速法の収束性を評価することができる。

2.7 本章のまとめ

決定論的な中性子輸送計算では、反復計算によって収束解を求める。中性子輸送計算の収束性は散乱比やドミナンス比などに依存し、これらの値が 1 に近いほど収束性は悪く多くの反復回数が必要となる。実機炉心体系ではこれらの値が 1 に近く、高精度な解を求めるには収束までに多くの反復回数が必要となり現実的な計算時間での炉心解析が困難となる。そこで、中性子輸送計算の反復回数を低減するために非線形収束加速法が適用される。

非線形収束加速法は、詳細な計算条件での中性子輸送計算（詳細計算）の反復間に、粗く離散化された中性子輸送計算（加速計算）を行い、加速計算の解を用いて詳細計算の収束を加速する。このとき加速計算では、詳細計算の反応率を保存するために中性子流に関する補正項が導入される。非線形収束加速法は、反復毎に中性子流補正係数の値が変わるため、線形収束加速法に比べより効率的に収束を加速できる。また、加速計算自体の収束性を向上させるために、多段階（multi-level）の非線形収束加速を適用することも可能である。非線形収束加速法の適用は、炉心解析の効率化のために必要不可欠である。

本章では代表的な非線形収束加速法として、**coarse mesh finite difference (CMFD)** 加速法の計算理論と収束性について述べた。CMFD 加速法では、詳細計算で求まる正味中性子流と拡散近似から計算される正味中性子流の差異から中性子流補正係数を計算する。CMFD 加速法は、光学距離や散乱比が大きい場合に数値的不安定性が確認される。そこで多くの収束性向上手法が提案されている。特に、拡散係数の補正は既存 CMFD 加速計算コードでも少ない改良量で収束性を大幅に向上できる。

非線形収束加速法の収束性評価方法として解析的な手法である線形化フーリエ解析と数値的な手法について述べた。線形化フーリエ解析では、いくつかの仮定を置くことで収束解を解析解近傍で誤差関数の線形結合に展開し線形化する。そして誤差関数をフーリエ級数展開することで、1 反復演算に対応する反復行列から成る固有値方程式を導出できる。この反復行列の固有値からスペクトル半径を評価できる。線形化フーリエ解析では、スペクトル半径だけでなく、各パラメータの収束性への感度を評価することができる。数値的な評価手法では、反復間の中性子束差異の比からスペクトル半径を計算する。本手法では、線形化フーリエ解析で扱うことができない多群非均質体系でのスペクトル半径を評価することができる。また、中性子束や実効増倍率以外の収束パラメータの収束性も評価可能である。

2.8 参考文献

- [1]. 成田正邦, “ボルツマン方程式の起源”, 第 34 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2002).
- [2]. 伴雄一郎, “空間依存動特性方程式の統一的解法の開発”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2011).
- [3]. 久保田直人, “加速器駆動未臨界炉における動特性計算に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2012).
- [4]. 辻田浩介, “Characteristics 法を用いた動特性計算に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2013).
- [5]. 山本章夫, “Boltzmann 方程式の解法 ～決定論的手法～”, 第 34 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2002).
- [6]. 山本俊弘, “Boltzmann 方程式の解法 -確率論的手法による解法-,” 第 34 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.79-92, 日本原子力学会 (2002).
- [7]. 長家康展, “モンテカルロ計算の基礎理論および実験解析への適用,” 第 38 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.153-188, 日本原子力学会 (2006).
- [8]. 長家康展, “-粒子輸送モンテカルロ計算の基礎原理とそこに潜む不確かさ-,” 第 44 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.65-99, 日本原子力学会 (2012).
- [9]. 長家康展, “Python を利用した核計算(2)統計論手法,” 第 50 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.163-192, 日本原子力学会 (2012).
- [10]. 長屋康展 他, “MVP/GMVP 第 3 版: 連続エネルギー法及び多群法に基づく汎用中性子・光子輸送計算モンテカルロコード,” 日本原子力研究開発機構, 原子力科学研究部門, 原子力基礎工学研究セミナー (2016); <https://jopss.jaea.go.jp/pdfdata/JAEA-Data-Code-2016-019.pdf>. (2022 年 1 月 5 日現在)
- [11]. 小出嵩大, “球状燃料分散体系の核特性計算手法に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2016).
- [12]. 大久保卓哉, “GPU を用いたモンテカルロ計算の高速化に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2016).
- [13]. 林幸司, “モンテカルロ法による固有値計算における統計誤差過少評価に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2017).
- [14]. ピーター・ペジック, *アーベルの証明: 「解けない方程式を解く」*, 日本評論社, ISBN:978-4535784048 (2005).
- [15]. 小林啓祐, 原子炉物理, コロナ社 (1996).
- [16]. 牛尾直史, “Characteristics 法の基礎”, 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2004).
- [17]. 山本章夫, “拡散方程式の数値解法の基礎”, 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会 (2004).

- [18]. 田渕将人, “Characteristics 法に基づいた輸送計算手法の高精度化の検討” 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2006).
- [19]. 多田健一, “高精度 BWR 炉心計算手法に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2008).
- [20]. 加藤祐生, “LEAF 法に基づく三次元中性子輸送計算手法の開発”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文 (2015).
- [21]. 山本章夫, “炉心解析手法講義資料”, 名古屋大学大学院工学研究科山本章夫研究室; <https://www.fermi.energy.nagoya-u.ac.jp/research.html> (2021年12月31日現在) .
- [22]. E. E. LEWIS and W. F. MILLER Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons, New York (1984).
- [23]. K. S. SMITH, “Nodal Method Storage Reduction by Non-Linear Iteration,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **44**, 265 (1984).
- [24]. A. YAMAMOTO, “Generalized Coarse-Mesh Rebalance Method for Acceleration of Neutron Transport Calculations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **151**, 274 (2005); <https://doi.org/10.13182/NSE151-274>.
- [25]. W. L. BRIGGS, et al., *A Multigrid Tutorial Second Edition*, society for industrial and applied mathematics (2000).
- [26]. P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*, R. T. Edwards, Inc. (2004).
- [27]. 杉原正顯, 室田一雄, *線形計算の数理*, 岩波書店, ISBN:978-4-00-007556-5 (2009).
- [28]. A. YAMAMOTO, N. SUGIMURA, and T. USHIO, “Next Generation of Advanced Methods for Light Water Reactor Analysis,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, California, June 5–9, 2005 (2005).
- [29]. A. YAMAMOTO et al., “GENESIS: A Three-Dimensional Heterogeneous Transport Solver Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 1–22 (2017); <https://doi.org/10.1080/00295639.2016.1273002>.
- [30]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Recent Developments in the GENESIS Code Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Eng. Technol.*, **49**, 1143–1156 (2017); <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.06.016>.
- [31]. K. S. SMITH and J. D. RHODES III, “Full-Core, 2-D, LWR Core Calculations with CASMO-4E,” *Proc. PHYSOR 2002*, Seoul, Korea, October 7–10, 2002, 13A-04 (2002) (CD-ROM).
- [32]. J. RHODES. K. SMITH, and D. LEE, “CASMO-5 Development and Applications,” *Proc. PHYSOR 2006*, Vancouver, Canada, September 10–14, 2006 (2006).
- [33]. N. Z. CHO and C. J. PARK, “A Comparison of Coarse Mesh Rebalance (CMR) and Coarse Mesh Finite Difference (CMFD) Acceleration Methods for the Neutron Transport Calculations,” NURAPT-2002-2, Nuclear Reactor Analysis and Particle Transport Laboratory, Korea Advanced Institute of Science and Technology (2003).
- [34]. D. LEE, T. J. DOWNAR, and Y. KIM, “Convergence Analysis of the Nonlinear Coarse-Mesh Finite Difference Method for One-Dimensional Fixed-Source Neutron Diffusion Problem,” *Nucl.*

- Sci. Eng.*, **147**, 127–147 (2004); <https://doi.org/10.13182/NSE03-64>.
- [35]. M. JARRETT et al., “Analysis of Stabilization Techniques for CMFD Acceleration of Neutron Transport Problems,” *Nucl. Sci. Eng.*, **184**, 208–227 (2016); <https://doi.org/10.13182/NSE16-51>.
- [36]. A. ZHU et al., “An Optimally Diffusive Coarse Mesh Finite Difference Method to Accelerate Neutron Transport Calculations,” *Ann. Nucl. Energy*, **95**, 116–124 (2016); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2016.05.004>.
- [37]. A. ZHU et al., “Theoretical Convergence Rate Lower Bounds for Variants of Coarse Mesh Finite Difference to Accelerate Neutron Transport Calculations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 224–238 (2017); <https://doi.org/10.1080/00295639.2017.1293408>.
- [38]. H. T. KIM and Y. KIM, “Convergence Studies on Nonlinear Coarse-Mesh Finite Difference Accelerations for Neutron Transport Analysis,” *Nucl. Sci. Eng.*, **191**, 136–149 (2018); <https://doi.org/10.1080/00295639.2018.1463747>.
- [39]. B. KOCHUNAS, “Theoretical Convergence Rate Analysis of a Unified CMFD Formulation with Various Diffusion Coefficients,” *Proc. M&C 2019*, Portland, OR, August 25–29 (2019).
- [40]. A. YAMAMOTO, T. ENDO, and A. GIHO, “Transport Consistent Diffusion Coefficient for CMFD Acceleration and Comparison of Convergence Properties,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **56**, 716–723 (2019); <https://doi.org/10.1080/00223131.2019.1618405>.
- [41]. B. KOCHUNAS, “Stability, Robustness, and Performance of CMFD in Whole Core Calculations,” *Proc. Consortium for Advanced Simulation of Light Water Reactors Virtual Mtg.*, November 16–19, 2020 (2020).
- [42]. K. SMITH and J. RHODES, “Full-core, 2-D, LWR Core Calculations with CASMO-4E,” *Proc. PHYSOR 2002*, *Trans. Am. Nucl. Soc.*, Seoul, Korea (2002).
- [43]. N. Z. CHO, G. S. LEE, and C. J. PARK, “Partial Current-Based CMFD Acceleration of the 2D/1D Fusion Method for 3D Whole-Core Transport Calculations,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **88**, 594 (2003).
- [44]. D. WANG and S. XIAO, “A Linear Prolongation Approach to Stabilizing CMFD,” *Nucl. Sci. Eng.*, **190**, 45 (2018); <https://doi.org/10.1080/00295639.2017.1417347>.
- [45]. E. LARSEN, “Infinite Medium Solutions to the Transport Equation, Discretization Schemes, and the Diffusion Approximation,” *Proc. Int. Topl. Mtg. Mathematical Methods for Nuclear Applications*, Salt Lake City, Utah, September 9–13, 2001, American Nuclear Society (2001).

第3章 中性子輸送計算における離散化誤差低減手法

3.1 本章の概要

本章では、中性子輸送計算における代表的な離散化誤差低減手法について述べる。決定論的な中性子輸送計算手法では、中性子輸送方程式を空間、角度、エネルギーについて離散化し数値計算を行う。しかしこれら変数をすべて詳細に離散化すると計算コストが大きい。

核分裂工学では、離散化モデルの異なる複数回の中性子輸送計算を結合させて解を求めるという方法が多く利用される。例えば炉心解析では空間、角度、エネルギーを多段階に離散化した複数回の中性子輸送計算を結合させることで、少ない計算コストで高精度な核特性値を求めている。このとき離散化誤差低減手法を用いることで、各中性子輸送計算の離散化誤差を低減し、計算精度を高めている。また、第2章で説明した非線形収束加速法では、詳細な中性子輸送計算（詳細計算）の反復間に、粗い計算モデルによる中性子輸送計算（加速計算）を実行する。このとき、加速計算では補正パラメータを用いて離散化誤差の差異を解消し、詳細計算の反応率を保存する。これにより加速計算から詳細計算の収束解を推定し、詳細計算の収束を加速する。以上より、現実的な計算コストで高精度な解を得るには離散化誤差低減手法の利用が重要である。そこで本章では中性子輸送計算に適用される代表的な、もしくは本論文に関係する離散化誤差低減手法について述べる。なお非線形収束加速法については第2章で述べたため本章では省略する。

以下に本章の構成を示す。3.2節では、不連続因子の理論と計算方法について述べる。不連続因子はある物理量の不連続性を表す補正因子である。不連続因子によるある物理量の不連続性を許容することで、別の物理量の連続性を保存することができる。中性子輸送計算では、不連続因子を用いて領域境界における中性子流を保存し、その結果として領域内反応率を保存し離散化誤差を低減する。不連続因子は、特に近代ノード法による炉心計算で利用される。本節では拡散方程式に対する適用方法と計算方法を述べる。また、微積分型輸送方程式に対する適用方法も示す。

3.3節では、Superhomogenization法（SPH法）の理論と計算方法について述べる。SPH法では、SPH因子と呼ばれる離散化誤差低減パラメータを巨視的断面積に乗じることで、領域内反応率を保存する。本節では、拡散方程式および微積分型輸送方程式におけるSPH法の理論、SPH因子の計算方法およびSPH法を適用した中性子輸送計算の計算方法をそれぞれ示す。

3.4節では領域毎 even-parity 不連続因子（EPDF）の理論と計算方法について述べる。EPDFは even-parity 角度中性子束に対して適用される不連続因子であり、領域境界ではなく領域毎に値を決定する。EPDFの定義、EPDFを適用したMOC計算方法およびEPDFの計算方法をそれぞれ示す。なお、EPDFは第5章で提案する新たな多群モンテカルロ法（DF-MC法）で利用する。

最後に3.5節に本章のまとめを、3.6節に本章の参考文献を示す。

3.2 不連続因子

本節では、不連続因子の理論と計算手順を述べる。不連続因子はある物理量の不連続性を表すパラメータであり、不連続因子を用いることで別の物理量の連続性を保存することができる。中性子輸送計算では不連続因子を用いて中性子束の不連続性を扱い、中性子流の連続性を保存することがほとんどである。不連続因子を用いることで、離散化条件の異なる二つの計算間で領域境界の正味中性子流を保存することができる。これにより均質領域内平均反応率を保存することができる。このように不連続因子を用いて反応率を保存する理論を **Generalized Equivalence Theory (GET)** と呼ぶ[1]。

不連続因子は、中性子輸送方程式（拡散方程式、**Pn** 方程式や微積分型輸送方程式など）や適用する物理量によって様々な定義や計算方法が提案されている。以下では拡散法的式における不連続因子についてそれぞれ述べる。

拡散方程式における不連続因子について述べる。拡散方程式における不連続因子は、近代ノード法による炉心計算でよく利用される[2][3]。ここでは 1 群 1 次元平板体系における非均質体系と均質体系間の反応率保存を考える。

拡散方程式は全中性子束に関する二階微分方程式であるため、解を求めるためには境界条件が 2 つ必要となる。非均質体系と均質体系の間で領域平均反応率を保存するためには、領域平均漏洩率が保存されなければならない。一次元体系では領域境界は 2 つあるため、それぞれの領域境界全中性子束と正味中性子流（計 4 つ）が同時に保存するような境界条件を与えることはできない。これは二次元および三次元体系でも同様である。従って、全中性子束の連続性を境界条件として与えると非均質体系と均質体系で漏洩率が保存されず、均質計算で非均質計算の解を再現できない。

漏洩率保存のためには、非均質体系と均質体系間で領域境界正味中性子流が保存されればよい。そこで、正味中性子流が連続となる境界条件を均質体系における各領域にそれぞれ与える。これにより領域平均漏洩率および反応率が保存される。このとき、境界条件として正味中性子流の連続式を用いるため、領域境界全中性子束の連続は条件として仮定することができず、領域境界全中性子束は不連続となる。また正味中性子流は連続だと仮定するが、部分中性子流は不連続となる。すなわち、境界条件として正味中性子流の連続を仮定することは、領域境界全中性子束の不連続性を明示的に扱うことと同等である。

この不連続性を定量的に扱う定数係数を不連続因子という。このとき不連続因子は下式から計算される。ここで DF は不連続因子、 ϕ^{fine} および ϕ^{coarse} は非均質計算および均質計算で得られる領域境界全中性子束をそれぞれ表す。

$$DF = \frac{\phi^{fine}}{\phi^{coarse}}. \quad (3.2.1)$$

不連続因子を適用する場合、均質体系では領域境界全中性子束には以下の境界条件を用いる。

$$DF_{i,x+}\phi_{i,x+} = DF_{i+1,x-}\phi_{i+1,x-} \quad (3.2.2)$$

ここで*i*は領域インデックス、*x*+および*x*-は領域境界をそれぞれ表す。均質計算において式(3.2.1)などを用いて導出される正味中性子流差分式を用いることで、均質体系において非均質体系の漏洩率を保存でき、均質計算で非均質計算の解を再現できる。以上が、拡散方程式における不連続因子の定義である。

次に拡散方程式における不連続因子の計算手順を示す。手順から分かるとおり不連続因子を求めるには、非均質計算と均質計算をそれぞれ行えばよい。

step 1) 非均質体系計算を行い、領域境界全中性子束 ϕ^{fine} および正味中性子流を求める。

step 2) 空間均質化により、均質化断面積、領域平均全中性子束を求める。

step 3) 非均質体系計算で得られた正味中性子流を境界条件として、均質体系計算を行う。

これにより均質体系による領域境界全中性子束 ϕ^{coarse} を得る。

step 4) 式(3.2.2)から不連続因子を計算する。

不連続因子は領域境界に対して値が定義される。そのため領域毎に、直交座標系では一次元体系では2つ、二次元体系では4つ、三次元体系では6つの値が領域境界毎に計算される。また上記では空間均質化を例として説明したが、角度縮約およびエネルギー群縮約による離散化誤差も低減できる。すなわち、高次の輸送効果(微積分型輸送方程式やP_n方程式)を低次の輸送方程式(拡散方程式やSP3方程式など)に取り込むことができる。また、エネルギー群縮約を行う場合でも、同様に縮約誤差を低減できる。P_n方程式やSP3方程式に対しても不連続因子の適用方法が提案されている[4][5]。この場合は方程式の数が増え、方法によって不連続因子を適用する物理量や保存される物理量が異なる。

ここで、不連続因子と計算体系の関係について述べる。前述のとおり、非均質体系計算から不連続因子を計算すれば、不連続因子を適用した均質体系計算は非均質体系計算の結果を再現できる。しかし、非均質体系計算を行うことができるのであれば、均質体系計算を行う必要はない。そのため炉心解析などで全炉心計算を行う場合、非均質全炉心体系計算から不連続因子を求めるのは現実的ではない。

そこで、非均質全炉心体系計算ではなく、ある一つの燃料集合体のみを計算体系とする非均質単一集合体計算から不連続因子を計算することを考える。このとき単一集合体計算では完全反射境界条件を用いる。そして非均質体系計算の結果を基に均質化断面積を計算し、均質体系計算から不連続因子を計算する。単一集合体計算における完全反射境界条件は、集合体境界の正味中性子流がゼロであることを仮定している。この仮定は、非均質全炉心体系における集合体境界正味中性子流がゼロに近いほど妥当な近似となる。PWRではこの近似は概ね妥当だが、BWRでは集合体境界に十字型制御棒が挿入されるため計算精度が落ちる場合がある。

非均質単一集合体計算と集合体均質体系計算を行い、それらの中性子束から集合体境界の不連続因子を計算する。このとき集合体均質体系計算に基づき計算される不連続因子を

集合体不連続因子 (ADF, assembly discontinuity factor) と呼ぶ。ADF は拡散計算に基づく近代ノード法で利用される。単一集合体計算における集合体均質化では、集合体内の中性子束分布は平坦であり、均質化領域平均全中性子束は非均質単一集合体計算における集合体平均全中性子束と一致する。すなわち ADF は、非均質体系計算から求まる集合体平均全中性子束と集合体境界全中性子束の比から計算される。なお、ピンセル均質化の場合はピンセル不連続因子 (PDF, pin-by-pin discontinuity factor) と呼ばれる。ただしピンセル均質化の場合は、データ量の増加などの関係から不連続因子ではなく SPH 因子が利用されることが多い。

各燃料集合体について単一集合体計算から ADF を計算し、得られた ADF を用いて集合体均質全炉心体系計算を行う。集合体均質全炉心体系計算では ADF により空間均質化誤差を低減し、非均質全炉心体系計算に近い解を求めることができる。ただし、ADF は単一集合体計算から求めており、非均質体系計算から求まる値とは異なる。これは ADF 計算時の単一集合体計算における境界条件 (集合体境界正味中性子流) に起因する誤差が生じるためである。従って ADF を用いた集合体全炉心体系計算は、非均質全炉心計算と完全に一致した解は得られない。しかし、ADF を用いずに集合体均質全炉心体系計算を行うよりも空間均質化誤差が低減され、高精度な解を得ることができる。

また不連続因子は微積分型輸送方程式に対しても適用できる[6][7]。拡散方程式では正味中性子流を保存するように不連続因子が定義されるが、微積分型輸送方程式ではその他の物理量を保存するように不連続因子を定義できる。微積分型輸送方程式における不連続因子は、角度中性子束もしくは **even-parity** 角度中性子束に適用されることが多い。角度中性子束に適用される場合は、領域境界角度中性子束を不連続とすることで部分もしくは正味中性子流を保存する (定義により異なる)。**even-parity** 角度中性子束に適用される場合は、**even-parity** 角度中性子束を不連続とすることで **odd-parity** 角度中性子束を保存する。これら不連続因子は領域境界だけでなく角度依存性も有する。一方で角度依存性を有さず領域毎の **even-parity** 角度中性子束に適用される不連続因子として、領域毎 **even-parity** 不連続因子も提案されている[8]。**even**-および **odd-parity** 角度中性子束および領域毎 **even-parity** 不連続因子については 3.4 節で詳しく述べる。ただし、どの定義の不連続因子が離散化誤差低減の観点で最も有用であるかについてはさらなる検証が必要である。

3.3 Superhomogenization (SPH) 法

本節では Superhomogenization (SPH) 法の理論と計算手順を述べる[9][10][11]。SPH 法では、SPH 因子と呼ばれる補正係数を用いて巨視的断面積を補正することで、領域内平均反応率を保存する。すなわち SPH 因子は、空間領域毎に値が定義される。

SPH 因子を巨視的断面積にどのように適用するかについては、中性子輸送方程式の形式によって様々な方法が提案されている。以下では、拡散方程式、Pn 方程式、微積分型輸送方程式 (Sn 方程式) における SPH 法についてそれぞれ述べる。本節の説明では簡単のため、1 群 1 次元平板体系および等方散乱を仮定する。

まず拡散方程式における SPH 法について述べる。1 群 1 次元拡散方程式は式(3.3.1)のとおり記述できる。

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi(x). \quad (3.3.1)$$

1 次元拡散方程式に SPH 因子を適用する、すなわち各項に SPH 因子を乗じると式(3.3.2)のとおりとなる。

$$-\alpha D \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \alpha \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \alpha \Sigma_f \phi(x). \quad (3.3.2)$$

ここで、SPH 因子 α が乗じられた拡散係数および巨視的断面積を新たな核定数として式(3.3.3)のとおり定義する。

$$\tilde{D} \equiv \alpha D, \quad \tilde{\Sigma} \equiv \alpha \Sigma. \quad (3.3.3)$$

式(3.3.3)を用いて式(3.3.2)を整理すると、式(3.3.4)のとおりとなる。

$$-\tilde{D} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \tilde{\Sigma}_a \phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \tilde{\Sigma}_f \phi(x). \quad (3.3.4)$$

SPH 法を適用した拡散計算では、SPH 因子を乗じた拡散係数および巨視的断面積を用いた式(3.3.4)で記述される拡散方程式を解けばよい。

ここで、SPH 因子が物理的にどのような補正を行っているか考える。式(3.3.2)左辺より、SPH 因子は、拡散係数（全断面積の逆数）および全断面積に乘じられている。式(3.3.2)左辺の第一項は漏洩率、第二項は反応率をそれぞれ表している。すなわち式(3.3.2)における SPH 因子は、拡散方程式における漏洩率と反応率を同時に補正することで、領域平均の反応率を保存している。SPH 因子が増大すると、式(3.3.3)より漏洩率および反応率はともに増加する。

このように、SPH 因子に対して漏洩率と反応率の両方が正比例の関係にあることから、本手法を Simultaneous 法と呼ぶ[9]。Simultaneous 法では、（漏洩項の計算に用いる）巨視的全断面積には SPH 因子の逆数を乗じ、その他の巨視的断面積には SPH 因子を乗じる。これはエネルギー群が多群の場合も同様である（式(3.3.4)の左辺第二項の $\tilde{\Sigma}_a$ が $\tilde{\Sigma}_r$ に代わり、右辺に他群への散乱項が追加される）。

次に、Pn 方程式における SPH 因子の適用方法について述べる。まず、拡散 (P0) 方程式である式(3.3.2)は以下のとおり書き直すことができる。

$$\frac{d}{dx} \phi_1(x) + \alpha \Sigma_t \phi_0(x) = \alpha \Sigma_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \alpha \Sigma_f \phi_0(x), \quad (3.3.5)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \phi_0(x) + \frac{\Sigma_t}{\alpha} \phi_1(x) = 0. \quad (3.3.6)$$

ここで、 $\phi_\ell(x)$ は ℓ 次の角度中性子束モーメントであり下式で計算される。

$$\phi_\ell(x) = \int_{-1}^1 P_\ell(\mu) \psi(\mu, x) d\mu. \quad (3.3.7)$$

ここで $P_\ell(\mu)$ は ℓ 次のルジャンドル関数、 $\psi(\mu, x)$ は角度中性子束である。式(3.3.5)および(3.3.6)を拡張すると、SPH 法を適用した Pn 方程式におけるは以下のとおり記述できる。

$$\frac{d}{dx} \phi_1(x) + \alpha \Sigma_t \phi_0(x) = \alpha \Sigma_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \alpha \Sigma_f \phi_0(x), \quad (3.3.8)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \phi_0(x) + \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \frac{\Sigma_t}{\alpha} \phi_1(x) = 0, \quad (3.3.9)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \frac{3}{5} \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \alpha \Sigma_t \phi_2(x) = 0, \quad (3.3.10)$$

$$\frac{3}{7} \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \frac{4}{7} \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \frac{\Sigma_t}{\alpha} \phi_3(x) = 0. \quad (3.3.11)$$

...

Pn 法における角度中性子束の偶数次モーメントは全中性子束 (反応率) に関する物理量を表しており、奇数次モーメントは中性子流 (漏洩率) に関する物理量を表している。式(3.3.8)–(3.3.11)より、偶数次モーメントには全断面積の逆数 (拡散係数に相当) と SPH 因子の積が乗じられており (式中では逆数をとった形で表されている)、対して奇数次モーメントには全断面積と SPH 因子の積がそれぞれ乗じられている。すなわち SPH 因子と漏洩率および反応率はともに正比例の関係にあることから、この方法も **Simultaneous** 法である。以上が、Pn 方程式における SPH 法である。

次に、微積分型輸送方程式における SPH 法について述べる。1 群 1 次元微積分型輸送方程式は以下のとおり記述できる。

$$\mu \frac{d}{dx} \psi(\mu, x) + \Sigma_t \psi(\mu, x) = \Sigma_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi_0(x). \quad (3.3.12)$$

この方程式に SPH 因子を適用すると、下式のとおりとなる。

$$\mu \frac{d}{dx} \psi(\mu, x) + \alpha \Sigma_t \psi(\mu, x) = \alpha \Sigma_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \alpha \Sigma_f \phi_0(x). \quad (3.3.13)$$

SPH 因子と巨視的断面積の積を、式(3.3.3)を用いて整理すると、以下のとおりとなる。

$$\mu \frac{d}{dx} \psi(\mu, x) + \tilde{\Sigma}_t \psi(\mu, x) = \tilde{\Sigma}_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} v \tilde{\Sigma}_f \phi_0(x). \quad (3.3.14)$$

SPH 法を適用した輸送計算（MOC など）では、式(3.3.14)に示す微積分型輸送方程式を解けばよい。式(3.3.14)より、SPH 因子はすべての巨視的断面積に乘じられている。このような SPH 法を Direct 法と呼ぶ。

ここで、SPH 因子が物理的にどのような補正を行っているか考える。式(3.3.3)より、SPH 因子はそれぞれの巨視的断面積に乘じられている。左辺第一項より、漏洩項に対して直接補正を行っていないが、左辺第二項より SPH 因子は巨視的全断面積に乘じられている。

SPH 因子は漏洩率と反応率を同時に補正しているが、SPH 因子との相関関係は異なる。SPH 因子が増大したとき、漏洩率（巨視的断面積の逆数）は低減され反応率は増大する。すなわち、SPH 因子と漏洩率は反比例し反応率とは正比例の関係にある。従って、Pn 方程式における SPH 法と微積分型輸送方程式における SPH 法では、厳密には異なるアプローチで領域内反応率保存を行っている。1次元平板体系において、ある中性子束モーメントの次数や境界条件の組み合わせ下では、Pn 計算（Pn 方程式）と Sn 計算（微積分型輸送方程式）は等価な計算モデルとなるが、上記の理由により同一の SPH 因子を用いた SPH 法を適用した Pn 計算と Sn 計算はわずかに異なる解を示す。

そこで、微積分型輸送方程式でも Pn 方程式と等価な補正となる SPH 法が提案されている[9]。以下にその理論を示す。まず SPH 法を適用した Pn 方程式である式(3.3.8)–(3.3.11)を以下のとおり変形する。

$$\frac{d}{dx} \phi_1(x) + \alpha \Sigma_t \phi_0(x) = \alpha \Sigma_s \phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}} v \alpha \Sigma_f \phi_0(x), \quad (3.3.15)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \phi_0(x) + \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \alpha \Sigma_t \phi_1(x) = \Sigma_t \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \phi_1(x), \quad (3.3.16)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \frac{3}{5} \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \alpha \Sigma_t \phi_2(x) = 0, \quad (3.3.17)$$

$$\frac{3}{7} \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \frac{4}{7} \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \alpha \Sigma_t \phi_3(x) = \Sigma_t \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \phi_3(x), \quad (3.3.18)$$

...

式(3.3.15)–(3.3.18)より SPH 法を適用した Pn 方程式と等価な微積分輸送方程式は式(3.3.19)のとおりととなる。

$$\mu \frac{d}{dx} \psi(\mu, x) + \tilde{\Sigma}_t \psi(\mu, x) = \sum_p \tilde{\Sigma}_p \phi_p(x) + \frac{1}{k_{eff}} v \tilde{\Sigma}_f \phi_0(x). \quad (3.3.19)$$

ここで $\tilde{\Sigma}_p$ は以下のとおりである。

$$\tilde{\Sigma}_\ell = \begin{cases} \alpha \Sigma_s, & \ell = 0 \\ 0, & \ell = \text{even} (\ell \neq 0) \\ \Sigma_t \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right), & \ell = \text{odd} \end{cases}. \quad (3.3.20)$$

式(3.3.19)を解くことで、SPH法を適用した輸送計算でもPn法と等価な計算を行うことができる。ただし、本式では等方散乱の場合でも散乱源に関する高次モーメントを計算する必要があるため、取り扱いが難しい。そこで、式(3.3.15)–(3.3.18)を以下のとおり近似する。具体的にはそれぞれの式の右辺にある奇数次モーメント項が無視できるほど小さいと近似する。

$$\frac{d}{dx}\phi_1(x) + \alpha\Sigma_t\phi_0(x) = \alpha\Sigma_s\phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}}\nu\alpha\Sigma_f\phi_0(x), \quad (3.3.21)$$

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\phi_0(x) + \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\phi_2(x) + \alpha\Sigma_t\phi_1(x) = 0, \quad (3.3.22)$$

$$\frac{2}{5}\frac{d}{dx}\phi_1(x) + \frac{3}{5}\frac{d}{dx}\phi_3(x) + \alpha\Sigma_t\phi_2(x) = 0, \quad (3.3.23)$$

$$\frac{3}{7}\frac{d}{dx}\phi_2(x) + \frac{4}{7}\frac{d}{dx}\phi_4(x) + \alpha\Sigma_t\phi_3(x) = 0, \quad (3.3.24)$$

...

式(3.3.21)–(3.3.24)を整理すると、式(3.3.25)が得られる。

$$\mu\frac{d}{dx}\psi(\mu, x) + \frac{\Sigma_t}{\alpha}\psi(\mu, x) = \left(\alpha\Sigma_s + \Sigma_t\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\right)\phi_0(x) + \frac{1}{k_{eff}}\nu\alpha\Sigma_f\phi_0(x). \quad (3.3.25)$$

式(3.3.25)は、SPH因子と巨視的断面積の関係が角度中性子束モーメントの次数に依らないため、式(3.3.19)に比べて数値計算における取り扱いが簡単である。式(3.3.25)より、SPH因子は漏洩率（全断面積の逆数）と反応率（全断面積）に乘じられており、SPH因子と漏洩率と反応率はいずれも正比例の関係がある、従って、式(3.3.25)は微積分型輸送方程式に対するSimultaneous法であるといえる。以上が微積分型輸送方程式に対するSPH法の理論である。

上記の理論から分かるとおり、巨視的全断面積に対するSPH因子の適用については自由度がある。Direct法ではSPH因子の1乗、Simultaneous法では-1乗が巨視的全断面積にかけられている。また、SPH因子の0乗をかける方法をNo correct total法と呼ぶ。計算精度や数値的安定性の観点から、巨視的全断面積にSPH因子の何乗をかけるのが最適かについては検討の余地がある。

SPH因子を求める計算手順とSPH因子の更新方法を述べる。ここでは空間均質化を例として、SPH因子の計算手順を以下に示す。

- step 1) 非均質体系計算を行い、全中性子束分布を求める。
- step 2) 空間均質化により、非均質計算に基づく領域平均全中性子束分布 $\phi_{g,i}^{hetero}$ および均質化断面積を求める。
- step 3) SPH因子を1.0に初期化する。
- step 4) SPH因子で補正された均質化核定数（拡散係数や巨視的断面積）を求める。どのような定義で均質化核定数を求めるかは、用いる輸送計算手法およびSPH法の補正方法

(Simultaneous/Direct)による。

step 5) 均質体系において SPH 因子を適用した中性子輸送計算を実行する。これにより均質計算に基づく領域平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を得る。

step 6) 非均質計算と SPH 因子を適用した均質計算で、体系全体の全中性子束の体積積分値が一致するように、均質計算に基づく領域平均全中性子束を式(3.4.30)により規格化する。これにより規格化均質計算に基づく領域平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を求める。

$$\phi_{g,i}^{homo} = \phi_{g,i}^{homo} \frac{\sum_g \sum_i \phi_{g,i}^{hetero} V_i}{\sum_g \sum_i \phi_{g,i}^{homo} V_i} \quad (3.3.26)$$

step 7) 式(3.3.27)から SPH 因子を更新する。本更新式は、輸送計算手法や SPH 法に依らず同一である。

$$\alpha_{g,i} = \frac{\phi_{g,i}^{hetero}}{\phi_{g,i}^{homo}} \quad (3.3.27)$$

step 8) 更新された SPH 因子を用いて、SPH 因子を適用した均質計算を実行する。これにより均質計算に基づく領域平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を更新する

step 9) SPH 因子が収束するまで step)4-6 を繰り返す。SPH 因子が収束判定基準を満たしたら計算終了。

また空間均質化を行う場合の MOC 計算による SPH 因子計算フローを図 3.3.1 に示す。

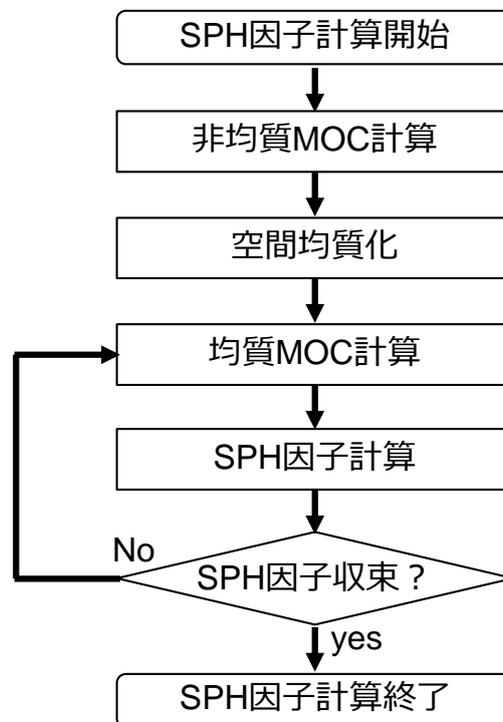


図 3.3.1 MOC による SPH 因子計算フロー

SPH 因子を求めるには SPH 法を適用した輸送計算を反復させ、SPH 因子を収束させる必要がある。なお MOC 以外の輸送計算手法を用いても同様の手順で SPH 因子を計算できる。

以上が空間均質化を伴う場合の SPH 因子の計算手順である。角度分割数やエネルギー群の縮約のみを行い、空間均質化を行わない場合は、非均質 MOC 計算および均質 MOC 計算の代わりに、同一空間領域構造で詳細計算と粗い計算を行う。

最後に、SPH 法の主な性質を以下に示す。

- SPH 法は領域内平均漏洩率および反応率を保存するが、領域の各境界の漏洩率（正味中性子流）は個別には保存されない(合計値は保存される)。対して不連続因子は領域境界毎の漏洩率を保存する（ひいては領域平均漏洩率および反応率を保存する）。これは SPH 因子が領域平均中性子束に適用されることに対して、不連続因子は領域境界中性子束に適用されるためである。
- SPH 因子は領域毎に与えられるため、領域境界毎に与えられる不連続因子に比べて少ない計算メモリで反応率保存を行うことができる。また SPH 因子は巨視的断面積との積という形式で利用される。そのため SPH 因子の値を陽的に保持せず、巨視的断面積との積という形式で保持することも出来る。
- 不連続因子は非均質計算と均質計算の計算二回分で求められるが、SPH 法では SPH 因子が収束するまで均質計算を反復させる。従って、不連続因子に比べると SPH 法は必要な計算量が多い。ただし炉心解析では、単一集合体体系において比較的高速な計算により SPH 因子を求める。また炉心解析では事前に SPH 因子を計算する時間を確保できる。そのため SPH 法による計算時間の増加は大きな問題ではない。
- SPH 法では反復計算を行うため、SPH 因子の収束性が悪いと SPH 因子反復計算が収束せず収束解が得られないという問題が生じる可能性がある。特に Direct 法では計算体系内に中性子強吸収体が存在すると、収束性が悪化する場合がある。例えば $\alpha > 1$ の場合を考える。このとき、 α により巨視的断面積を補正すると、補正後の巨視的断面積は増大する。強吸収体の場合、巨視的断面積が増大すると吸収断面積が大きくなり中性子束は小さくなる。そして次に均質計算で求まる中性子束が小さくなり、式(3.4.28)より α はさらに大きくなる。このような場合、反復計算を続けても α は増加し収束しない。また $\alpha < 1$ の場合でも、上記と逆に巨視的断面積が小さくなり均質計算で求まる中性子束が大きくなり続けることで、SPH 因子が小さくなり続け収束しない場合がある。このような場合は、SPH 因子の上下限值を設定する方法がある。ただし上下限值をとる場合は、反応率が正確に保存されないため、離散化誤差が低減されず計算精度が悪化する。
- SPH 因子と不連続因子の関係を述べる。領域境界の不連続因子がすべて等しい場合、不連続因子の逆数と SPH 因子は等しい値をとる。このことから、SPH 因子は領域平均漏洩率（中性子流）および反応率を保存している。

3.4 領域毎 even-parity 不連続因子 (EPDF)

本節では領域毎 even-parity 不連続因子 (EPDF) の理論と計算手順を述べる[8][12]。EPDF は even-および odd-parity 角度中性子束に基づく微積分型輸送方程式に対する不連続因子である。EPDF は角度中性子束に対して適用されるが、角度依存性を有する even-parity 不連続因子と、領域毎に一つ与えられ角度依存性を有さない even-parity 不連続因子とがある。前者は、領域表面および角度方向毎に異なる値が定義される。従って、詳細な離散化条件では膨大な計算メモリが必要となる。一方で後者は、角度依存性を有さず領域毎に一つの値が定義される。そのため計算メモリの削減を行うことができ、非常に有用な手法である。本節では、後者の角度依存性を有さず領域毎に決定する EPDF について述べる。また本論文における EPDF はこの領域毎 even-parity 不連続因子をすべて指す。角度依存性を有する even-parity 不連続因子については参考文献[4][6]を参考にすること。

EPDF では、領域境界において中性子流に相当する odd-parity 角度中性子束の連続性が保存されるような境界条件を満たすよう定義される。EPDF は領域境界の全中性子束に相当する even-parity 角度中性子束の不連続性を表し、EPDF を用いることで領域内平均反応率が保存される。

まず EPDF の理論を述べる前に、even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式について説明する。簡単のため、エネルギー1群1次元の輸送方程式を考える。飛行方向の方向余弦 μ および $(-\mu)$ の角度中性子束に関する輸送方程式は、等方な中性子源を仮定すると式(3.4.1)および(3.4.2)のとおりである。

$$\mu \frac{d\psi(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi(\mu, x) = Q(x), \quad (3.4.1)$$

$$-\mu \frac{d\psi(-\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi(-\mu, x) = Q(x), \quad (3.4.2)$$

ここで、中性子源 $Q(x)$ は式(3.4.3)のとおりである。

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2}\Sigma_s(x) \int_{-1}^1 \psi(\mu, x) d\mu + \frac{1}{2} \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f(x) \int_{-1}^1 \psi(\mu, x) d\mu \\ &= \frac{1}{2} \left(\Sigma_s(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f(x) \right) \int_{-1}^1 \psi(\mu, x) d\mu. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

ここで、even-parity 角度中性子束 ψ^e と odd-parity 角度中性子束 ψ^o はそれぞれ式(3.4.4)および(3.4.5)で定義される。

$$\psi^e(\mu, x) \equiv \frac{\psi(\mu, x) + \psi(-\mu, x)}{2}, \quad (3.4.4)$$

$$\psi^o(\mu, x) \equiv \frac{\psi(\mu, x) - \psi(-\mu, x)}{2}. \quad (3.4.5)$$

これら even-および odd-parity 角度中性子束を用いて式(3.4.1)および(3.4.2)の輸送方程式を変形する。ここで、角度中性子束をルジャンドル多項式 (多次元体系では球面調和関数) で展

開する場合、even-parity 角度中性子束 ψ^e は偶数次項、odd-parity 角度中性子束 ψ^o は奇数次項のみから成る。すなわち ψ^e は全中性子束に相当する物理量に、 ψ^o は中性子流に相当する物理量に対応する。

式(3.4.1)および(3.4.2)を両辺の和と差をとり、両辺を 2 で割った方程式はそれぞれ式(3.4.6)および(3.4.7)となる。

$$\mu \frac{d\psi^o(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi^e(\mu, x) = Q(x), \quad (3.4.6)$$

$$\mu \frac{d\psi^e(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi^o(\mu, x) = 0. \quad (3.4.7)$$

これらの式(3.4.6)および(3.4.7)から odd-parity 角度中性子束 ψ^o を消去して整理すると、even-parity 角度中性子束に関する二階微分方程式が得られる。

$$\mu \frac{d}{dx} \left(-\frac{\mu}{\Sigma_t(x)} \frac{d\psi^e(\mu, x)}{dx} \right) + \Sigma_t(x)\psi^e(\mu, x) = Q^e(x). \quad (3.4.8)$$

ここで、 $Q^e(x)$ は even-parity 角度中性子束で表される中性子源である。

$$Q^e(x) = \frac{1}{2} \left(\Sigma_s(x) + \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f(x) \right) \int_{-1}^1 \psi^e(\mu, x) d\mu. \quad (3.4.9)$$

すなわち、式(3.4.1)および(3.4.2)は、式(3.4.8)に示す even-parity 角度中性子束に関する二階微分の輸送方程式と等価であることが分かる。even-parity 角度中性子束に関する輸送計算では、この方程式を離散化して数値計算を行う。even-parity 角度中性子束が求まれば、その値を用いて odd-parity 角度中性子束および全中性子束空間分布を計算できる。

次に、EPDF の導出および定義について述べる。ここで境域境界が原点となる座標系をとる二領域問題を考える。このとき左側領域を L および右側領域を R とする。各領域における even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式は式(3.4.10)および(3.4.11)のとおりとなる。

$$-\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,L}} \frac{d^2\psi_L^e(\mu, x)}{dx^2} + \Sigma_{t,L}\psi_L^e(\mu, x) = Q_L^e, \quad (3.4.10)$$

$$-\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,R}} \frac{d^2\psi_R^e(\mu, x)}{dx^2} + \Sigma_{t,R}\psi_R^e(\mu, x) = Q_R^e. \quad (3.4.11)$$

ここで、式(3.4.10)および(3.4.11)の両辺を、それぞれの領域における EPDF であり f_L, f_R で割る。

$$-\frac{\mu^2}{f_L \Sigma_{t,L}} \frac{d^2\psi_L^e(\mu, x)}{dx^2} + \frac{\Sigma_{t,L}}{f_L} \psi_L^e(\mu, x) = \frac{Q_L^e}{f_L}, \quad (3.4.12)$$

$$-\frac{\mu^2}{f_R \Sigma_{t,R}} \frac{d^2\psi_R^e(\mu, x)}{dx^2} + \frac{\Sigma_{t,R}}{f_R} \psi_R^e(\mu, x) = \frac{Q_R^e}{f_R}. \quad (3.4.13)$$

このとき以下の境界条件を考える。式(3.4.14)は境域境界における even-parity 角度中性子束の連続性、式(3.4.15)は EPDF で割られた odd-parity 角度中性子束の連続性を示している。すなわち EPDF の逆数($1/f_L, 1/f_R$)は odd-parity 角度中性子束の不連続性を表している。

$$\psi_L^e(\mu, 0) = \psi_R^e(\mu, 0), \quad (3.4.14)$$

$$-\frac{1}{f_L \Sigma_{t,L}} \frac{d\psi_L^e(\mu, 0)}{dx} = -\frac{1}{f_R \Sigma_{t,R}} \frac{d\psi_R^e(\mu, 0)}{dx}. \quad (3.4.15)$$

ここで、巨視的断面積と EPDF の逆数($1/f_L, 1/f_R$)の関係は、拡散方程式における SPH 因子 (Direct 法、式(3.3.2)) と同じ形式である。従って EPDF は、even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式に対する SPH 因子の逆数、という関係をもつ。

次に、EPDF で割られた even-parity 角度中性子束を、EPDF 補正された even-parity 角度中性子束として以下のとおり定義する。

$$\tilde{\psi}_L^e(\mu, x) \equiv \frac{\psi_L^e(\mu, x)}{f_L}, \quad (3.4.16)$$

$$\tilde{\psi}_R^e(\mu, x) \equiv \frac{\psi_R^e(\mu, x)}{f_R}. \quad (3.4.17)$$

式(3.4.16)および(3.4.17)を用いて、式(3.4.12)および(3.4.13)を整理すると、式(3.4.18)および(3.4.19)のとおりに表される。

$$-\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,L}} \frac{d^2 \tilde{\psi}_L^e(\mu, x)}{dx^2} + \Sigma_{t,L} \tilde{\psi}_L^e(\mu, x) = \tilde{Q}_L^e, \quad (3.4.18)$$

$$-\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,R}} \frac{d^2 \tilde{\psi}_R^e(\mu, x)}{dx^2} + \Sigma_{t,R} \tilde{\psi}_R^e(\mu, x) = \tilde{Q}_R^e. \quad (3.4.19)$$

ここで \tilde{Q} は式(3.4.16)および(3.4.17)を用いて表される中性子源である。このとき式(3.4.14)および(3.4.15)を整理すると、境界条件は以下のとおり書き直せる。式(3.4.20)は EPDF が乗じられた補正された even-parity 角度中性子束の連続性を表している。すなわち式(3.4.20)において EPDF は補正された even-parity 角度中性子束 $\tilde{\psi}^e$ の不連続性を表している。式(3.4.21)は補正された odd-parity 角度中性子束の連続性を表している。

$$f_L \tilde{\psi}_L^e(\mu, 0) = f_R \tilde{\psi}_R^e(\mu, 0), \quad (3.4.20)$$

$$-\frac{1}{\Sigma_{t,L}} \frac{d\tilde{\psi}_L^e(\mu, 0)}{dx} = -\frac{1}{\Sigma_{t,R}} \frac{d\tilde{\psi}_R^e(\mu, 0)}{dx}. \quad (3.4.21)$$

式(3.4.18)–(3.4.21)は、EPDF を伴う even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式を表している。上式から分かる通り、EPDF は領域毎に定義されており角度依存性を有さない。以上が、EPDF の導出および定義である。

次に EPDF を適用した輸送計算の計算方法について述べる。これは、EPDF を適用した輸送方程式である式(3.4.12)–(3.4.15)を数値的に解けばよい。しかし、式(3.4.12)–(3.4.15)を even-parity 角度中性子束 ψ^e について解くことは、式(3.4.18)–(3.4.21)を EPDF 補正された even-parity 角度中性子束 $\tilde{\psi}^e$ について解くことと等価である。そのため、 $\tilde{\psi}^e$ を数値的に解くことで EPDF

を適用した中性子輸送計算を実行できる。

式(3.4.18)および(3.4.19)は $\tilde{\psi}^e$ に関する二階微分方程式となっている。そのため、方向余弦 μ の $\tilde{\psi}^e$ は、拡散計算（拡散方程式は全中性子束 ϕ に関する二階微分方程式）と同様の行列演算によって計算できる。この計算をすべての方向について順に行い、それらをガウス求積することで全中性子束分布および実効増倍率を求めることができる。これが最も単純な EPDF を適用した輸送計算の計算方法である。

しかし、既存の輸送計算コードの多くは、**transport sweep** による輸送計算手法（ある方向の角度中性子束を逐次的に求める方法）を採用している。そのため上記の方法で **even-parity** 角度中性子束に関する輸送計算を行うためには、計算コードを大幅に改良する必要がある。そこで、既存の輸送計算コードでなるべく少ない改良で、EPDF を適用した輸送計算を実施する方法が提案されている[8]。

以下に EPDF を適用した MOC 計算の計算方法について述べる。ここで、図 3.4.1 に示す一次元二領域問題を考える。図 3.4.1 において、各領域境界の **even**-および **odd-parity** 角度中性子束は以下のとおり表される。なお以下では式(3.4.16)および(3.4.17)で定義される **even**-および **odd-parity** 角度中性子束を ψ^e および ψ^o と表す。

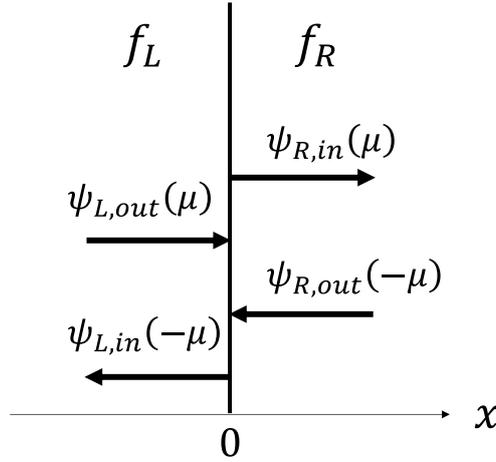


図 3.4.1 一次元二領域問題

$$\psi_L^e(\mu) = \frac{\psi_{L,out}(\mu) + \psi_{L,in}(-\mu)}{2} \quad (3.4.22)$$

$$\psi_L^o(\mu) = \frac{\psi_{L,out}(\mu) - \psi_{L,in}(-\mu)}{2}, \quad (3.4.23)$$

$$\psi_R^e(\mu) = \frac{\psi_{R,in}(\mu) + \psi_{R,out}(-\mu)}{2}, \quad (3.4.24)$$

$$\psi_R^o(\mu) = \frac{\psi_{R,in}(\mu) - \psi_{R,out}(-\mu)}{2}. \quad (3.4.25)$$

ここで、 $\psi_{L,in}(-\mu), \psi_{L,out}(\mu)$ は領域 L への入射および放出角度中性子束、 $\psi_{R,in}(\mu), \psi_{R,out}(-\mu)$ は領域 R への入射/放出角度中性子束である。

このとき式(3.4.20)および(3.4.21)より、EPDF と even-および odd-parity 角度中性子束については以下の境界条件が与えられる。

$$f_L \psi_L^e(\mu) = f_R \psi_R^e(\mu), \quad (3.4.26)$$

$$\psi_L^o(\mu) = \psi_R^o(\mu). \quad (3.4.27)$$

式(3.4.22)–(3.4.27)を整理すると、領域 L および R の角度中性子束と EPDF の関係式が以下のとおり求まる。

$$\psi_{L,in}(-\mu) = \frac{2f_R}{f_R + f_L} \psi_{R,out}(-\mu) + \frac{f_R - f_L}{f_R + f_L} \psi_{L,out}(\mu), \quad (3.4.28)$$

$$\psi_{R,in}(\mu) = \frac{2f_L}{f_R + f_L} \psi_{L,out}(\mu) + \frac{f_L - f_R}{f_R + f_L} \psi_{R,out}(-\mu). \quad (3.4.29)$$

式(3.4.28)および(3.4.29)より、EPDF により領域境界で角度中性子束が不連続となっていることが分かる。二領域において EPDF が 1.0 ($f_L = f_R = 1.0$) の場合は、式(3.4.28)および(3.4.29)の右辺第一項の分数部分は 1.0、右辺第二項は 0.0 となり、境域境界で角度中性子束は連続となる。

EPDF を適用した MOC 計算では、式(3.4.28)および(3.4.29)を用いて角度中性子束を計算する。このとき本方法を既存 MOC 計算コードで実行するには、改良点が以下の 2 点ある。

一つ目は、ある方向 μ とその逆方向 $(-\mu)$ の角度中性子束を同時に反復計算させることである。式(3.4.28)および(3.4.29)から分かるとおり、ある領域ある方向の入射角度中性子束を求めるには、隣接領域同方向の放出角度中性子束の値と、同一領域逆方向の放出角度中性子束の値が必要となる。そのため、ある方向 μ の角度中性子束を単独で求めることはできず、方向 μ と $(-\mu)$ の角度中性子束を 1 セットとしてまとめて計算しなくてはならない。そこで、境界条件から決定される体系境界領域の入射角度中性子束を初期値として、方向 μ と $(-\mu)$ の角度中性子束の計算を反復させ、角度中性子束を収束させる。これを各方向について実行する。一般的な MOC 計算コードでは中性子の飛行方向に `transport sweep` を行い、このような計算方法をとらないため、輸送計算モジュールを改良する必要がある。ただし、MOC 計算コードによっては、計算の高速化のため、同一のレイトレース上で順方向と逆方向を合わせて `transport sweep` することも多く、このような場合、改良は比較的小規模で済む。

二つ目は、ある方向の角度中性子束の反復計算中は角度中性子束の値を保持することである。一般的な MOC 計算コードでは、ある領域ある方向の角度中性子束からその領域の全中性子束への寄与成分を計算し、すべての方向について和をとることで全中性子束を求める。このとき次の領域の角度中性子束計算に移ったとき、前の領域の角度中性子束の値は破棄される（計算全体を通じて保持されない）。これは計算メモリ削減のためであるとともに、

一般的な中性子輸送計算では角度中性子束ではなく全中性子束を解として出力したいためである。角度中性子束は空間および角度依存性を有するため、すべての角度中性子束の値を保持すると計算メモリが膨大となる。対して本手法では、ある ray trace 上の角度中性子束の反復計算中はその方向の角度中性子束の値を保持していなければならない。ただし、次の ray trace 上の角度中性子束反復計算に移行するときは、前の ray trace 上の角度中性子束の値は破棄してよい。従って、一つ目の改良点と併せてこの点についても注意する必要がある。

以上の二点の改良を施すことで、既存 MOC 計算コードでも EPDF を適用した MOC 計算が可能となる。本改良は、even-parity 角度中性子束に関する輸送計算コードを作成するよりも簡易である。多次元多群非均質輸送計算コード GENESIS[12][13]では、本方法により EPDF を適用した MOC 計算を実行している[8]。

EPDF を求める計算手順と EPDF の更新方法を述べる。空間均質化を例として、MOC 計算による EPDF 計算の計算手順を以下に示す。

step 1) 非均質体系において MOC 計算を行う。

step 2) 空間均質化により、非均質計算に基づく領域平均全中性子束分布 $\phi_{g,i}^{hetero}$ および均質化断面積を求める。

step 3) EPDF を 1.0 に初期化する。

step 4) 均質体系において EPDF を適用した MOC 計算を実行する。これにより均質計算に基づく領域平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を得る。

step 5) 非均質計算と EPDF を適用した均質計算で、体系全体の全中性子束の体積積分値が一致するように、均質計算に基づく領域平均全中性子束を式(3.4.30)により規格化する。これにより規格化均質計算に基づく領域平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を求める。これは SPH 因子の計算と同様である。

$$\phi_{g,i}^{homo} = \phi_{g,i}^{homo} \frac{\sum_g \sum_i \phi_{g,i}^{hetero} V_i}{\sum_g \sum_i \phi_{g,i}^{homo} V_i} \quad (3.4.30)$$

step 6) 式(3.4.31)から EPDF を更新する。ここで f は EPDF、 ℓ は EPDF 計算の反復回数を表す。本式は、EPDF が even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式に対する SPH 因子の逆数という関係に基づく。

$$f_{g,i}^{\ell+1} = f_{g,i}^{\ell} \frac{\phi_{g,i}^{homo}}{\phi_{g,i}^{hetero}} \quad (3.4.31)$$

step 7) EPDF が収束するまで step)4-6 を繰り返す。EPDF が収束判定基準を満たしたら計算終了。

また計算フローを図 3.4.2 に示す。上記の計算手順および計算フロー図から分かるとおり、EPDF の計算手順は SPH 法と同様である。ただし、離散化誤差低減パラメータを適用した輸送計算方法と離散化誤差低減パラメータの更新式が異なる。

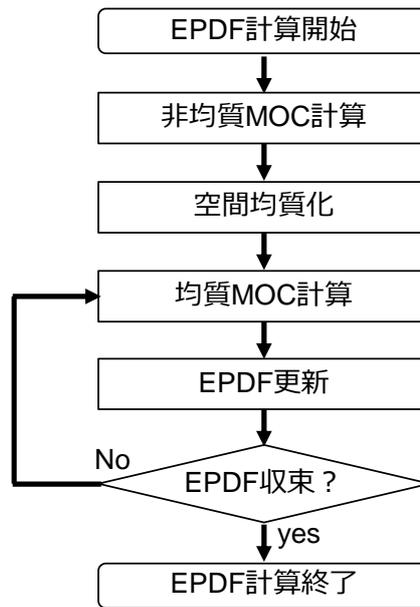


図 3.4.2 MOC による EPDF 計算フロー

以上が空間均質化を伴う場合の MOC 計算による EPDF の計算手順である。角度分割数やエネルギー群の縮約のみを行い、空間均質化を行わない場合は、非均質 MOC 計算および均質 MOC 計算の代わりに、同一空間領域構造で詳細な計算条件と粗い計算条件の輸送計算をそれぞれ行う。

最後に、不連続因子および SPH 因子と比較したときの EPDF の性質を以下に示す。

- EPDF は不連続因子や SPH 因子同様に領反応率を保存する役割を持つが、領域境界ではなく領域毎に定義されるという SPH 因子の性質と、領域境界の全中性子束の不連続性を表すという不連続因子の性質を兼ね備えている。
- SPH 因子は、制御棒などの中性子強吸収材を含む領域では収束不安性が確認され、計算が収束せず正確な値が求まらない場合がある。一方で、SPH 因子が発散する場合でも EPDF は安定して収束することが確認されている[8]。従って、数値計算の安定性の観点では EPDF の方が有用である可能性が高い。しかし参考文献[8]では、角度分割数の縮約のみを行い空間均質化は行っていない。そのため、空間均質化やエネルギー群縮約を行う場合の EPDF の収束性についてはさらなる検証が必要である。
- SPH 法では巨視的断面積に SPH 因子をかけて補正する形式のため、巨視的断面積の値を陽的に扱い SPH 因子の値を保持しなくてよい。対して、EPDF と不連続因子では巨視的断面積と離散化誤差低減パラメータの両方を保持する必要がある。
- 完全反射境界条件を用い非均質体系を一つの均質領域に均質化する場合（例えば、単一集合体体系で集合体均質化を行う場合）、体系内の反応率は完全に保存されるため EPDF は 1.0 となる。これは SPH 因子と同様である。

- 不連続因子や SPH 因子は拡散方程式と輸送方程式の両方に適用可能であるが、EPDF は輸送方程式にのみ適用可能である。これは EPDF が even-parity 角度中性子束に対して適用されるためである。なお、拡散方程式における不連続因子は、輸送計算における EPDF に相当するものと考えて良い。

3.5 本章のまとめ

本章では、中性子輸送計算における決定論的手法に対して適用される代表的な離散化誤差低減手法である不連続因子、Superhomogenization (SPH) 法、領域毎 even-parity 不連続因子 (EPDF) の理論と計算方法、主な性質をそれぞれ述べた。

不連続因子は、限られた数の境界条件のみを用いる必要がある場合、ある物理量の不連続性を許容することで別の物理量の連続性を保存するために用いられる。中性子輸送計算では、空間、角度、エネルギー離散化方法の異なる計算間で離散化誤差を低減し領域平均反応率を保存することができる。例えば、空間均質化を行う場合、不連続因子を用いることで均質化体系でも非均質体系の領域平均反応率を再現可能となる。拡散方程式では、領域境界全中性子束の空間的不連続性を不連続因子で扱うことで、領域境界正味中性子流 (漏洩率) を保存している。本手法は近代ノード法による炉心計算でよく利用される。この時不連続因子は非均質体系と均質体系の領域境界全中性子束の比から計算される。非線形収束加速法でも、詳細計算と加速計算で全中性子束の不連続性を不連続因子 (中性子流補正係数) で扱い、正味中性子流を保存しているといえる。また、輸送方程式でも不連続因子は利用されるが、全中性子束以外の物理量にも適用されており様々な定義が提案されている。

SPH 法は、SPH 因子と呼ばれる補正因子を領域毎の巨視的断面積に乗じることで、領域内平均反応率を保存する。これにより、異なる離散化モデルの中性子輸送計算間の離散化誤差を低減する。SPH 法は、すべての巨視的断面積に SPH 因子を乗じる Direct 法と、漏洩率 (全断面積の逆数、拡散係数) と反応率 (全断面積および他の断面積) の両方に SPH 因子を乗じる Simultaneous 法がある。SPH 因子は中性子輸送計算自体を反復することで求められる。そのため計算体系や計算条件によっては、SPH 因子の収束性が悪化し収束解が得られない場合がある。SPH 因子は領域毎に値が決定できることや、SPH 因子を陽的に扱う必要がないことから、pin-by-pin 均質計算を用いる炉心解析でよく利用される。

EPDF は、even-parity 角度中性子束に対して適用される不連続因子であり、領域境界ではなく領域毎に値を決定する。EPDF では、全中性子束に相当する even-parity 角度中性子束の不連続性を扱い、中性子流に相当する odd-parity 角度中性子束を保存する。EPDF を適用した輸送計算は、even-parity 角度中性子束に関する二階微分の輸送方程式を解くことで実行できる。しかし、現行の輸送計算コードでは角度中性子束と EPDF の関係式に基づいて角度中性子束に関する反復計算を行っている。これにより大幅な計算コードの改良を行わずに EPDF を扱う輸送計算を実行できる。EPDF は、SPH 因子同様に中性子輸送計算自体を反復させて求められる。

3.6 参考文献

- [1]. K. SMITH, “Assembly Homogenization Techniques for Light Water Reactor Analysis,” *Prog. Nucl. Energy*, **17**, 303–335 (1986).
- [2]. 奥村啓介, “近代ノード法と不連続因子の基礎,” 81–102, 日本原子力学会 (2004).
- [3]. 山本章夫, “炉心解析手法講義資料 7.近代ノード法”, 名古屋大学大学院工学研究科山本研究室; <https://www.fermi.energy.nagoya-u.ac.jp/research.html> (2021年12月31日現在).
- [4]. 坂本達哉, “中性子輸送計算における不連続因子に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2014).
- [5]. A. YAMAMOTO, “Utilization of Discontinuity Factor in Integro-Differential Type of Boltzmann Transport Equation,” *PHYSOR 2010*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, May 9–14, 2010 (2010).
- [6]. A. YAMAMOTO, T. ENDO, and Y. CHAO, “A Derivation of Discontinuity Factor for Angular Flux in Integro-Differential Transport Equation,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **104**, 815 (2011).
- [7]. T. SAKAMOTO, T. ENDO, and A. YAMAMOTO, “Applicability of Angular Flux Discontinuity Factor Preserving Region-Wise Leakage for Integro-Differential Transport Equation,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **51**, 1264 (2014); <http://dx.doi.org/10.1080/00223131.2014.919882>.
- [8]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Utilization of Regionwise Even-Parity Discontinuity Factor to Reduce Discretization Error of MOC,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 253 (2019); <https://doi.org/10.1080/00295639.2019.1579514>.
- [9]. G. CHIBA et al., “A Note on Application of Superhomogenization Factors to Integro-Differential Neutron Transport Equations,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **49**, 272 (2012); <https://doi.org/10.1080/00223131.2011.649083>.
- [10]. 澤田憲人, “微積分型輸送方程式における SPH 方の適用性に関する検討,” 名古屋大学工学部, 卒業論文 (2019).
- [11]. 多田健一, “空間均質化誤差低減手法と高速化手法, 123–162, 日本原子力学会 (2018).
- [12]. A. YAMAMOTO et al., “GENESIS: A Three-Dimensional Heterogeneous Transport Solver Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 1–22 (2017).
- [13]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Recent Developments in the GENESIS Code Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Eng. Technol.*, **49**, 1143–1156 (2017).

第4章 非線形収束加速法の空間離散化および角度離散化と収束性の関係に関する検討

4.1 本章の概要

非線形収束加速法の収束性は光学距離や散乱比などに依存することが明らかになっている。加速法では中性子流に関する補正項を導入することで、詳細計算モデルと加速計算モデルの近似の差異を解消し、加速計算による収束加速を実現化している。ここでいう詳細計算とは加速される側の高次の輸送計算、加速計算とは加速法適用により実施される低次の輸送もしくは拡散計算を指す。加速計算モデルが詳細計算と同一であった場合、詳細計算は反復一回で収束する。対して、詳細計算と加速計算でモデルの乖離がある場合、詳細計算の収束には複数回の反復を要する。

そのため詳細計算モデルと加速計算モデルとの乖離度合が、加速法の収束性を決定している可能性がある。加速計算モデルと輸送計算モデルの乖離が大きいほど収束性は悪化し、乖離が小さいほど収束性は向上すると推測される。従って、詳細計算と同等な、高次の輸送計算モデルを採用した加速法を用いることでさらなる収束性向上が期待される。

そこで本章では、非線形収束加速法の空間離散化および角度離散化モデルが計算全体の収束性に与える影響を解析的および数値的に評価する。本検討では、従来の非線形収束加速法とは異なる計算モデルに基づく加速法を提案し、それら加速法の収束性を評価および比較することで、詳細計算と加速法の空間離散化および角度離散化モデルの乖離が収束性に与える影響を系統的かつ定量的に評価する。

4.2 節では、本検討の背景と目的について述べる、さらに。4.3 節では、本検討で取り扱う空間および角度離散化モデルについてまとめるとともに、新たに提案する 4 つの非線形収束加速法の概要と計算手順をそれぞれ示す。提案する 4 つの非線形収束加速法は、中性子源空間離散化モデルに Flat Source (FS) 近似か Linear Source (LS) 近似を、角度離散化モデルに P1 近似 (拡散近似) か離散角度求積近似か、をそれぞれ用いる。また、角度離散化モデルによって補正項の定義が異なる。4.4 節では、線形化フーリエ解析および数値計算による収束性評価の結果と考察を示す。収束性評価は、エネルギー1 群均質平板体系で実施した。最後に 4.5 節では本章のまとめ、4.6 節では本章の参考文献をそれぞれ示す。

4.2 本章の目的

CMFD 加速法[1]は、FS MOC に基づく多次元中性子輸送計算コードに実装されている、有用な非線形収束加速法である[2]–[6]。CMFD 加速法を適用することで、輸送計算の反復回数低減や計算時間短縮を達成することができる。光学距離が大きいと収束不安定性が現れ加速計算が正しく収束しない場合があるが、現在では CMFD 加速法で用いる拡散係数の補正や[7]–[11]、新たな加速法の提案[12]–[15]により、CMFD 加速計算の安定性や収束性を向上させている。また近年は、LS MOC[16]に基づく多次元中性子輸送計算コードに対しても CMFD 加速法の適用が行われており、その有用性が示されている[17]–[25]。

多くの収束性解析により MOC に対する CMFD 加速法の収束性は、散乱比や粗メッシュ光学距離に依存することが明らかになっている[26]–[32]。同様に、詳細計算と加速計算の空間および角度離散化モデルの乖離が、収束性に影響を及ぼすと推測される。ここで、空間および角度離散化モデルとは、加速計算における補正項を除いた空間および角度に関する近似を表しており、その乖離とは近似の差異を表している。

収束加速法の原理より、加速法の収束性は詳細計算と加速計算モデルの乖離に依存すると考えられる。例えば、詳細計算と加速計算で同一の計算モデルを用いる場合、詳細計算の反復は加速計算に置き換えられるため、詳細計算は1回の反復で収束する。しかし、詳細計算と加速計算の間で計算モデルの乖離が大きくなると、詳細計算の反復回数は増加する。これは詳細および加速計算モデルの空間離散化、エネルギー離散化、角度離散化の方法によって決定される。しかし、先行研究においてこれら離散化モデルと収束性との関係の系統的評価は行われていない。加速計算モデルに詳細な離散化モデルを採用することで、加速法の収束性をより向上できる可能性がある。

また、LS MOC に対する非線形収束加速法の収束性についても明示的な検討はされていない。大型炉心体系計算における LS MOC に対する CMFD 加速法の有用性および実用性は示されているが、LS MOC においても CMFD 加速法が散乱比や光学距離に依存せず安定して収束するか否かは明示的に示されていない。FS MOC に対して安定して収束した非線形収束加速法が、LS MOC では収束不安定性を示す可能性がある。また、LS MOC に対しても加速法との計算モデル乖離が収束性に及ぼす影響は評価されていない。LS 近似もしくは離散角度求積近似を用いた加速法を適用することで、より効率的に収束を加速できる可能性がある。

そこで本章では、詳細計算と加速計算間の空間および角度離散化モデルの乖離が収束性に及ぼす影響を系統的に評価することを目的とする。また併せて、LS MOC に対する非線形加速法の収束性も評価する。方法として、空間および角度離散化モデルの異なる詳細計算モデルと加速計算モデルをそれぞれ考え、それらの組み合わせ毎に収束性評価を行う。各組合せ間の計算モデルの差異と収束性評価結果を比較することで、特定の計算モデルが収束性に及ぼす影響を定量的に評価する。

詳細計算モデルには FS MOC および LS MOC を用いる。加速計算モデルには従来の CMFD 加速法に、本検討で新たに提案する4つの非線形収束加速法を加えた計5つの非線形収束加速法を用いる。これら加速法はすべて空間および角度離散化モデルが異なる。従って、ある詳細計算モデルに対する各加速法の収束性を比較することで、計算モデルが収束性に及ぼす影響を定量的かつ系統的に評価できる。なお、エネルギー群離散化（縮約）が収束性の及ぼす影響については、先行研究により類似の検討がなされているため本検討では除外する[28]。

以上より、本検討は以下のことを目的とする。

- FS MOC および LS MOC に対する非線形収束加速法の空間および角度近似が収束性に及

ばす影響の評価

- LS MOC に対する従来の加速法の収束性評価
- LS 近似もしくは離散角度求積近似を用いた加速法の収束性評価

4.3 提案する非線形収束加速法

4.3.1 各手法の概要

本検討では従来の CMFD 加速法に、新たに提案する 4 つの非線形収束加速法を合わせた計 5 つの非線形収束加速法の収束性を評価する。表 4.3.1 に各加速法の空間および角度離散化モデルと補正項の定義をそれぞれまとめる。提案する 4 種の加速法は、空間離散化モデルに FS 近似か LS 近似、角度離散化モデルに P1 近似か離散角度求積近似、のいずれかをそれぞれ用いている。ここで、離散角度求積近似とは、角度中性子束を離散化し求積法によって全中性子束を求める方法であり、本論文では MOC における角度離散化および求積方法を指す。 \hat{D} は中性子流補正係数、 DF は不連続因子をそれぞれ表す。以下にそれぞれの非線形収束加速法の特徴を示す。

表 4.3.1 各非線形収束加速法の空間および角度離散化モデルと補正項の定義

加速法	空間離散化モデル	角度離散化モデル	補正項の定義 (補正項の適用先)	補正項で保存されるパラメータ
CMFD	有限差分近似	P1 近似	$\hat{D}(\phi_i + \phi_{i+1})$ (正味中性子流)	正味中性子流
FS ACMFD	Flat source 近似	P1 近似	$\hat{D}(\phi_i + \phi_{i+1})$ (正味中性子流)	正味中性子流
LS ACMFD	Linear source 近似	P1 近似	$\hat{D}(\phi_i + \phi_{i+1})$ (正味中性子流)	正味中性子流
FS ADMOC	Flat source 近似	離散角度求積近似	DF (角度中性子束)	部分中性子流
LS ADMOC	Linear source 近似	離散角度求積近似	DF (角度中性子束)	部分中性子流

CMFD 加速法は第 2 章でも示したとおり、空間離散化モデルに有限差分近似、角度離散化モデルに P1 近似を用いる。このとき補正項は、空間メッシュ間の正味中性子流に対して定義される。補正項を用いることで、空間メッシュ間の正味中性子流（中性子漏洩率）が保存され、各空間メッシュ内の反応率が保存される。

Flat Source Analytic CMFD (FS ACMFD) 加速法は、空間離散化モデルに FS 近似、角度離散化モデルに P1 近似を用いる。FS ACMFD 加速法は、1 次元拡散方程式の解析解を用いて中性子流差分式を解析的に導出する。このとき、1 次元拡散方程式の中性子源が空間メッシ

メッシュ内で平坦であると明示的に仮定する（FS 近似, 平坦中性子源近似）。本手法は近代ノード法における ACMFD 法を加速計算に応用した手法である[33]。なお詳細は次項以降に述べるが、FS 近似を明示的に仮定せずに中性子流差分式を導出することも可能であり、その場合収束性は変化する。補正項は CMFD 加速法と同様に、正味中性子流に対して定義され正味中性子流を保存する。

Linear Source Analytic CMFD (LS ACMFD) 加速法は、空間離散化モデルに LS 近似、角度離散化モデルに P1 近似を用いる。LS ACMFD 加速法は、FS ACMFD 加速法と概ね同様の手法だが、1 次元拡散方程式の中性子源が空間メッシュ内で線形であると明示的に近似する（LS 近似, 線形中性子源近似）。なお本章における LS ACMFD 加速法では、中性子源 1 次展開係数（空間メッシュ内の傾き）の相対的な空間分布外形を加速計算中に固定するが、加速計算の反復毎に相対的な空間分布外形を更新することも可能である。加速計算の反復毎に中性子源 1 次成分を更新する LS ACMFD 加速法については Appendix B で述べる。

Flat Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC (FS ADMOC) 加速法は、空間離散化モデルに FS 近似、角度離散化モデルに離散角度求積近似を用いる。FS ADMOC 加速法は、FS MOC を加速計算モデルに採用した手法である。このとき加速計算の角度分点数および分点セットは詳細計算である MOC とは別に、任意に設定できる。補正項は角度中性子束に対して不連続因子として定義される。不連続因子を用いることで、空間メッシュ間の部分中性子流が保存される。

Linear Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC (LS ADMOC) 加速法は、空間離散化モデルに LS 近似、角度離散化モデルに離散角度求積近似を用いる。LS ADMOC 加速法は、LS MOC を加速計算モデルに採用した手法である。補正項は FS ADMOC 加速法同様に、角度中性子束に対する不連続因子として定義され、部分中性子流を保存する。

以上が本検討で用いる 5 つの非線形収束加速法の概要である。次項以降では、新たに提案する 4 つの加速法の概要と計算手順をそれぞれ示す。なお、本節では 1 次元体系に対する固定源計算を仮定した計算手順を示す。

4.3.2 Flat Source Analytic CMFD 加速法 (FS ACMFD)

FS ACMFD 加速法は、空間離散化モデルに FS 近似、角度離散化モデルに P1 近似を用いる。FS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式は、1 次元拡散方程式の解析解を用いて解析的に導出される。FS ACMFD 加速法の全体の計算手順は CMFD 加速法と同様である。CMFD 加速法と異なるのは、正味中性子流差分式のみである。

FS ACMFD 加速法の中性子流差分式を導出する。FS 近似を明示的に仮定した場合の 1 次元拡散方程式とその解析解は下式のとおりである。

$$-D_{g,i} \frac{d^2}{dx^2} \phi_{g,i}(x) + \Sigma_{t,g,i} \phi_{g,i}(x) = \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{g',i} + q_{f,g,i} = q_{g,i} \quad (4.3.1)$$

$$\phi_{g,i}(x) = A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i}x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i}x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}}, \quad (4.3.2)$$

ここで、

$$\kappa_{g,i} = \sqrt{\Sigma_{t,g,i}/D_{g,i}}, \quad (4.3.3)$$

g はエネルギー群、 i は空間メッシュ、 D は拡散係数、 Σ_t は巨視的全断面積、 Σ_s は巨視的散乱断面積、 $\phi(x)$ はメッシュ内の全中性子束分布、 ϕ_i はメッシュ平均全中性子束、 q_f は核分裂中性子源、 q は等方中性子源、 A および B は未定定数をそれぞれ表している。

このとき FS 近似は自群散乱中性子源を含む全ての中性子源に対して適用される。輸送計算手法では、自群散乱源を含む中性子源に対して FS 近似を適用する。対して、拡散計算では自群散乱中性子源を左辺に移項し、除去断面積を用いる。すなわち自群散乱中性子源の空間メッシュ内分布概形を明示的に仮定しない。FS ACMFD 加速法では詳細計算（輸送計算手法）と加速計算間の空間離散化モデルの整合性の観点から、自群散乱中性子源を含む中性子源に対して FS 近似を明示的に仮定する。これにより従来 CMFD 加速法に比べ計算モデル整合性を向上した加速法となる。なお、FS 近似を明示的に仮定せずに中性子流差分式を導出することも可能であり、当該導出は本項末尾に記述する。

次に拡散方程式に基づいて正味中性子流の差分式を導出する。このとき 2 ノード（メッシュ）間と 1 ノード端で正味中性子流差分式が異なる。以下に 2 ノード問題および 1 ノード問題における正味中性子流差分式をそれぞれ導出する。

• 2 ノード問題

空間メッシュ i および $i+1$ から成る 2 ノード問題を考える。ここで Δx_i および Δx_{i+1} は空間メッシュ i および $i+1$ のメッシュサイズを表す。空間メッシュ $i+1$ に対しても、拡散方程式および解析解を以下のとおり立式できる。

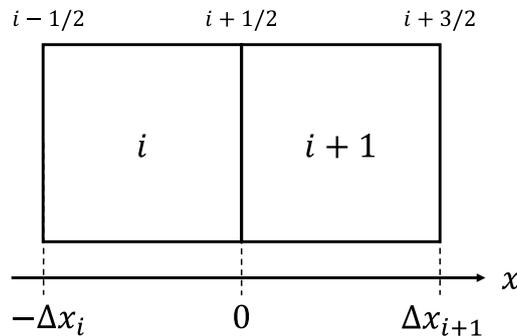


図 4.3.1 2 ノード問題

$$-D_{g,i+1} \frac{d^2}{dx^2} \phi_{g,i+1}(x) + \Sigma_{t,g,i+1} \phi_{g,i+1}(x) = q_{g,i+1}, \quad (4.3.4)$$

$$\phi_{g,i+1}(x) = A_{g,i+1} \exp(\kappa_{g,i+1}x) + B_{g,i+1} \exp(-\kappa_{g,i+1}x) + \frac{q_{g,i+1}}{\Sigma_{t,g,i+1}}, \quad (4.3.5)$$

$$\kappa_{g,i+1} = \sqrt{\Sigma_{t,g,i+1}/D_{g,i+1}}. \quad (4.3.6)$$

式(4.3.1)–(4.3.6)には $A_{g,i}, B_{g,i}, A_{g,i+1}, B_{g,i+1}$ の4つの未定定数が含まれる。従ってこれら未定定数を求めるためには、2ノード問題に対して4つの束縛条件が必要となる。そこで、式(4.3.7)–(4.3.10)に示す束縛条件を考える。式(4.3.7)および(4.3.8)はメッシュ境界の全中性子束および中性子流の連続、式(4.3.9)および(4.3.10)はメッシュ平均全中性子束の保存をそれぞれ表している。

$$\phi_{g,i}(0) = \phi_{g,i+1}(0), \quad (4.3.7)$$

$$-D_{g,i} \left. \frac{d\phi_{g,i}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{g,i+1} \left. \frac{d\phi_{g,i+1}(x)}{dx} \right|_{x=0}, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{-\Delta x_i}^0 \phi_{g,i}(x) dx = \phi_{g,i}, \quad (4.3.9)$$

$$\frac{1}{\Delta x_{i+1}} \int_0^{\Delta x_{i+1}} \phi_{g,i+1}(x) dx = \phi_{g,i+1}. \quad (4.3.10)$$

式(4.3.1)–(4.3.6)に式(4.3.7)–(4.3.10)を代入し整理すると、正味中性子流差分式は式(4.3.11)のとおり求まる。計算過程は複雑なため省略するが、計算には Mathematica を用いるのを推奨する[34]。

$$J_{g,i+1/2} = -\tilde{D}_{g,i+1,x-} (1 + \gamma_{g,i+1} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1}) \phi_{g,i+1} + \tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i+1/2}^{FS}, \quad (4.3.11)$$

ここで、

$$\tilde{D}_{g,i+1,x-} = \frac{2D_{g,i}^* D_{g,i+1}^*}{D_{g,i}^* \Delta x_{i+1} + D_{g,i+1}^* \Delta x_i} f_{g,i}, \quad (4.3.12)$$

$$\tilde{D}_{g,i,x+} = \frac{2D_{g,i}^* D_{g,i+1}^*}{D_{g,i}^* \Delta x_{i+1} + D_{g,i+1}^* \Delta x_i} f_{g,i+1}, \quad (4.3.13)$$

$$D_{g,i}^* = D_{g,i} \frac{\cosh(\tau_{g,i})}{\sinh(\tau_{g,i})} \tau_{g,i}, \quad (4.3.14)$$

$$f_{g,i} = \frac{1}{\sinh(\tau_{g,i}) \cosh(\tau_{g,i})} \tau_{g,i}, \quad (4.3.15)$$

$$\tau_{g,i} = \frac{\Delta x_i \kappa_{g,i}}{2}, \quad (4.3.16)$$

$$S_{g,i+1/2}^{\text{FS}} = -\tilde{D}_{g,i+1,x-}\gamma_{g,i+1}(q_{g,i+1} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1}\phi_{g,i+1}) + \tilde{D}_{g,i,x+}\gamma_{g,i}(q_{g,i} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}\phi_{g,i}), \quad (4.3.17)$$

$$\gamma_{g,i} = \frac{-2\tau_{g,i} + \sinh(2\tau_{g,i})}{2\tau_{g,i}(\kappa_{g,i})^2 D_{g,i}}, \quad (4.3.18)$$

J は正味中性子流、 \tilde{D} は拡散係数から成る結合係数である。下付き文字の $x+$ 、 $x-$ はそれぞれ $x+$ 側および $x-$ 側メッシュ表面を表している。以上より、2ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.11)のとおり導出できた。

• 1ノード問題

1ノード問題ではメッシュ i のみを扱うため未定定数は $A_{g,i}$ と $B_{g,i}$ の2つであるため、制約条件も2つでよい。ただし、 $x-$ 側と $x+$ 側のどちらが体系境界かによって座標系が異なる。以下では、 $x-$ 側および $x+$ 側が体系境界の場合についてそれぞれ示す。

(a) $x-$ 側境界が体系境界の場合

ここでは下図に示す座標系を用いる。 $x-$ 側が体系境界の場合の1ノード問題では式(4.3.19)および(4.3.20)に示す制約条件を用いる。式(4.3.19)は体系境界における中性子流の保存、式(4.3.20)はメッシュ平均全中性子束の保存をそれぞれ表している。

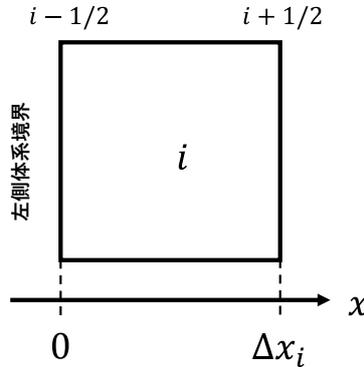


図 4.3.2 1ノード問題における座標系 ($x-$ 側が体系境界)

$$2 \frac{1 + \alpha_{x-}}{1 - \alpha_{x-}} D_{g,i} \left. \frac{d\phi_{g,i}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \phi_{g,i}(0), \quad (4.3.19)$$

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}(x) dx = \phi_{g,i}, \quad (4.3.20)$$

ここで、 α_{x-} は $x-$ 側体系境界のアルベド値である。ここで式(4.3.19)の導出を説明する。アルベド値 α は入射部分中性子流 J^- に対する放出部分中性子流 J^+ の割合を表しており、 $\alpha = 1$ のとき完全反射境界条件、 $\alpha = 0$ のとき真空境界条件となる。なお $\alpha = 1$ の場合、式(4.3.19)左辺の α に関する分数部分は右辺に移項され $J^- = 0$ となる。

$$J^- = \alpha J^+. \quad (4.3.21)$$

拡散理論では体系境界の部分中性子流と正味中性子流 J および全中性子束 ϕ の間に以下の関係がある。

$$J^+ = \frac{1}{4}\phi - \frac{1}{2}, \quad (4.3.22)$$

$$J^- = \frac{1}{4}\phi + \frac{1}{2}J. \quad (4.3.23)$$

式(4.3.22)および(4.3.23)を式(4.3.19)に代入し、正味中性子流 J に対して拡散近似を適用することで、式(4.3.19)が導出される。

メッシュ i に関する1次元拡散方程式およびその解析解である式(4.3.1)–(4.3.3)に式(4.3.19)および(4.3.20)を代入し整理すると、 x -体系境界における正味中性子流差分式は下式のとおり導出される。

$$J_{i-1/2} = -\tilde{D}_{g,i,x-} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i}^{FS}, \quad (4.3.24)$$

ここで、

$$\tilde{D}_{g,i,x-} = \frac{2D_{g,i}^*}{\Delta x_i + 4D_{g,i}^* \frac{1 + \alpha_{x-}}{1 - \alpha_{x-}}} f_{g,i}, \quad (4.3.25)$$

$$S_{g,i}^{FS} = -\tilde{D}_{g,i,x-} \gamma_{g,i} (q_{g,i} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i} \phi_{g,i}), \quad (4.3.26)$$

であり、その他のパラメータの定義は式(4.3.14)–(4.3.16)および(4.3.18)と同様である。なお $\alpha = 1$ のとき $J_{i-1/2} = 0$ として以降の加速計算を行う。以上より、 x -側が体系境界の場合の1ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.24)のとおり導出できた。

(b) x +側境界が体系境界の場合

ここでは下図に示す座標系を用いる。 x +側が体系境界の場合の1ノード問題では式(4.3.27)および(4.3.28)に示す制約条件を用いる。式(4.3.27)は体系境界における中性子流の保存、式(4.3.28)はメッシュ平均全中性子束の保存をそれぞれ表している。

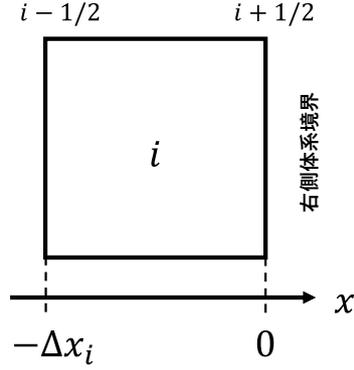


図 4.3.3 1 ノード問題における座標系 (x+側が体系境界)

$$-2 \frac{1 + \alpha_{x+}}{1 - \alpha_{x+}} D_{g,i} \left. \frac{d\phi_{g,i}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \phi_{g,i}(0), \quad (4.3.27)$$

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{-\Delta x_i}^0 \phi_{g,i}(x) dx = \phi_{g,i}, \quad (4.3.28)$$

ここで、 α_{x+} はx+側体系境界のアルベド値である。

メッシュ*i*に関する 1 次元拡散方程式およびその解析解である式(4.3.1)–(4.3.3)に式(4.3.27)および(4.3.28)を代入し整理すると、x+側体系境界における正味中性子流差分式は下式のとおり導出される。

$$J_{i+1/2} = \tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i}^{FS}, \quad (4.3.29)$$

ここで、

$$\tilde{D}_{g,i,x+} = \frac{2D_{g,i}^*}{\Delta x_i + 4D_{g,i}^* \frac{1 + \alpha_{x+}}{1 - \alpha_{x+}}} f_{g,i}, \quad (4.3.30)$$

$$S_{g,i}^{FS} = \tilde{D}_{g,i,x+} \gamma_{g,i} (q_{g,i} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i} \phi_{g,i}), \quad (4.3.31)$$

であり、その他のパラメータの定義は式(4.3.14)–(4.3.16)および(4.3.18)と同様である。以上より、x+側が体系境界の場合の 1 ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.29)のとおり導出できた。

式(4.3.11), (4.3.24)および(4.3.29)の中性子流差分式に補正項を加えることで、FSACMFD 加速法における 2 ノード間の中性子流差分式が得られる。この補正項は CMFD 加速法と同様の方法で導入される。

- 2 ノード問題

$$J_{g,i+1/2}^{\text{FSACMFD}} = -\tilde{D}_{g,i+1,x-}(1 + \gamma_{g,i+1}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1})\phi_{g,i+1} + \tilde{D}_{g,i,x+}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i} + S_{g,i+1/2}^{\text{FS}} + \hat{D}_{g,i+1/2}(\phi_{g,i+1} + \phi_{g,i}), \quad (4.3.32)$$

ここで J^{FSACMFD} は FS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式である。 \hat{D} は正味中性子流補正係数であり、詳細計算で得られた正味中性子流および全中性子束から下式のとおり求まる。

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \left(J_{g,i+1/2}^{\text{fine}} - \left(-\tilde{D}_{g,i+1,x-}(1 + \gamma_{g,i+1}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1})\phi_{g,i+1}^{\text{fine}} + \tilde{D}_{g,i,x+}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i}^{\text{fine}} + S_{g,i+1/2}^{\text{FS}} \right) \right) / (\phi_{g,i+1}^{\text{fine}} + \phi_{g,i}^{\text{fine}}). \quad (4.3.33)$$

ここで J^{fine} および ϕ^{fine} は詳細計算で得られた正味中性子流および全中性子束を表す。

- 1 ノード問題

- (a) x 側境界が体系境界の場合

$$J_{g,i-1/2}^{\text{FSACMFD}} = -\tilde{D}_{g,i,x-}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i} + S_{g,i}^{\text{FS}} + \hat{D}_{g,i+1/2}\phi_{g,i}, \quad (4.3.34)$$

ここで、

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \left(J_{g,i-1/2}^{\text{fine}} - \left(-\tilde{D}_{g,i,x-}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i}^{\text{fine}} + S_{g,i}^{\text{FS}} \right) \right) / \phi_{g,i}^{\text{fine}} \quad (4.3.35)$$

- (b) x +側境界が体系境界の場合

$$J_{g,i+1/2}^{\text{FSACMFD}} = \tilde{D}_{g,i,x+}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i} + S_{g,i}^{\text{FS}} + \hat{D}_{g,i+1/2}\phi_{g,i}, \quad (4.3.36)$$

ここで、

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \left(J_{g,i+1/2}^{\text{fine}} - \left(\tilde{D}_{g,i,x+}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i}^{\text{fine}} + S_{g,i}^{\text{FS}} \right) \right) / \phi_{g,i}^{\text{fine}} \quad (4.3.37)$$

以上より、FS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式は式(4.3.32), (4.3.34)および(4.3.36)のとおり求まる。FS ACMFD 加速法の計算手順は CMFD 加速法と同様である。すなわち FS ACMFD 加速法では、式(4.3.32), (4.3.34)および(4.3.36)を用いて中性子バランス方程式を解くことで全中性子束分布を計算する。得られた全中性子束分布から rebalance factor を計算し、詳細計算の全中性子束分布を更新する。

式(4.3.11), (4.3.24)および(4.3.29)は、有限差分近似を用いず解析的に導出される。従って、FS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式には、FS 近似を除いて空間離散化に起因する離散化誤差が含まれない。また、メッシュサイズ Δx_i および Δx_{i+1} が非常に小さく 0.0 に近

づくほど、式(4.3.11), (4.3.24)および(4.3.29)はCMFD加速法における正味中性子流差分式、すなわち有限差分近似により導出される差分式に漸近する。

式(4.3.32)とCMFD加速法の正味中性子流差分式を比較すると、相違点が二点ある。一つ目は、結合係数 \bar{D} の定義が異なる点である。CMFD加速法では、メッシュ境界に対して1つの結合係数が定義されるが、ACMFD加速法では2つの結合係数が定義される。2つの結合係数はメッシュ境界を共有する2つの空間メッシュでそれぞれ異なる値が定義される。二つ目は、全中性子束を含まない定数項 S^{FS} が含まれる点である。CMFD加速法では全中性子束を含む項のみで正味中性子流差分式が表されるが、ACMFD加速法では全中性子束を含まない定数項 S が現れる。中性子バランス方程式を計算する際、 S^{FS} は右辺の中性子源項側に移項される。なお、式(4.3.11)および S^{FS} の式(4.3.17)を見ると、 $\gamma_g \Sigma_{s,g \rightarrow g} \phi_g$ の項は S^{FS} から差し引かれ、式(4.3.11)の右辺第一および二項に移項されていることが分かる。これは、 S^{FS} に $\gamma_g \Sigma_{s,g \rightarrow g} \phi_g$ の項が含まれていると、中性子バランス方程式の計算（内部反復）を行う際に、 S^{FS} に含まれる自群散乱中性子源の更新が必要となってしまうためである。

CMFD加速法とFS ACMFD加速法は角度離散化モデル（P1近似）が同等だが、空間離散化モデルが異なる。CMFD加速法では有限差分近似を用い、FS ACMFD加速法ではFS近似を用いる。従って、CMFD加速法とFS ACMFD加速法を比較することで、P1近似を用いる場合における空間離散化モデルの差異が収束性に及ぼす影響を評価できる。

最後に、自群散乱源にFS近似を仮定しないACMFD加速法の中性子流差分式を導出する。以降では、本手法をACMFD加速法と呼び、FS ACMFD加速法とは別手法として扱う。本手法では他エネルギー群への散乱源や核分裂源に対してはFS近似を適用している。自群散乱源にFS近似を明示的に仮定しない1次元拡散方程式およびその解析解は下式のとおりである。

$$-D_{g,i} \frac{d^2}{dx^2} \phi_{g,i}(x) + \Sigma_{r,g,i} \phi_{g,i}(x) = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{g',i} + q_{f,g,i} = q_{g,i} \quad (4.3.38)$$

$$\phi_{g,i}(x) = A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i} x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i} x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{r,g,i}}, \quad (4.3.39)$$

ここで、 $\kappa_{g,i}$ の定義は以下のとおりである。

$$\kappa_{g,i} = \sqrt{\Sigma_{r,g,i}/D_{g,i}}, \quad (4.3.40)$$

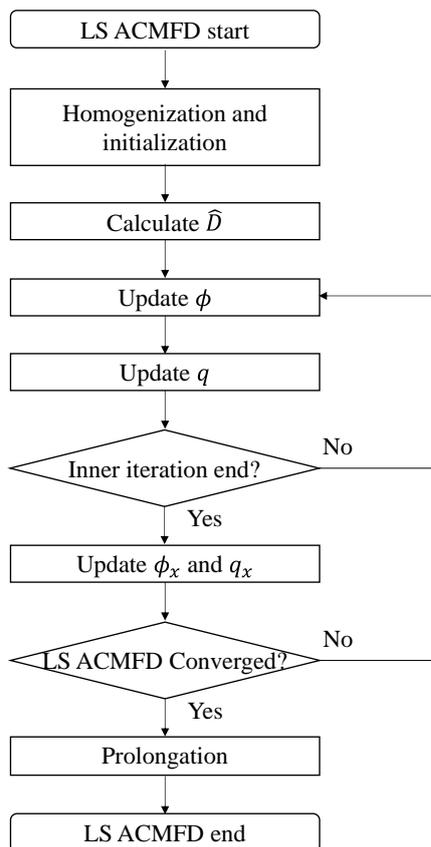
Σ_r は除去断面積である。本定義は、式(4.3.3)から分子が除去断面積に変化している点に注意すること。式(4.3.38)–(4.3.40)では、中性子源にFS近似を明示的に仮定する式(4.3.1)–(4.3.3)とは異なり、自群散乱中性子源が右辺に移項され除去断面積が用いられ、中性子源 $q_{g,i}$ および $\kappa_{g,i}$ の定義も異なる。これは、自群散乱中性子源のメッシュ内分布形状について明示的に仮定をとっていないことを示している。以降の正味中性子流差分式の導出手順はFS近似適用時と同様である。ただし、 $q_{g,i}$ および $\kappa_{g,i}$ の定義は式(4.3.38)および(4.3.40)に示される通り

であるため、FS 近似を 1 次元拡散方程式に適用するか否かで差分式に含まれる各種パラメータの値が異なる。従って、ACMFD 加速法の収束性は FS ACMFD 加速法とは異なる[14]。

4.3.3 Linear Source Analytic CMFD 加速法 (LS ACMFD)

LS ACMFD 加速法は、空間離散化モデルに LS 近似、角度離散化モデルに P1 近似を用いる。LS ACMFD 加速法では、LS 近似を明示的に仮定した一次元拡散方程式に基づいて正味中性子流差分式を導出する。LS ACMFD 加速法では中性子源 1 次展開係数（空間メッシュ内の傾き）を求める必要がある。本手法では重み付き残差法により中性子源および全中性子束の一次展開係数を求める。なお、FS MOC に LS ACMFD 加速法を適用した場合、中性子源一次展開係数は 0 となるため、LS ACMFD 加速法は FS ACMFD 加速法と等価な加速計算モデルとなる。

LS ACMFD 加速法の計算手順を図 4.3.4 に示す。



\hat{D} : Net neutron current correction factor
 ϕ_x, q_x : 1st order expansion coefficient of scalar flux and source
 ϕ, q : 0th order expansion coefficient of scalar flux and source
 (coarse mesh average scalar flux and source).

図 4.3.4 LS ACMFD 加速法の計算フロー

LS ACMFD 加速計算前に空間均質化において全中性子束一次展開係数および中性子源一次展開係数を計算する必要がある。まずメッシュ*i*の全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{WR}$ を、重み付き残差法により式(4.3.41)から求める。なおメッシュ平均均質化全中性子束 $\phi_{g,i}$ および断面積は、従来どおりメッシュ内反応率保存式から求める。

$$\int_0^{\Delta x_i} w_i(x) \phi_{g,i}^{WR}(x) dx = \sum_{k \in \bar{i}}^p \int_0^{\Delta x_k} w_i(x + x_{k-1}) \phi_{g,k}^{fine} dx, \quad (4.3.41)$$

ここで、 k は詳細計算の空間メッシュ、 p は粗メッシュ内の詳細メッシュ数（均質化される詳細メッシュ数）、 $w(x)$ は重み関数であり式(4.3.42)を用いる。 x_{k-1} は詳細メッシュ $k-1$ の左端の x 座標、 $\phi_{g,k}^{fine}$ は詳細計算で得られた全中性子束、 $\phi_{g,i}^{WR}(x)$ は重み付き残差法で求まる粗メッシュ内全中性子束分布であり式(4.3.43)に示される。 $\phi_{x,g,i}^{WR}$ は重み付き残差法で求まる全中性子束一次展開係数である。下付き文字 x は一次展開係数を表すインデックスである。ここで式(4.3.43)は粗メッシュ中心が原点となる座標系であることに注意すること。

$$w_i(x) = \frac{x - \Delta x_i}{\Delta x_i}, \quad 0 \leq x \leq \Delta x_i, \quad (4.3.42)$$

$$\phi_{g,i}^{WR}(x) = \phi_{g,i} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}^{WR}, \quad 0 \leq x \leq \Delta x_i, \quad (4.3.43)$$

式(4.3.41)は、粗メッシュ内全中性子束分布が一次関数 $\phi_{g,i}^{WR}(x)$ で近似できる場合に、詳細計算で得られた全中性子束分布との残差に重み関数をかけて積分した重み付き積分が 0 となるように（式(4.3.41)の両辺が一致するように）、全中性子束一次展開係数を求めている。

このとき粗メッシュ内中性子源分布 $q_{g,i}(x)$ を下式のとおり表す。このとき式(4.3.43)に示す全中性子束と座標の取り方が異なることに注意すること。

$$q_{g,i}(x) = q_{g,i} + q_{x,g,i}x, \quad 0 \leq x \leq \Delta x_i, \quad (4.3.44)$$

ここで、 $q_{g,i}$ はメッシュ平均中性子源（中性子源 0 次展開係数）、 $q_{x,g,i}$ は中性子源一次展開係数であり、それぞれ下式のとおり求まる。

$$q_{g,i} = \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \left(\phi_{g',i} - \frac{\Delta x_i}{2} \phi_{x,g',i}^{WR} \right) + q_f, \quad (4.3.45)$$

$$q_{x,g,i} = \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR}. \quad (4.3.46)$$

以上より、空間均質化および重み付き残差法によって中性子源一次展開係数を求めることができる。

次に、LS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式を導出する。このとき 2 ノード（メッシュ）間と 1 ノード端で正味中性子差分式が異なる。

• 2 ノード問題

図 4.3.1 に示す 2 ノード問題を考える。メッシュ*i*における LS 近似を明示的に仮定した一次

元拡散方程式およびその解析解は下式のとおりである。

$$-D_{g,i} \frac{d^2}{dx^2} \phi_{g,i}(x) + \Sigma_{t,g,i} \phi_{g,i}(x) = q_{g,i} + q_{x,g,i}x, \quad (4.3.47)$$

$$\phi_{g,i}(x) = A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i}x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i}x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}}x, \quad (4.3.48)$$

同様に、メッシュ $i+1$ における一次元拡散方程式およびその解析解も下式のとおり表される。

$$-D_{g,i+1} \frac{d^2}{dx^2} \phi_{g,i+1}(x) + \Sigma_{t,g,i+1} \phi_{g,i+1}(x) = q_{g,i+1} + q_{x,g,i+1}x, \quad (4.3.49)$$

$$\phi_{g,i+1}(x) = A_{g,i+1} \exp(\kappa_{g,i+1}x) + B_{g,i+1} \exp(-\kappa_{g,i+1}x) + \frac{q_{g,i+1}}{\Sigma_{t,g,i+1}} + \frac{q_{x,g,i+1}}{\Sigma_{t,g,i+1}}x, \quad (4.3.50)$$

FS ACMFD 加速法同様に式(4.3.7)–(4.3.10)に示す 4 つの制約条件を用いて未定定数を消去すると、正味中性子流差分式は式(4.3.51)のとおり求まる。計算過程は複雑なため省略する。計算には Mathematica を用いることを推奨する[34]。

$$J_{g,i+1/2} = -\tilde{D}_{g,i+1,x-} \phi_{g,i+1} + \tilde{D}_{g,i,x+} \phi_{g,i} + S_{g,i+1/2}^{LS} \quad (4.3.51)$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_{g,i+1/2}^{LS} &= -\tilde{D}_{g,i+1,x-} \left(\beta_{g,i+1} q_{x,g,i+1} + \gamma_{g,i+1} (q_{g,i+1} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1} \phi_{g,i+1}) \right) \\ &\quad + \tilde{D}_{g,i,x+} \left(\beta_{g,i} q_{x,g,i} + \gamma_{g,i} (q_{g,i} - \Sigma_{s,g \rightarrow g,i} \phi_{g,i}) \right) \\ &= -\tilde{D}_{g,i+1,x-} \left(\left(\beta_{g,i+1} + \gamma_{g,i+1} \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \right) \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i+1} \phi_{x,g',i+1}^{WR} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{g,i+1} \left(\sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i+1} \phi_{x,g',i+1}^{WR} + q_{f,g,i+1} \right) \right) \\ &\quad + \tilde{D}_{g,i,x+} \left(\left(\beta_{g,i} - \gamma_{g,i} \frac{\Delta x_i}{2} \right) \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{g,i} \left(\sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} + q_{f,g,i} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

$$\beta_{g,i} = \frac{1 + 2(\tau_{g,i})^2 - \cosh(2\tau_{g,i})}{\tau_{g,i} \kappa_{g,i} \Sigma_{t,g,i}}, \quad (4.3.53)$$

$$\beta_{g,i+1} = -\frac{1 + 2(\tau_{g,i+1})^2 - \cosh(2\tau_{g,i+1})}{\tau_{g,i+1}\kappa_{g,i+1}\Sigma_{t,g,i+1}}, \quad (4.3.54)$$

であり、その他のパラメータは式(4.3.12)–(4.3.16)および(4.3.18)と同様である。FSACMFD 加速法とは異なり、定数項 S 内に中性子源一次展開係数を含む項が追加されている。以上より、2 ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.51)のとおり導出できた。

- 1 ノード問題

- (a) x –側境界が体系境界の場合

FSACMFD 加速法と同様に、図 4.3.2 に示す座標系をとる 1 ノード問題を考え、式(4.3.19) および(4.3.20)の制約条件を考える。LS 近似を明示的に仮定した次元拡散方程式およびその解析解である式(4.3.47)および(4.3.48)に式(4.3.19)および(4.3.20)を代入して整理すると、 x –側体系境界における正味中性子流差分式は下式のとおり導出される。

$$J_{i-1/2} = -\tilde{D}_{g,i,x-}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i} + S_{g,i}^{LS}, \quad (4.3.55)$$

ここで、

$$S_{g,i}^{LS} = -\tilde{D}_{g,i,x-} \left(\left(\beta_{g,i} - \gamma_{g,i} \frac{\Delta x_i}{2} \right) \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} + \gamma_{g,i} \left(\sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} + q_{f,g,i} \right) \right), \quad (4.3.56)$$

であり、その他のパラメータの定義は式(4.3.14)–(4.3.16)および(4.3.18)と同様である。以上より、 x –側が体系境界の場合の 1 ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.55)のとおり導出できた

- (b) x +側境界が体系境界の場合

FSACMFD 加速法と同様に、図 4.3.3 に示す座標系をとる 1 ノード問題を考え、式(4.3.27) および(4.3.28)の制約条件を考える。LS 近似を明示的に仮定した次元拡散方程式およびその解析解である式(4.3.47)および(4.3.48)に式(4.3.27)および(4.3.28)を代入して整理すると、 x +側体系境界における正味中性子流差分式は下式のとおり導出される。

$$J_{i+1/2} = \tilde{D}_{g,i,x+}(1 + \gamma_{g,i}\Sigma_{s,g \rightarrow g,i})\phi_{g,i} + S_{g,i}^{LS}, \quad (4.3.57)$$

ここで、

$$S_{g,i}^{LS} = \tilde{D}_{g,i,x+} \left(\left(\beta_{g,i} + \gamma_{g,i} \frac{\Delta x_i}{2} \right) \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} + \gamma_{g,i} \left(\sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{x,g',i}^{WR} + q_{f,g,i} \right) \right), \quad (4.3.58)$$

であり、その他のパラメータの定義は式(4.3.14)–(4.3.16)および(4.3.18)と同様である。以上より、 x –側が体系境界の場合の1ノード問題における解析的な正味中性子流は式(4.3.57)のとおり導出できた。

式(4.3.51), (4.3.55)および(4.3.57)の中性子流差分式に補正項を加えることで、FSACMFD加速法における2ノード間の中性子流差分式が得られる。この補正項はCMFD加速法と同様の方法で導入される。

- 2ノード問題

$$J_{g,i+1/2}^{LSACMFD} = -\tilde{D}_{g,i+1,x-} (1 + \gamma_{g,i+1} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1}) \phi_{g,i+1} + \tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i+1/2}^{LS} + \hat{D}_{g,i+1/2} (\phi_{g,i+1} + \phi_{g,i}), \quad (4.3.59)$$

ここで $J^{FSACMFD}$ はLSACMFD加速法における正味中性子流差分式である。 \hat{D} は正味中性子流補正係数であり、詳細計算で得られた正味中性子流および全中性子束から下式のとおり求まる。

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \left(J_{g,i+1/2}^{fine} - \left(-\tilde{D}_{g,i+1,x-} (1 + \gamma_{g,i+1} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i+1}) \phi_{g,i+1}^{fine} + \tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i}^{fine} + S_{g,i+1/2}^{LS} \right) \right) / (\phi_{g,i+1}^{fine} + \phi_{g,i}^{fine}). \quad (4.3.60)$$

- 1ノード問題

- (a) x –側境界が体系境界の場合

$$J_{g,i-1/2}^{LSACMFD} = -\tilde{D}_{g,i,x-} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i}^{LS} + \hat{D}_{g,i+1/2} \phi_{g,i}, \quad (4.3.61)$$

ここで、

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \frac{\left(J_{g,i-1/2}^{fine} - \left(-\tilde{D}_{g,i,x-} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i}^{fine} + S_{g,i}^{LS} \right) \right)}{\phi_{g,i}^{fine}}. \quad (4.3.62)$$

- (b) x +側境界が体系境界の場合

$$J_{g,i+1/2}^{LSACMFD} = \tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i} + S_{g,i}^{LS} + \hat{D}_{g,i+1/2} \phi_{g,i} \quad (4.3.63)$$

ここで、

$$\hat{D}_{g,i+1/2} = \frac{\left(J_{g,i+1/2}^{fine} - \left(\tilde{D}_{g,i,x+} (1 + \gamma_{g,i} \Sigma_{s,g \rightarrow g,i}) \phi_{g,i}^{fine} + S_{g,i}^{LS} \right) \right)}{\phi_{g,i}^{fine}} \quad (4.3.64)$$

以上より、LS ACMFD 加速法における正味中性子流差分式は式(4.3.59), (4.3.61)および(4.3.63)のとおり求まる。LS ACMFD 加速法では、式(4.3.59), (4.3.61)および(4.3.63)を用いて中性子バランス方程式を解くことで粗メッシュ平均全中性子束分布を計算する。内部反復計算により粗メッシュ平均全中性子束分布が得られたら、全中性子束一次展開係数および粗メッシュ平均中性子源を更新する。

このとき、全中性子束一次展開係数は下式によって更新する。

$$\phi_{x,g,i}^{\ell+1} = \phi_{x,g,i}^{WR} \frac{\phi_{g,i}^{\ell+1}}{\phi_{g,i}} \quad (4.3.65)$$

ここで、 ℓ はLS ACMFD 加速計算の外部反復回数である。式(4.3.65)より、粗メッシュ平均全中性子束に対する全中性子束一次展開係数の比 ($\phi_{x,g,i}^{\ell+1}/\phi_{g,i}^{\ell+1}$) は、加速計算前の空間均質化および重み付き残作法で計算された比 ($\phi_{x,g,i}^{WR}/\phi_{g,i}$) の値で固定される。すなわち粗メッシュ平均全中性子束に対する全中性子束一次展開係数の比はLS ACMFD 計算中に保存される。これは、LS ACMFD 加速計算の収束安定性を考慮したためである。全中性子束一次展開係数が更新されたら、それに応じて中性子源一次展開係数も更新する。なお、本検討では上記の方法で全中性子束一次展開係数を更新したがLS ACMFD 加速計算の外部反復毎に、重み付き残作法により全中性子束一次展開係数を更新することもできる。そのような方法を採用したLS ACMFD 加速法に関する検討はAppendix B に記載する。

LS ACMFD 加速計算が収束したら、CMFD 加速法同様に粗メッシュ平均全中性子束から求まるrebalance factor から詳細計算の詳細メッシュ平均全中性子束分布を更新する。このとき、rebalance factor の計算時には、LS ACMFD 加速計算で用いた全中性子束および中性子源一次展開係数は用いない。

4.3.4 Flat Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC 加速法 (FS ADMOC)

FS ADMOC 加速法は、空間離散化モデルにFS 近似、角度離散化モデルに離散角度求積近似を用いる。FS ADMOC 加速法はFS MOC を加速計算モデルに応用した手法である。本加速法では、FS ADMOC 加速計算の角度中性子束に対して不連続因子を適用することで、詳細計算と加速計算間の漏洩率を保存する。従って、不連続因子は角度依存性を有する。このとき、詳細計算とは別にFS ADMOC 加速法の角度分割数と角度分点を設定する必要がある。ADMOC 加速計算の角度分割数は、詳細計算の角度分割数以下でなければならない。FS ADMOC 加速法の全体的な計算手順はCMFD 加速法と同様である。CMFD 加速法とは、補

正係数である不連続因子の計算方法と加速計算において低次の輸送計算を行う点が異なる。

FS ADMOC 加速法における角度中性子束不連続因子の計算方法を以下に示す。まず詳細計算の外部反復および空間均質化により、入射および放出角度中性子束 $\psi_{m,g,k,in}$, $\psi_{m,g,k,out}$ および粗メッシュ平均全中性子束 $\phi_{g,i}$ が求まる。ここで下付き文字 m は詳細計算における角度方向、 in および out は入射および放出方向を表す。

次に、詳細計算で求めた入射部分中性子流が保存されるように下式を用いて、詳細な角度分点の角度中性子束を粗い角度分点の角度中性子束に縮約する。これにより、FS ADMOC 加速計算で用いる空間メッシュおよび角度分点における入射角度中性子束 $\psi_{n,g,i,in}$ を求める。

$$\psi_{n,g,i,in} = \frac{\sum_{m \in n} (\omega_m \mu_m \psi_{m,g,i,in})}{\omega_n \mu_n}, \quad (4.3.66)$$

ここで、 m は詳細計算における角度方向、 n はFS ADMOC 加速法における角度方向 ($m \in n$)、 ψ_{in} および ψ_{out} は入射および放出角度中性子束、 ω は重み、 μ は方向余弦 ($-1 < \mu_m < 1$, $-1 < \mu_n < 1$) をそれぞれ表す。このとき、粗い角度方向 n に内包される詳細角度方向 m を、方向 n の入射角度中性子束に縮約している。

次に式(4.3.66)から得られた入射角度中性子束 $\psi_{n,g,i,in}$ を入力として、FS ADMOC 加速計算を各エネルギー群・各メッシュにおいて反復計算なしで一回だけ行い放出角度中性子束 $\psi_{n,g,i,out}$ を計算する。このとき中性子源に対してはFS 近似を適用する。また、外部反復は行わない。1次元体系計算の場合は、式(4.3.67)に基づいて放出角度中性子束 $\psi_{n,g,i,out}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\Delta x_i} (\psi_{n,g,i,out} - \psi_{n,g,i,in}) + \Sigma_{t,g,i} (f_{n,g,i} \psi_{n,g,i,out} + (1 - f_{n,g,i}) \psi_{n,g,i,in}) \\ = q_{g,i}, \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

ここで、 f は平均角度中性子束を計算するための重み関数である。ADMOC 加速法ではMOCに基づく加速計算を行うため以下の式を用いる。

$$f_{n,g,i} = -\frac{\mu_n}{\Delta x_i} + \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n}\right)}, \quad (4.3.68)$$

式(4.3.67)から計算された放出角度中性子束 $\psi_{n,g,i,out}$ および、詳細計算から求まる放出角度中性子束 $\psi_{m,g,i,out}$ からそれぞれ求まる部分中性子流の比から、不連続因子 DF を式(4.3.69)から求める。ここで不連続因子は角度依存性を有することに注意する。

$$DF_{n,g,i,out} = \frac{\sum_{m \in n} (\omega_m \mu_m \psi_{m,g,i,out})}{\omega_n \mu_n \psi_{n,g,i,out}}, \quad (4.3.69)$$

不連続因子 DF は、詳細計算から求まる部分中性子流とFS ADMOC 加速計算の初期反復から求まる部分中性子流の比を表しており、FS ADMOC 加速計算の放出角度中性子束に DF を乗じることで、詳細計算と加速計算間で部分中性子流が保存される。以上が不連続因子 DF の計算手順である。

FS ADMOC 加速計算では、式(4.3.69)から求まる不連続因子を角度中性子束に乗じて反復計算を実施する。このとき不連続因子の値は反復中一定である。1 次元平板体系では式(4.3.67)を反復させ中性子束の収束値を計算する。

$$\frac{\mu_n}{\Delta x_i} (\psi_{n,g,i,out}^\ell DF_{n,g,i,out} - \psi_{n,g,i,in}^\ell DF_{n,g,i,in}) + \Sigma_{t,g,i} (f_{n,g,i} \psi_{n,g,i,out}^\ell DF_{n,g,i,out} + (1 - f_{n,g,i}) \psi_{n,g,i,in}^\ell DF_{n,g,i,in}) = q_{g,i}^{\ell-1}, \quad (4.3.70)$$

ここで ℓ は FS ADMOC 加速計算の外部反復回数である。入射角度中性子束に対する不連続因子 $DF_{n,g,i,in}$ には、隣接領域の放出角度中性子束に対する不連続因子を用いる。このとき、中性子の飛行方向 n の符号に注意する。

$$\begin{aligned} DF_{n,g,i,in} &= DF_{n,g,i-1,out}, & n > 0, \\ DF_{n,g,i,in} &= DF_{n,g,i+1,out}, & n < 0, \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

FS ADMOC 加速計算を収束させ、粗メッシュ全中性子束分布が得られたら **rebalance factor** を計算し、詳細全中性子束分布を更新する。以上が FS ADMOC 加速法の計算手順である。FS ADMOC 加速法の全体的な計算手順は CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法と同様である。

FS ADMOC 加速法と FS ACMFD 加速法の計算モデルの相違点は以下の2点である。1 点目は、中性子流の補正方法が異なる。FS ACMFD 加速法では全中性子束に対する中性子流補正係数を用いるが、FS ADMOC 加速法は角度中性子束に対する不連続因子を用いる。2 点目は、加速計算における角度離散化モデルが異なる。FS ACMFD 加速は P1 近似を用い、FS ADMOC 加速法では離散角度求積近似を用いる。なお、中性子源の空間離散化モデルは両モデル間で FS 近似を用いており同様である。

4.3.5 Linear Source Angular-Dependent discontinuity factor MOC 加速法 (LS ADMOC)

LS ADMOC 加速法は、空間離散化モデルに LS 近似、角度離散化モデルに離散角度求積近似を用いる。LS ADMOC 加速法は LS MOC を加速計算モデルに応用した手法である。本手法では FS ADMOC 加速法と同様に、角度中性子束に対する不連続因子を用いて部分中性子流を保存する。FS ADMOC 加速法とは、加速計算モデルにおける空間離散化モデルのみが FS 近似か LS 近似かで異なる。なお、FS MOC に LS ADMOC 加速法を適用した場合は、加速計算における中性子源 1 次展開係数が 0 となるため、LS ADMOC 加速法は FS ADMOC 加速と等価な計算モデルとなる。

以下に、LS ADMOC 加速法の計算手順を述べる。まず、空間均質化および重み付き残作法により、全中性子束一次展開係数および中性子源一次展開係数を計算する。計算方法は、LS ACMFD 加速法と同様である。

次に、詳細計算で得られた角度中性子束から、LS ADMOC 加速計算における入射角度中性子束を式(4.3.66)から計算する。これは、詳細計算で得られた部分中性子流を保存するように、詳細計算の角度中性子束を LS ADMOC 加速計算の角度方向に縮約している。

得られた入射角度中性子束を入力として LS ADMOC 加速計算の内部反復を各エネルギー

群・各メッシュで反復計算を行わず一回だけ行い、LS ADMOC 加速計算における放出角度中性子束 $\psi_{n,g,i,out}$ を計算する。このとき中性子源に対してはLS 近似を適用する。また、LS ADMOC 加速計算は反復させない。1次元体系計算の場合は式(4.3.72)に基づいて放出角度中性子束 $\psi_{n,g,i,out}$ を計算する。

$$\psi_{n,g,i,out} = \psi_{n,g,i,in} + \left(\frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} - \psi_{n,g,i,in} \right) F_1 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right) + \frac{q_{x,g,i}}{2(\Sigma_{t,g,i})^2} F_2 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right), \quad (4.3.72)$$

ここで、

$$F_1 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right) = 1 - e^{-\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n}} \quad (4.3.73)$$

$$F_2 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right) = 2 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} - F_1 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right) \right) - \frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} F_1 \left(\frac{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i}{\mu_n} \right) \quad (4.3.74)$$

である。不連続因子の計算および詳細計算の全中性子束分布更新はFS ADMOC 加速法と同様の手順で行う。ただしLS ADMOC 加速計算では、LS 近似を仮定し不連続因子を適用した輸送方程式を解く。なおLS ADMOC 加速計算における中性子源一次展開係数の更新方法はLS ACMFD 加速法と同様であり、式(4.3.65)を用いる。以上が、LS ADMOC 加速法の計算手順である。

FS ADMOC 加速法とLS ADMOC 加速法は、空間離散化モデルのみが異なり、全体の計算手順は同様である。FS ADMOC 加速法とLS ADMOC 加速法の収束性を比較することで、ADMOC 加速法における空間離散化モデルが収束性に及ぼす影響を評価できる。また、LS ACMFD 加速法とLS ADMOC 加速法の収束性を比較することで、LS 近似を用いる場合の角度離散化モデルが収束性に及ぼす影響を評価できる。さらにLS ADMOC 加速法において角度分割数を段階的に変化させて収束性を評価および比較することで、加速計算における角度分割数が収束性に及ぼす影響を定量的に評価できる。

4.4 1群1次元均質平板体系における収束性評価

本節では、エネルギー1群1次元均質平板体系における収束性評価について述べる。それぞれ空間および角度離散化モデルの異なる加速法の収束性を比較することで、空間離散化モデルおよび角度離散化モデルが詳細計算の収束性に及ぼす影響を評価する。

収束性評価は、解析的な方法である線形化フーリエ解析と数値計算による2つの方法で行う。2種類の収束性評価手法の結果を集約することで、提案する加速法の収束性評価結果が妥当であるかを確認する。

4.4.1 線形化フーリエ解析による収束性評価

本項では、FS MOC に対するCMFD 加速法、FS ACMFD 加速法およびACMFD 加速法について、線形化フーリエ解析による収束性評価を行う。なお、FS MOC に対するFS ADMOC およびLS ADMOC 加速法や、LS MOC に対する非線形収束加速法に対する線形化フーリエ

解析は、固有値方程式の導出が困難だったため、本検討では実施していない。線形化フーリエ解析の詳細は 2.6.1 項および Appendix A を参考にすること。

まず、各加速法に対して線形化フーリエ解析を適用し、得られる固有値方程式を比較する。線形化フーリエ解析では、以下の仮定のもとで基礎方程式を整理する。

- 一次元均質平板体系
- 等方散乱中性子源による固定源計算
- 詳細計算には FS MOC を利用
- エネルギー1 群
- 周期境界条件 (1 次元均質平板では完全反射 (1 次元無限均質平板) 境界条件に相当)

上記の仮定のもと、CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法および ACMFD 加速法に対し線形化フーリエ解析を適用すると、以下の固有値方程式が導かれる。詳細な導出は Appendix A を確認すること。

$$\omega \vec{A} = [-\theta \mathbf{W} + [\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}]\mathbf{H}]\vec{A}, \quad (4.4.1)$$

ここで、 ω は複素振幅率、 \vec{A} は誤差関数の展開係数ベクトル、 \mathbf{W} は空間均質化の演算子に対応する行列、 \mathbf{H} は詳細計算 (輸送計算) の演算子に対応する行列、 \mathbf{I} は単位行列、 θ は加速計算および prolongation の演算子に対応するスカラー値である。各行列の定義は Appendix A を確認すること。

式(4.4.1)のとおり、CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法および ACMFD 加速法の固有値方程式は同じ形式で記述できる。ただし θ の定義が以下のとおり異なる。

$$\theta^{CMFD} = \frac{h \Sigma_t c}{4 \tilde{D}^{FD} \sin^2(pv) + ph \Sigma_t (1 - c)}, \quad (4.4.2)$$

$$\theta^{FSACMFD} = \frac{h \Sigma_t c}{4 \tilde{D}^{ACMFD} (1 + \gamma \Sigma_s) \sin^2 pv + ph \Sigma_t (1 - c)}, \quad (4.4.3)$$

$$\theta^{ACMFD} = \frac{h \Sigma_t c}{4 \tilde{D}^{ACMFD} \sin^2 pv + ph \Sigma_t (1 - c)}, \quad (4.4.4)$$

ここで、 θ^{CMFD} は CMFD 加速法における θ の定義、 $\theta^{FSACMFD}$ は FS ACMFD 加速法における定義、 θ^{ACMFD} は FS 近似を仮定しない ACMFD 加速法における定義をそれぞれ示す。また、 h は詳細メッシュ幅、 c は散乱比(Σ_s/Σ_t)、 p は粗メッシュ内の詳細メッシュ数 (空間均質化する詳細メッシュ数)、 v は誤差関数の周波数である。さらに \tilde{D}^{FD} は CMFD 加速法における (有限差分近似を仮定した場合の) 拡散係数から成る結合係数、 \tilde{D}^{ACMFD} は ACMFD 加速法における結合係数であり、それぞれ以下のとおりである。また γ は式(4.4.7)のとおりである。

$$\tilde{D}^{FD} = \frac{D}{ph} \quad (4.4.5)$$

$$\tilde{D}^{ACMFD} = \frac{D \tau^2}{ph \sinh^2(\tau)} \quad (4.4.6)$$

$$\gamma = \frac{-ph\kappa + \sinh(ph\kappa)}{ph\kappa\Sigma_t}, \quad (4.4.7)$$

ここで、

$$\tau = \frac{ph}{2}\kappa, \quad (4.4.8)$$

$$\kappa = \sqrt{\Sigma_t/D}, \quad (4.4.9)$$

であり、 D は拡散係数である。式(4.4.2)–(4.4.4)より、CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法および ACMFD 加速法の固有値方程式では、拡散係数から成る結合係数の定義のみが異なる。

式(4.4.1)–(4.4.4)を用いて、線形化フーリエ解析による収束性評価を行う。具体的には式(4.4.1)の固有値方程式から固有値と固有ベクトルを求める。このとき、固有値の絶対値の最大値がスペクトル半径（収束率）に相当する。

固有値計算における計算条件は以下のとおりである。本計算条件は、線形化フーリエ解析の先行研究と同等である[10]。計算には自作 Python プログラムを利用し、数値計算ライブラリ Numpy の np.linalg.eig()関数を用いて固有値計算を実行する[35]。

- FS MOC の角度分点および分割数：Gauss-Legendre 分点で 64 方向
- 巨視的断面積 $\Sigma_t = 1.0 \text{ cm}^{-1}$ 、散乱比 $c = 0.99$
- 粗メッシュ内の詳細メッシュ数 $p = 1, 4$
- 粗メッシュサイズ $ph : 10^{-2}$ から 10^2 cm
- 倍精度実数計算

スペクトル半径は、CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法および ACMFD 加速法において以下の 6 つの条件で比較する。カッコ内は計算結果図の凡例名である。ここで一般的な拡散係数とは $1/3\Sigma_t$ で定義される拡散係数を指す。この 6 計算ケースは、加速法として CMFD 加速法、FS ACMFD 加速法、FS 近似を仮定しない ACMFD 加速法の 3 通りと、拡散係数に一般的な拡散係数（ $= 1/(3\Sigma_{tr})$ ）と実効的な拡散係数 Deff [8]の 2 通りを組み合わせた 6 通りに対応している。

1. 一般的な拡散係数を用いた CMFD 加速法 (CMFD)
2. 実効的な拡散係数 Deff を用いた CMFD 加速法 (CMFD using Deff)
3. 一般的な拡散係数を用いた FS ACMFD 加速法 (FS ACMFD)
4. 実効的な拡散係数 Deff を用いた FS ACMFD 加速法 (FS ACMFD using Deff)
5. 一般的な拡散係数を用いた FS 近似を仮定しない ACMFD 加速法 (ACMFD without FS)
6. 実効的な拡散係数 Deff を用いた ACMFD 加速法 (ACMFD without FS using Deff)

計算結果として、 $p = 1, 4$ における粗メッシュ光学距離 $\Sigma_t ph$ に対するスペクトル半径の関係を図 4.4.1 および図 4.4.2 に示す。各図より以下のことが分かる。

CMFD 加速法の収束性は、 $p = 1, 4$ のいずれとも先行研究の結果と一致している。本結果より作成した固有値計算コードは妥当であり正しく実装できていることが確認できる。

本検討で用いた詳細計算と加速法間の計算モデルの乖離を考える。本検討における詳細計算手法 FS MOC では空間離散化モデルに FS 近似を、角度離散化モデルに離散角度求積近似を用いている。CMFD 加速法では有限差分近似を、FS ACMFD 加速法では FS 近似を、空間離散化モデルとして用いており、角度離散化モデルはどちらも P1 近似を用いている。また ACMFD 加速法では角度離散化モデルに P1 近似を用いているが、空間に関して明示的な近似を考えていない。以上より、角度離散化に関してはいずれの加速法も乖離度合に差異がない。対して空間離散化に関しては、FS MOC と FS ACMFD 加速で乖離はなく、CMFD と ACMFD 加速法で空間近似に関する乖離が生じている。

上記を踏まえ、 $p = 1$ において一般的な拡散係数を用いた場合の CMFD、FS ACMFD と ACMFD 加速法の収束性を比較する。CMFD および ACMFD 加速法では光学距離が大きいと収束不安定性（スペクトル半径が 1 以上）が確認されたが、FS ACMFD 加速では光学距離によらずスペクトル半径が 1 未満となり、Def_{eff}を用いた CMFD 加速法と同程度の収束性を示した。これは $p = 4$ でも同様の結果が得られた。本結果より、空間離散化モデルの乖離が小さいほど収束性が向上している（スペクトル半径が小さくなる）。従って収束性の観点では、詳細計算と加速計算で同一の空間離散化モデルを用いるのが望ましいと推測される。

図 4.4.1 において Def_{eff}を用いた CMFD 加速と FS ACMFD 加速は概ね同等な収束性を示している。また ACMFD 加速法において一般的な拡散係数と実効的な拡散係数 Def_{eff}を用いた場合で収束性を比較すると、Def_{eff}を用いることで収束性が改善された。ACMFD 加速法における FS 近似の有無は、線形化フーリエ解析で得られた固有値方程式(4.4.1)–(4.4.4)において結合係数（拡散係数）の差異に現れている。ここで結合係数の光学距離依存性を図 4.4.3 に示す。図 4.4.3 より、FS ACMFD 加速法の結合係数は CMFD 加速法において Def_{eff}を用いた場合と同等の光学距離依存性を示している。従って、拡散係数の補正は空間離散化モデルの乖離低減に相当している。なお、Def_{eff}を用いた FS ACMFD 加速法は、図 4.4.1 より収束性が悪化しているが、これは拡散係数の過補正が生じて空間離散化モデルの乖離が広がったためであると推測する。

$p = 4$ において各加速法の収束性を比較する。 $p = 1$ 同様に、一般的な拡散係数を用いた CMFD 加速法および ACMFD 加速法では光学距離が大きいとスペクトル半径が 1 を超える。一方でその他の計算ケースでは、いずれも同等の収束性を示した。本結果は、空間均質化を伴う場合(本計算では $p = 4$ に相当)では、空間および角度離散化モデルの乖離が収束性に及ぼす影響は比較的小さく、空間均質化誤差が支配的となることを示している。

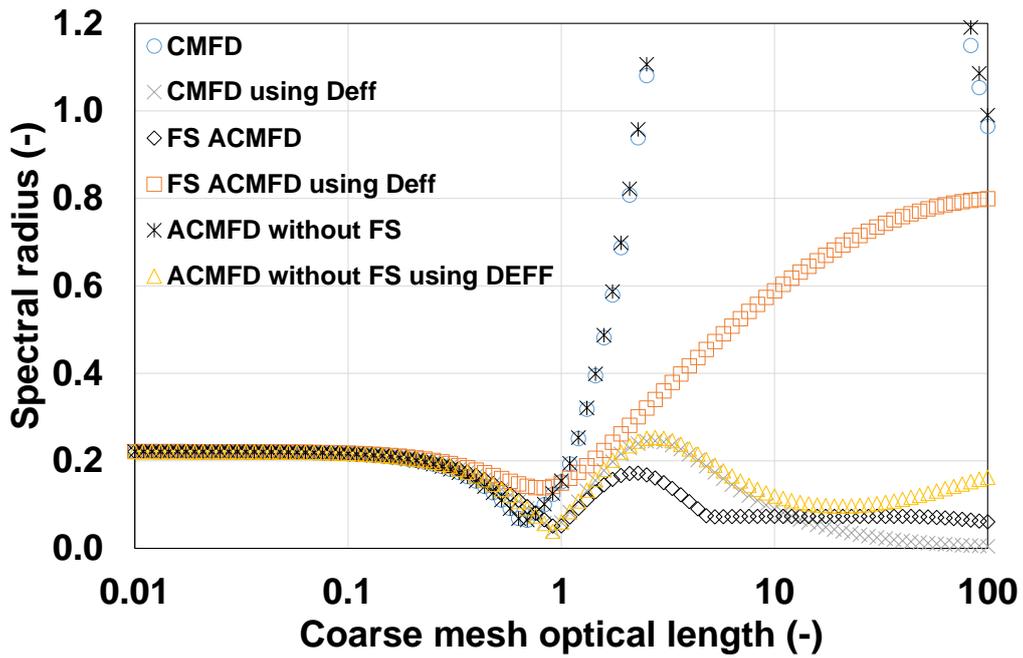


図 4.4.1 $p = 1$ における粗メッシュ光学距離とスペクトル半径の関係 ($c = 0.99$)

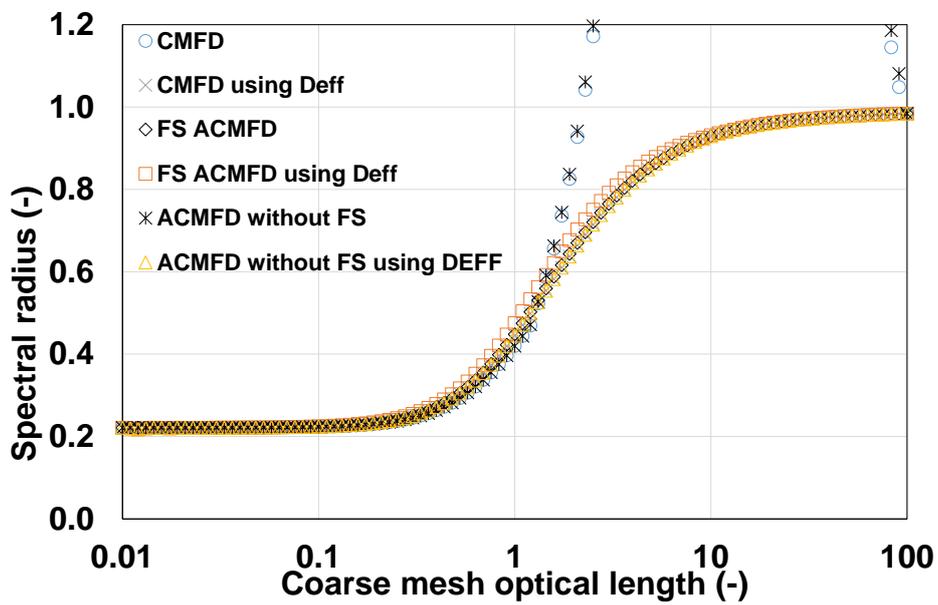


図 4.4.2 $p = 4$ における粗メッシュ光学距離とスペクトル半径の関係 ($c = 0.99$)

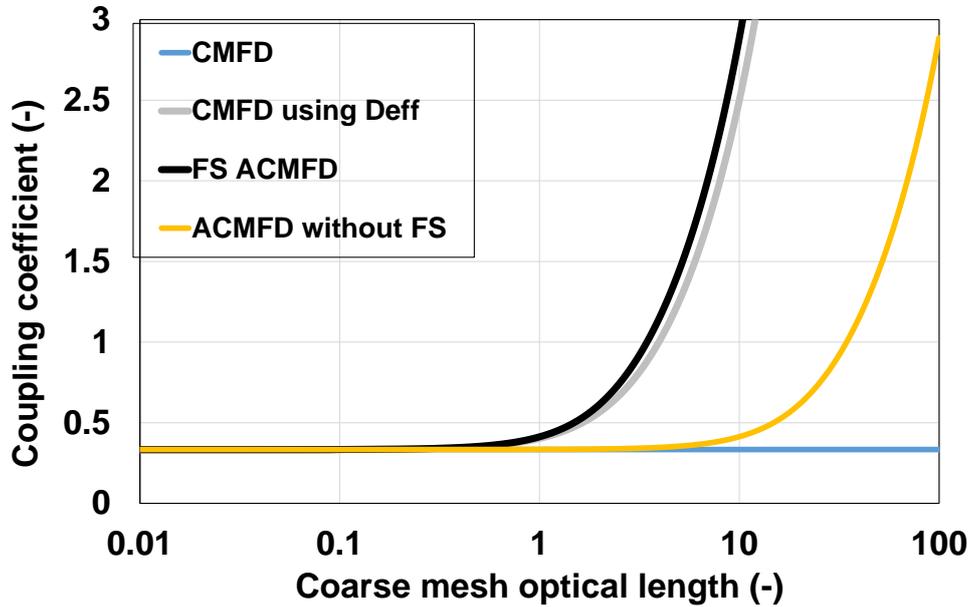


図 4.4.3 結合係数の光学距離依存性

以上より、線形化フーリエ解析により加速法で P1 近似を用いる場合の、空間離散化モデルと収束性の関係性を評価した。FS MOC に対する CMFD、FS ACMFD および ACMFD 加速法の収束性を比較することで、詳細計算と加速計算間の空間離散化モデルの一貫性が収束性向上に大きな影響を及ぼすことが確認できた。また空間均質化誤差が生じる場合は、その影響が支配的になることも確認された。しかし線形化フーリエ解析では、扱える加速法が限定的であり、角度離散化モデルと収束性との関係性を評価できていない。また LS MOC に対する非線形収束加速法の収束性を評価できていない。そこで本結果を踏まえ、次項では比較する詳細計算手法および加速法を拡張して、数値計算による収束性評価を行う。これにより、空間と角度離散化モデルの差異と収束性の関係を併せて評価する。

4.4.2 数値計算による収束性評価

本項では数値計算による、非線形収束加速法の収束性評価を示す。数値計算では図 4.4.4 に示す 1 次元均質平板体系を計算体系とする。計算体系に関する条件は以下のとおり。本条件は、前項の線形化フーリエ解析と比較可能なように設定している。

- 体系サイズは 100.0 cm
- 等方散乱中性子源による固定源計算
- 巨視的断面積 $\Sigma_t = 1.0 \text{ cm}^{-1}$ 、散乱比 $c = 0.99$ 、固定中性子源 $q_f = 1.0 \text{ cm}^{-3}$
- エネルギー 1 群
- 両側真空境界条件

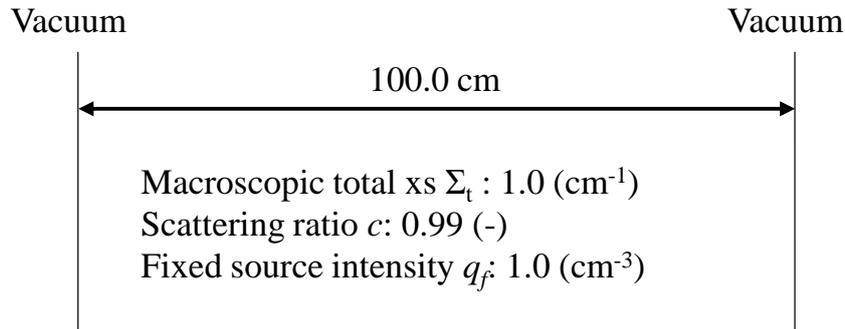


図 4.4.4 エネルギー1群1次元均質平板体系

詳細計算および加速計算における計算条件を以下に示す。計算には自作 C++プログラムを利用した。

- 詳細計算手法：FS MOC, LS MOC
- 詳細計算の角度分点セット：Gauss-Legendre 分点
- 詳細計算の角度分割数 m ：2, 64
- 加速法：CMFD using Deff、FS ACMFD、LS ACMFD、FS ADMOC、LS ADMOC 加速法
- 加速法の最大学部反復回数：1000 回
- 加速計算は詳細計算の後に実行
- FS ADMOC および LS ADMOC 加速法の角度分点セット：Gauss-Legendre 分点
- FS ADMOC および LS ADMOC 加速法の角度分割数 n ：図 4.4.5 のとおり
- 粗メッシュ内の詳細メッシュ数 $p = 1, 4$
- 粗メッシュサイズ：0.01–50.0 cm
- 詳細計算および加速計算の全中性子束収束条件： $\varepsilon^{fine} = 10^{-10}, \varepsilon^{accel} = 10^{-11}$
- スペクトル半径 ρ は式(4.4.10)から計算；

$$\rho = (\varepsilon^{fine})^{1/L}, \quad (4.4.10)$$

ここで、 L は収束に要した詳細計算の外部反復回数である。

- 倍精度実数計算

詳細計算手法および加速法の組み合わせを図 4.4.5 に示す。詳細計算には FS MOC もしくは LS MOC を用いる。このとき角度分割数は2 もしくは 64 とする。加速法には図 4.4.5 の右側に示す 5 種類の加速法を用いる。CMFD 加速法では数値計算の安定性向上のため、Deff を用いた。また FS 近似および LS 近似を適用した ACMFD 加速法 (FS ACMFD, LS ACMFD) を比較し、本計算では FS 近似を適用しない ACMFD 加速法は比較しない。ただし FS MOC には CMFD、FS ACMFD および FS ADMOC 加速法のみを適用し、LS MOC に対しては 5 種全ての加速法を適用する。また、詳細計算の角度分割数 $m = 2$ の場合は FS ADMOC および

LS ADMOC 加速法の角度分割数 n は2のみ、 $m = 64$ の場合は $n = 2, 8, 16, 64$ とした。

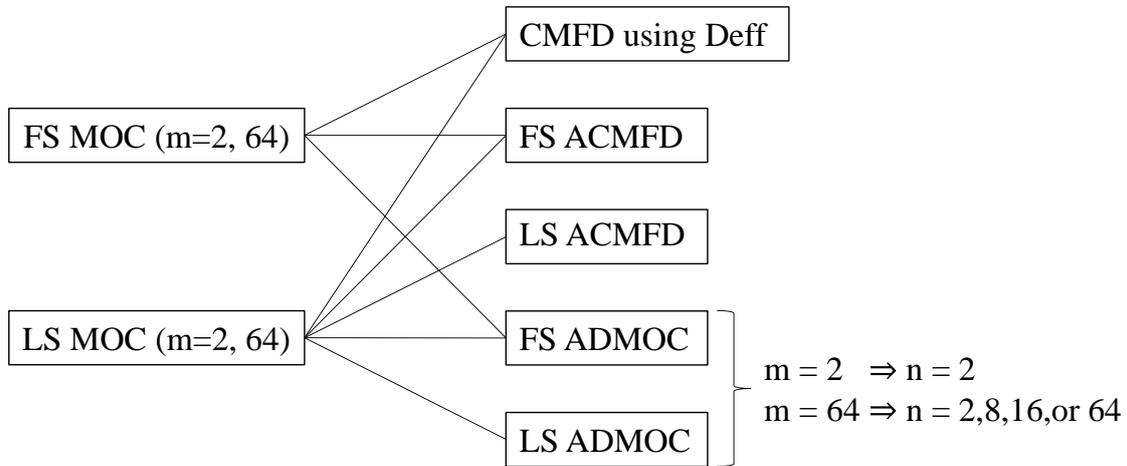


図 4.4.5 比較する計算ケースにおける詳細計算手法（左）と加速法（右）の組み合わせ

なお一般的にスペクトル半径は外部反復間の全中性子束残差から計算されるが、本検討では式(4.4.10)を用いた。これは、残差から求める方法ではスペクトル半径が非常に小さい場合に丸め誤差によって正確な値を評価することが困難なためである。ただし式(4.4.10)では、全中性子束残差の初期値が 1.0 であることを仮定している。

計算結果としてスペクトル半径の光学距離依存性を示す。FS MOC に対する各加速法のスペクトル半径を図 4.4.6 および図 4.4.7 に、LS MOC に対する各加速法のスペクトル半径を図 4.4.8 図 4.4.11 にそれぞれ示す。各図は、詳細計算手法（FS MOC, LS MOC）、詳細計算の角度分割数（ $m=2, 64$ ）、粗メッシュ内の詳細メッシュ数（ $p = 1, 4$ ）に関する組み合わせに対する結果をそれぞれ示している。なお、図 4.4.11,(a) (LS MOC, $m = 64, p = 1$) のみ LS ADMOC 加速法の角度分割数 $n=32$ の結果を追加している。これは、角度分割数が収束性に及ぼす影響をより分かりやすく示すためである。

それぞれの計算結果から順に以下の観点で考察する。

- FS MOC に対する CMFD および FS ACMFD 加速法の収束性
- FS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性
- LS MOC に対する CMFD および FS ACMFD 加速法の収束性
- LS MOC に対する LS ACMFD 加速法の収束性
- LS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性
- LS MOC に対する LS ADMOC 加速法の収束性

まず、FS MOC に対する Deff を用いた CMFD 加速法および FS ACMFD 加速法の収束性について比較する。図 4.4.6 および図 4.4.7 より、Deff を用いた CMFD 加速法と FS ACMFD 加速法のスペクトル半径は、光学距離に依らず 1 未満となり概ね同等の光学距離依存性を

示した。また図 4.4.7 ($m=64$) は、線形化フーリエ解析による収束性評価結果である図 4.4.1 と同等な結果となった。線形化フーリエ解析と数値計算で同等な収束性が得られていることから、式(4.4.10)によるスペクトル半径評価は妥当であることが分かる。

FS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性について考察する。本考察では、FS MOC において、空間および角度離散化モデルの差異および、空間均質化が収束性に及ぼす影響を評価する。

- 図 4.4.7, (a) ($m=64, p=1$) において、FS ADMOC 加速法の角度分割数を FS MOC の角度分割数に近づけるほど、スペクトル半径は低減されている。すなわち空間離散化モデルの差異がない場合でも角度離散化モデルの差異が収束性に影響を及ぼすことを示している。同様の傾向が図 4.4.7, (b) ($m=64, p=4$) の光学距離が小さい場合でも確認できる。しかし、いずれの加速法でもスペクトル半径は十分小さく数回の反復で収束している。ADMOC 加速法は、角度中性子束の計算を行う必要があるため、1 反復当たりの計算量が CMFD 加速法に比べて多い。従って、 $Deff$ を用いた CMFD 加速法を用いるのが実用的な観点では最も有用である。
- $p > 1$ かつ光学距離が大きい場合 (図 4.4.6, (b) および図 4.4.7, (b))、いずれの加速法でもスペクトル半径は概ね同様の値を示す。本結果は、空間離散化モデルが同等な場合でも、空間均質化を伴う場合は空間均質化誤差が収束性に支配的な影響を及ぼすことを示唆している。
- FS ADMOC 加速法において、FS MOC と等価な空間メッシュおよび角度分点を用いた場合、FS ADMOC 加速計算における不連続因子は 1.0 となる。これは、FS MOC と FS ADMOC 加速法で計算モデルが等価なためである。従って、図 4.4.6, (a) および図 4.4.7, (b) に示すとおり、光学距離に依らずスペクトル半径はほぼ 0 に近い値をとる。本計算は、計算モデル整合性が高いほど収束性が向上するという推測を確認する目的で実施した。

次に、LS MOC に対する CMFD および FS ACMFD 加速法の収束性について考察する。図 4.4.8 および図 4.4.9 より、LS MOC に対する CMFD および FS ACMFD 加速法の収束性は、FS MOC に適用した場合と概ね同等な収束性を示した。LS MOC に対する、 $Deff$ を用いた CMFD と FS ACMFD 加速法は光学距離に依らず安定して収束した。本結果は、FS MOC に対する非線形収束加速法の収束性の知見が、LS MOC に対しても適用可能であることを示唆している。

LS MOC に対する FS ACMFD 加速法および LS ACMFD 加速法の収束性について考察する。図 4.4.8 および図 4.4.9 より、LS ACMFD 加速法はいずれの計算条件でも光学距離に依らず収束した。しかしながら、その収束性は FS ACMFD 加速法と同等だった。すなわち、実用性および収束性の観点では、 $Deff$ を用いた CMFD 加速法を用いればよい。

LS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性について考察する。図 4.4.10, (a) より、光学距離が 1 以上の場合、LS MOC に対する FS ADMOC 加速法の角度分割数を変えても収束性は変化しない。すなわち、LS MOC に対する FS ADMOC 加速法の角度離散化誤差は収束性

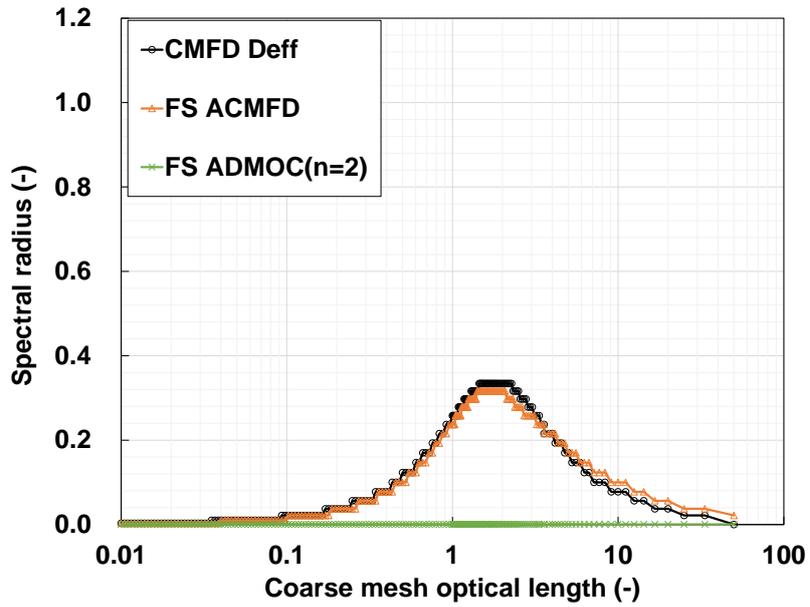
に対してほとんど影響を及ぼさない。本結果は、LS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性は、空間離散化モデルの乖離（LS 近似と FS 近似）および空間均質化誤差に依存することを示している。

LS MOC に対する FS ADMOC および LS ADMOC 加速法の収束性について考察する。

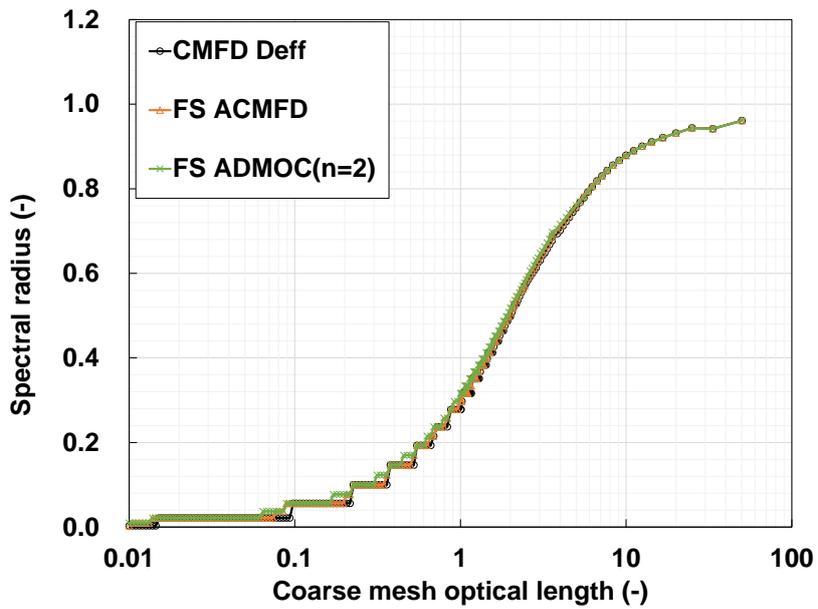
- 図 4.4.11, (a) ($m=64, p=1$) より、空間均質化を伴わない場合は、LS ADMOC 加速法の角度分割数 n が LS MOC の角度分割数 m に近づくほど、スペクトル半径が低減されている。本結果は、図 4.4.7. (a)に示される FS MOC に対する FS ADMOC 加速法の収束性と同等の傾向を示す。すなわち、空間離散化モデルの差異がない場合、角度離散化モデルの差異が収束性に影響を及ぼす。本結果は、LS MOC に対する非線形収束加速法による多段階加速計算を行う上で、一段階目の加速計算では角度縮約のみを行う加速法 ($n < m, p = 1$, LS ADMOC) を適用、二段階目以降の加速計算では空間均質化およびエネルギー群縮約を行う拡散加速法 ($p > 1$, CMFD using Deff or FS ADMOC) を適用することで、より効率的な LS MOC の収束加速を達成できる可能性がある。
- 図 4.4.11, (b) ($m=64, p=4$) より、空間均質化を伴い光学距離が大きい場合は、LS MOC に対する LS ADMOC 加速法の収束性は LS ADMOC 加速法の角度分割数に依存せず、同等の収束性を示す。本結果は、空間均質化を伴う場合は LS ADMOC 加速においても空間均質化の影響が支配的であることを示す。すなわち、空間均質化を行う場合にさらなる収束性向上を達成するには、空間均質化誤差を低減するような、従来とは異なるスキームの加速法を提案する必要がある。

以上の考察をまとめると、本結果から以下のことが分かる。

- LS 近似を用いる加速法（LS ACMFD および LS ADMOC）は、FS 近似を用いる加速法よりも僅かに収束性が向上する場合がある。しかしその差異は小さくほとんど無視してよい程度である。従って、実装の煩雑さを考慮すると、実用上は FS 近似を用いる加速法（Deff を用いる CMFD 加速法や FS ACMFD 加速法）を利用するのが望ましい。
- 空間均質化を行わない場合、FS ACMFD 加速法および LS ACMFD 加速法よりも、角度分割数が 2 であっても FS ADMOC 加速法および LS ADMOC 加速法を用いた方がわずかに収束性がよい。また、FS ACMFD 加速法および LS ACMFD 加速法の角度分割数を増加するほど収束性は向上する。しかし空間均質化を行い光学距離が大きい場合は収束性の角度分割数依存性はほとんどない。
- 詳細計算と加速計算の間で空間メッシュ構造が等価であれば、空間および角度離散化モデルの乖離は収束性に大きな影響を及ぼす。このとき、角度離散化よりも空間離散化モデルの差異の影響が強い。一方で、空間均質化を行う場合は、空間および角度離散化モデルの乖離よりも空間均質化誤差の影響が支配的となる。

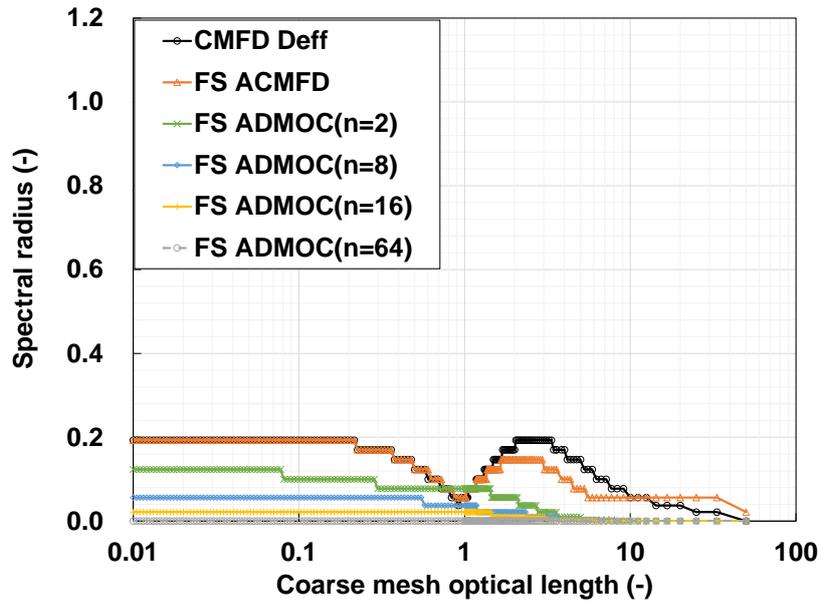


(a) FS MOC, $m=2$, $p=1$

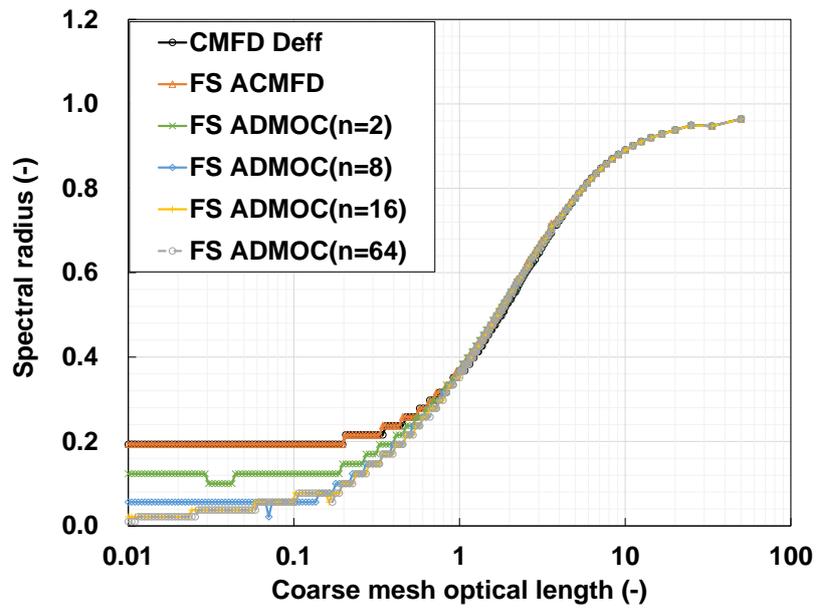


(b) FS MOC, $m=2$, $p=4$

図 4.4.6 $m = 2$ の FS MOC に対する各加速法のスペクトル半径の比較

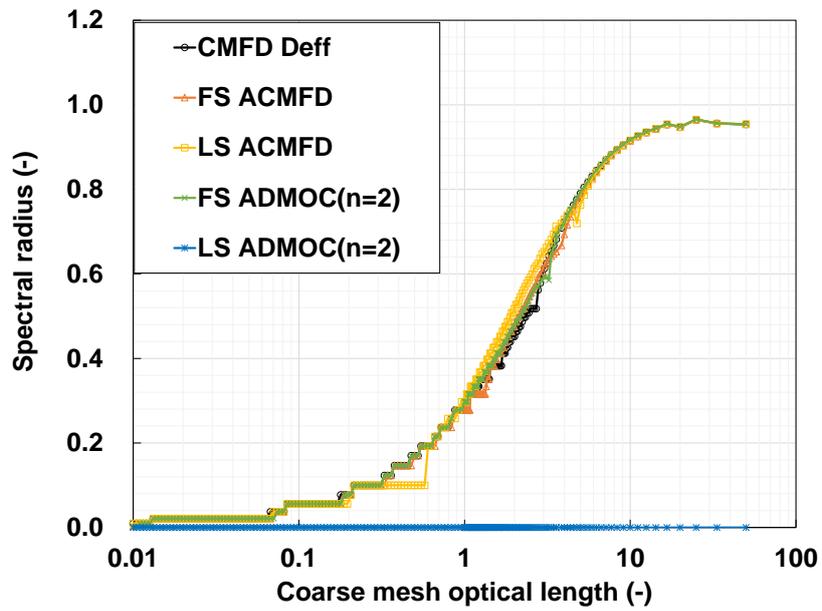


(a) FS MOC, $m=64$, $p=1$

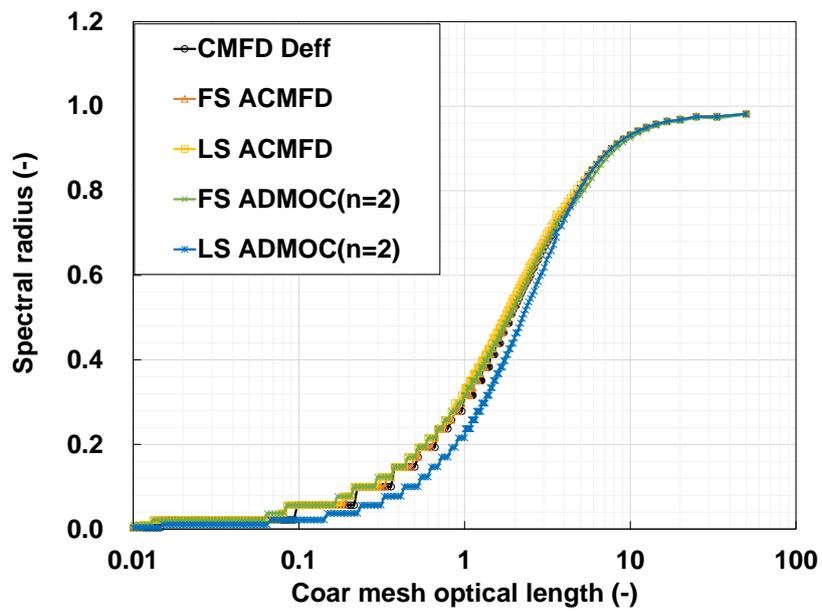


(b) FS MOC, $m=64$, $p=4$

図 4.4.7 $m = 64$ の FS MOC に対する各加速法のスペクトル半径の比較

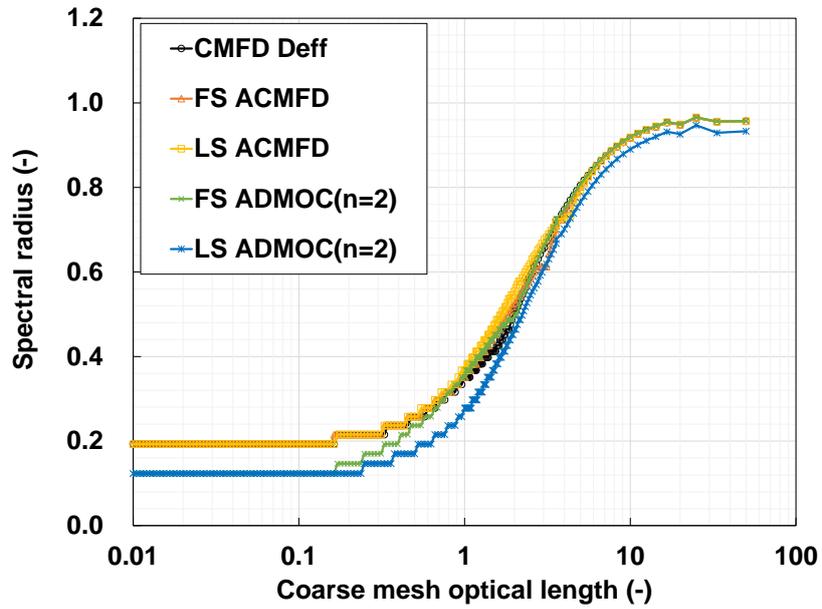


(a) LS MOC, $m=2$, $p=1$

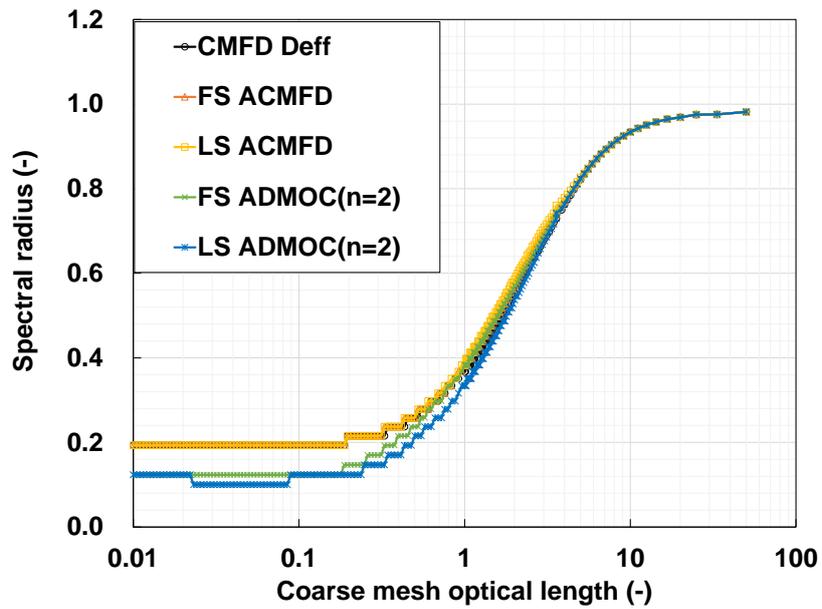


(b) LS MOC, $m=2$, $p=4$

図 4.4.8 $m = 2$ の LS MOC に対する各加速法のスペクトル半径の比較

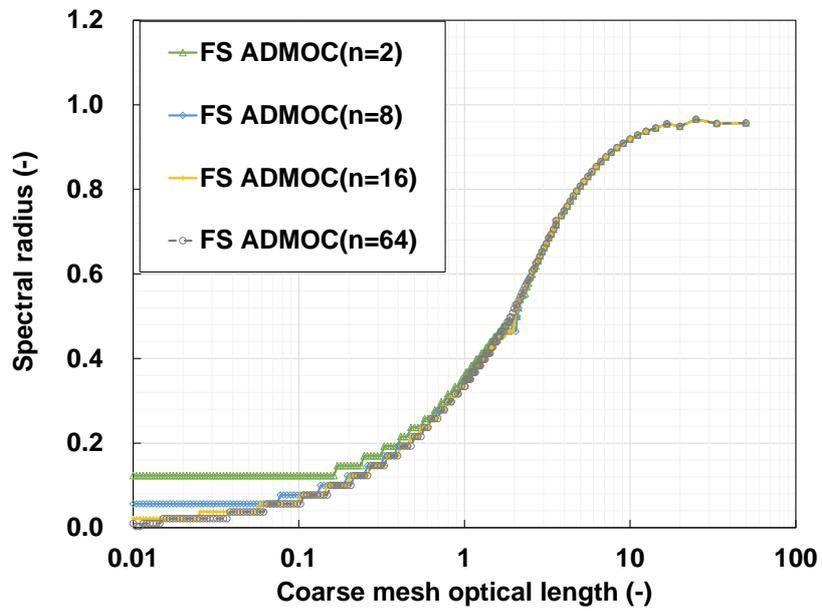


(a) LS MOC, $m=64$, $p=1$

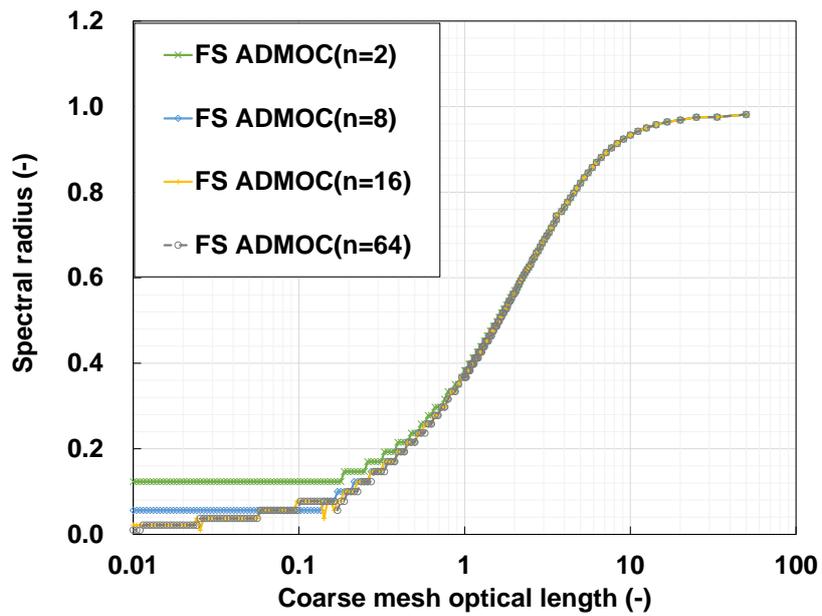


(b) LS MOC, $m=64$, $p=4$

図 4.4.9 $m = 64$ の LS MOC に対する各加速法のスペクトル半径の比較

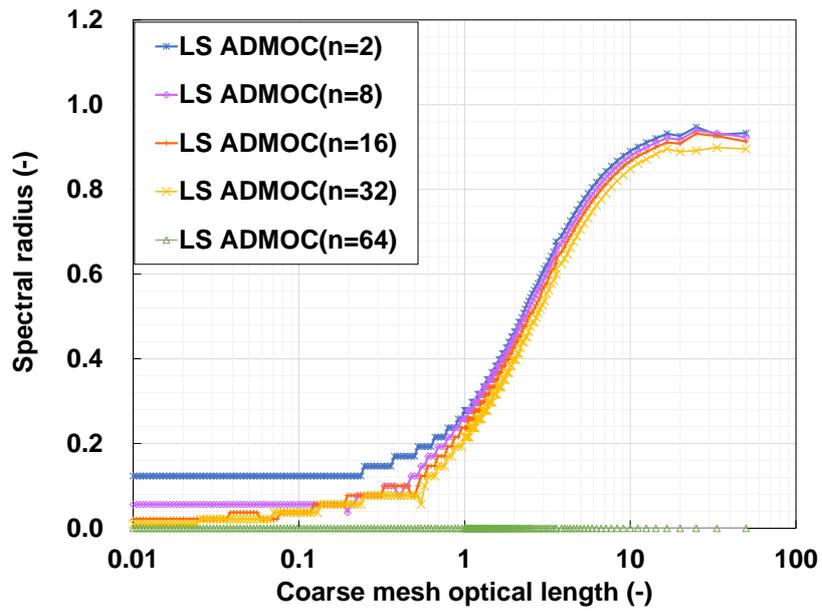


(a) LS MOC, $m=64$, $p=1$

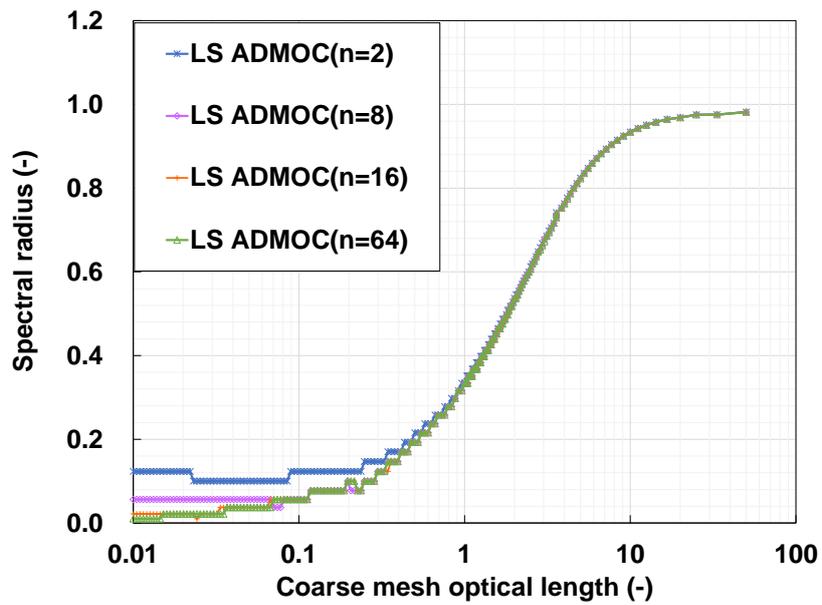


(b) LS MOC, $m=64$, $p=4$

図 4.4.10 $m = 64$ の LS MOC に対する FS ADMOC 加速法のスペクトル半径の比較



(a) LS MOC, $m=64$, $p=1$



(b) LS MOC, $m=64$, $p=4$

図 4.4.11 $m = 64$ の LS MOC に対する LS ADMOC 加速法のスペクトル半径の比較

4.5 本章のまとめ

本章では、詳細計算と非線形収束加速計算間の空間および角度離散化モデルの差異が収束性に及ぼす影響を定量的かつ系統的に評価した。従来の収束性解析により、加速法の収束性は散乱比や光学距離などのパラメータに依存することが明らかになっているが、同時に詳細計算と加速計算の計算モデルの差異が収束性に影響を及ぼすと推測される。

そこで、空間および角度離散化がそれぞれ異なる詳細計算手法および加速計算手法を組み合わせて、収束性評価を行った。詳細計算には Flat source MOC (FS MOC) と Linear source MOC (LS MOC) をそれぞれ用いた。加速計算には従来の CMFD 加速法に加え、新たに提案する4つの加速法の計5つの加速法を用いた。提案する加速法は、Flat source ACMFD (FS ACMFD) 加速法、Linear source ACMFD (LS ACMFD) 加速法、Flat source angular-dependent discontinuity factor MOC (FS ADMOC) 加速法、Linear source angular-dependent discontinuity factor MOC (LS ADMOC) 加速法であり、空間離散化に FS 近似もしくは LS 近似、角度離散化に P1 近似もしくは離散角度求積近似をそれぞれ用いている。これら詳細計算手法と加速法を組み合わせ収束性評価を行い、その結果を比較することで計算モデルの差異が収束性に及ぼす影響を評価した。

収束性評価はエネルギー1群1次元均質平板体系における線形化フーリエ解析と数値計算の二通りで実施した。収束性評価結果より、空間および角度離散化モデルの乖離が小さいほど、収束性向上が確認された。また本検討では FS MOC に対して安定した収束性を示した加速法は、LS MOC に対しても同様の安定性を示した。加速法で離散角度求積近似を用いた (FS/LS ADMOC 加速法の) 場合、空間均質化を行わずに詳細計算と加速計算で同一の空間メッシュ構造を用いる場合、加速法の角度分割数を詳細計算の角度分割数に近づけるほど収束性は向上した。しかし、空間均質化を行う場合は計算モデルの差異に依らず全ての加速法で類似した収束性を示した。

本結果より、収束性に及ぼす影響は空間均質化誤差(詳細計算と加速計算のメッシュ数の違い)が最も支配的であり、次に空間離散化(有限差分、FS 近似、LS 近似)、角度離散化(P1, 角度離散点)の順となることが確認された。また本結果は、LS MOC に対しては FS 近似および P1 近似を用いる加速法を適用することは、収束性および実用上の観点からは十分合理的であることを示している。

4.6 参考文献

- [1]. K. S. SMITH, “Nodal Method Storage Reduction by Non-Linear Iteration,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **44**, 265 (1984).
- [2]. K. S. SMITH and J. D. RHODES III, “Full-Core, 2-D, LWR Core Calculations with CASMO-4E,” *Proc. PHYSOR 2002*, Seoul, Korea, October 7-10, 2002, p. 13A-04 (2002) (CD-ROM).
- [3]. H. G. JOO et al., “Methods and Performance of a Three-Dimensional Whole-Core Transport Code DeCART,” *Proc. PHYSOR 2004*, Chicago, Illinois, April 25–29 (2004) (CD-ROM).
- [4]. B. KOCHUNAS et al., “Overview of Development and Design of MPACT: Michigan Parallel Characteristics Transport Code,” *Proc. M&C 2013*, Sun Valley, Idaho, May 5–9 (2013) (CD-ROM).
- [5]. Y. S. JUNG et al., “Practical Numerical Reactor Employing Direct Whole Core Neutron Transport and Subchannel Thermal/Hydraulic Solvers,” *Ann. Nucl. Energy*, **62**, 357–374 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.06.031>.
- [6]. J. CHEN et al., “A new high-fidelity Neutronics Code NECP-X,” *Ann. Nucl. Energy*, **116**, 417–428 (2018); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.02.049>.
- [7]. M. JARRETT et al., “Analysis of Stabilization Techniques for CMFD Acceleration of Neutron Transport Problems,” *Nucl. Sci. Eng.*, **184**, 2, 208 (2016); <https://dx.doi.org/10.13182/NSE16-51>.
- [8]. E. LARSEN, “Infinite Medium Solutions to the Transport Equation, SN Discretization Schemes, and the Diffusion Approximation,” *Proc. M&C + SNA*, Salt Lake City, UT, USA, September 9–13 (2001) (CD-ROM).
- [9]. A. ZHU et al., “An Optimally Diffusive Coarse Mesh Finite Difference Method to Accelerate Neutron Transport Calculations,” *Ann. Nucl. Energy*, **95**, 116 (2016); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2016.05.004>.
- [10]. A. YAMAMOTO, T. ENDO, and A. GIHO, “Transport Consistent Diffusion Coefficient for CMFD Acceleration and Comparison of Convergence Properties,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **56**, 8, 716 (2019); <https://doi.org/10.1080/00223131.2019.1618405>.
- [11]. B. Kochunas, “Stability, Robustness, and Performance of CMFD in Whole Core Calculations,” *CASL Virtual Meeting*, November 16–19, 2020, 332 (2020); <https://dx.doi.org/10.13182/PCASL-32931>.
- [12]. A. YAMAMOTO, “Generalized Coarse-Mesh Rebalance Method for Acceleration of Neutron Transport Calculations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **151**, 3, 274 (2005); <https://doi.org/10.13182/NSE151-274>.
- [13]. N. Z. CHO, G. S. LEE, and C. J. PARK, “Partial Current-Based CMFD Acceleration of the 2D/1D Fusion Method for 3D Whole-Core Transport Calculations,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*,

- 88**, 594 (2003).
- [14]. Y. OSHIMA, A. YAMAMOTO, and T. ENDO, “S2 Consistent Analytic CMFD Acceleration for Method of Characteristics,” *Proc. M&C 2021*, Raleigh, North Carolina, October 3–7, 2021 (2021).
- [15]. D. WANG and S. XIAO, “A Linear Prolongation Approach to Stabilizing CMFD,” *Nucl. Sci. Eng.*, **190**, 1, 45 (2018); <https://doi.org/10.1080/00295639.2017.1417347>.
- [16]. P. T. PETKOV and T. TAKEDA, “Transport Calculations of MOX and UO₂ Pin Cells by the Method of Characteristics,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **35**, 12, 874 (1998); <https://doi.org/10.1080/18811248.1998.9733960>.
- [17]. R. M. FERRER, and J. D. RHODES, “A Linear Source Approximation Scheme for the Method of Characteristics,” *Nucl. Sci. Eng.*, **182**, 2, 151 (2016); <https://doi.org/10.13182/NSE15-6>.
- [18]. R. M. FERRER, and J. D. RHODES, “The Linear Source Approximation and Particle Conservation in the Method of Characteristics for Isotropic and Anisotropic Sources,” *Ann. Nucl. Energy*, **115**, 209 (2018); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.01.023>.
- [19]. G. ZHANG et al., “Consistent pCMFD Acceleration Schemes of the Three-Dimensional Transport Code PROTEUS-MOC,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 8, 828 (2019); <https://doi.org/10.1080/00295639.2018.1560854>.
- [20]. A. P. FITZGERALD, B. KOCHUNAS, and T. DOWNAR, “Improved Formulation of the Method of Characteristics with Linear Source for 2D/1D and Multiphysics Calculations,” *Proc. M&C 2019*, Portland, OR, August 25–29, 2019, 1093 (2019).
- [21]. Y. LIU et al., “Validation of Pin-Resolved Reaction Rates, Kinetics Parameters, and Linear Source MOC in MPACT,” *Nucl. Sci. Eng.*, **195**, 1, 50 (2021); <https://doi.org/10.1080/00295639.2020.1780853>.
- [22]. K. TSUJITA, T. ENDO, and A. YAMAMOTO, “Application of the Multigrid Amplitude Function Method for Time-Dependent MOC Based on the Linear Source Approximation,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **57**, 6, 646 (2020); <https://doi.org/10.1080/00223131.2019.1709993>.
- [23]. A. YAMAMOTO et al., “GENESIS: A Three-Dimensional Heterogeneous Transport Solver Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 1, 1 (2017); <https://doi.org/10.1080/00295639.2016.1273002>.
- [24]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Recent Developments in the GENESIS Code Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Eng. Technol.*, **49**, 6, 1143 (2017); <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.06.016>.
- [25]. G. GUNOW, B. FORGET, and K. SMITH, “Full Core 3D Simulation of the BEAVRS Benchmark with OpenMOC,” *Ann. Nucl. Energy*, **134**, 299, 299 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2019.05.050>.

- [26]. A. ZHU et al., “Theoretical Convergence Rate Lower Bounds for Variants of Coarse Mesh Finite Difference to Accelerate Neutron Transport Calculations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 3, 224 (2017); <https://doi.org/10.1080/00295639.2017.1293408>.
- [27]. B. KOCHUNAS, “Theoretical Convergence Rate Analysis of a Unified CMFD Formulation with Various Diffusion Coefficients,” *Proc. M&C 2019*, Portland, OR, August 25–29, 2019, 978 (2019).
- [28]. B. C. YEE, B. KOCHUNAS, and E. W. LARSEN, “A Multilevel in Space and Energy Solver for 3-D Multigroup Diffusion and Coarse-Mesh Finite Difference Eigenvalue Problems,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 7, 722 (2019); <https://doi.org/10.1080/00295639.2018.1562777>.
- [29]. R. FERRER, “Stability Analysis of CMFD Acceleration and Linear Prolongation for Weighted Linear Difference Schemes,” *Trans. Am. Nucl. Sci.*, **122**, Virtual Conference, June 8–11, 2020 (2020); <https://dx.doi.org/10.13182/T122-32408>.
- [30]. Y. OSHIMA et al., “Impact of Various Parameters on Convergence Performance of CMFD Acceleration for MOC in Multigroup Heterogeneous Geometry,” *Nucl. Sci. Eng.*, **194**, 6, 477 (2020); <https://doi.org/10.1080/00295639.2020.1722512>.
- [31]. L. R. CORNEJO et al., “Multilevel-in-Space-and-Energy CMFD in VERA,” *Nucl. Sci. Eng.*, **195**, 8, 890–905 (2021); <https://doi.org/10.1080/00295639.2021.1877503>.
- [32]. A. YAMAMOTO, et al., “Convergence Improvement of Coarse Mesh Rebalance Method for Neutron Transport Calculations,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, 8, 781 (2004); <https://doi.org/10.1080/18811248.2004.9715547>.
- [33]. Y. A. Chao, “A Theoretical Analysis of the Coarse Mesh Finite Difference Representation in Advanced Nodal Methods,” *Proc. M&C1999*, Madrid, Spain, September 27–30, 1999, **1**, 117–126 (1999).
- [34]. Wolfram Research, “Mathematica”, <https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav> (2021年12月20日現在).
- [35]. Numpy, “NumPy v1.21 Manual, numpy.linalg.eig”, <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eig.html> (2021年12月20日現在).

第5章 領域毎 even-parity 不連続因子を扱う多群モンテカルロ法 (DF-MC)

5.1 本章の概要

一般的に中性子輸送計算におけるモンテカルロ法(確率論的手法)では離散化誤差低減手法は適用されない。これは、モンテカルロ法では空間、エネルギーおよび角度について近似や離散化誤差を極限まで低減できるためである。モンテカルロ法では組み合わせ幾何形状(CG)などを用いることで複雑な幾何形状を直接的に取り扱することができる。また任意の立体角方向への中性子飛行を近似や離散化を行わずに扱うことができる。エネルギーについては、すべての評価済み核データをエネルギー点について与えることで、多群近似を行わない厳密な取り扱いが可能である(連続エネルギーモンテカルロ法)。決定論的手法では取り扱いが複雑な中性子と物質の詳細な衝突過程や核反応を模擬可能である。従って、モンテカルロ法において離散化誤差低減手法の適用は行われてこなかった。

またモンテカルロ法への離散化誤差低減手法適用を考えると、SPH因子は適用可能だが、不連続因子の適用手法は今まで確立されていない。SPH因子は、決定論的手法と同様に各空間領域の核反応断面積にSPH因子を乗じてモンテカルロ計算を実行すればよい。対して不連続因子は決定論的手法における扱いをそのままモンテカルロ法に適用することは困難である。一般的に不連続因子は拡散計算(拡散方程式)に対して適用されることが多く、不連続因子は空間領域境界の全中性子束の不連続性を扱う。これにより中性子流の連続性を成立させ、空間領域内の反応率を保存する。しかしモンテカルロ法は輸送方程式に基づいて計算されるため、拡散方程式における不連続因子の扱い方をそのまま流用することはできない。

さらに、決定論的な輸送計算手法(輸送方程式)に対する不連続因子は、角度中性子束に対して適用され、角度依存性(角度離散化誤差)を有することが多い。そのため、角度離散化誤差を排除できるモンテカルロ法とは相性が悪い。仮に角度依存性を有する不連続因子をモンテカルロ法に適用する場合、角度について詳細に離散化された不連続因子を求める必要がある。また、決定論的な輸送計算手法に対する不連続因子は、適用されるパラメータや扱い方について様々な定義が提案されており、どのような定義の不連続因子がモンテカルロ法に応用可能か明らかになっていない。

以上の理由から、モンテカルロ法に対して不連続因子は適用されてこなかった。しかし近年、輸送方程式に対して角度依存性のない不連続因子として領域毎 even-parity 不連続因子(EPDF)が提案された[1]。EPDFは、even-parity 角度中性子束に基づく輸送方程式に対して適用され、空間領域境界の odd-parity 角度中性子束が保存されるように定義される。even-および odd-parity 角度中性子束はある方向とその逆方向の角度中性子束の和と差をとって定義され、それぞれ全中性子束および中性子流に関するパラメータである。EPDF と even-および odd-parity 角度中性子束の関係式を整理すると、EPDF と角度中性子束の関係式が求まる。この関係式は、光の透過および反射の式と類似しており、中性子束の不連続性と光の透過および反射とのアナロジーが示唆された[12]。すなわち光の透過および反射のように中性

子を透過もしくは反射させることで中性子束の不連続性を扱える可能性がある。

そこで本章では、領域毎 **even-parity** 不連続因子を扱う多群モンテカルロ法 (DF-MC) を提案する。また検証計算を行うことで、本手法の妥当性を確認することを目的とする。DF-MC 法では EPDF と角度中性子束の関係式を、光の透過および反射のアナロジーとして考えることで、EPDF から求まる定数係数が中性子の疑似的な透過率 (中性子透過係数) および反射率 (中性子反射係数) に相当すると考える。そして中性子透過係数および反射係数の値に基づいて、空間領域境界で中性子を透過もしくは反射させることで、空間領域境界における全中性子束の空間的不連続性を扱う。

従来、モンテカルロ法に対する不連続因子の適用方法は提案されておらず、DF-MC 法は中性子輸送計算における新たな確率論的手法であると言える。本手法は、高精度な参照解を求めるという実用上の観点では現時点においては利点が乏しいが、原子炉物理学における学術的価値が高く確率論的手法の応用可能性を広げる手法であると考えられる。

以下に本章の構成を示す。5.2 節では角度中性子束と EPDF の関係を示し、中性子透過係数および反射係数を定義する。5.3 節では DF-MC 法の具体的な計算手順を示す。特に一般的なモンテカルロ法とは異なる点として、中性子の透過および反射、負のウェイトを扱うモンテカルロ計算、**weight cancellation** の計算方法をそれぞれ示し、最後に DF-MC 計算の計算手順をまとめる。5.4 節では固定源計算による検証計算を行う。検証計算は 2 群 1 次元平板体系で行い、中性子透過および反射の原理を実証する。5.5 節では固有値計算による検証計算を示す。固有値計算では多群二次元単一集合体体系および炉心体系を扱い、実機軽水炉模擬体系における DF-MC 計算の妥当性および有用性を確認する。最後に 5.6 節に本章のまとめ、5.7 節に本章の参考文献を記載する。

5.2 角度中性子束と領域毎 even-parity 不連続因子の関係

本節では、角度中性子束と領域毎 even-parity 不連続因子の関係式から、DF-MC 法における中性子透過係数と中性子反射係数の定義について述べる。なお、EPDF の定義および角度中性子束と EPDF の関係式の導出は 3.4 節に示す。

ここで図 5.2.1 に示すとおり、左側領域 L と右側領域 R から成る 2 領域問題を考える。このとき各領域への入射および放出角度中性子束と EPDF の関係式は式(4.3.3)および(5.2.2)のとおり整理できる。

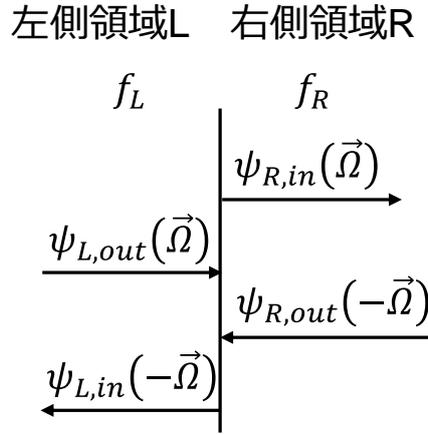


図 5.2.1 2 領域問題における角度中性子束と EPDF の関係

$$\psi_{R,in}(\vec{\Omega}) = \left(\frac{2f_L}{f_L + f_R} \right) \psi_{L,out}(\vec{\Omega}) + \left(\frac{f_L - f_R}{f_L + f_R} \right) \psi_{R,out}(-\vec{\Omega}), \quad (5.2.1)$$

$$\psi_{L,in}(-\vec{\Omega}) = \left(\frac{2f_R}{f_L + f_R} \right) \psi_{R,out}(-\vec{\Omega}) + \left(\frac{f_R - f_L}{f_L + f_R} \right) \psi_{L,out}(\vec{\Omega}), \quad (5.2.2)$$

ここで、 ψ は角度中性子束、 f は EPDF、 $\vec{\Omega}$ は飛行方向、 L および R は空間領域、 in および out は入射もしくは放出方向をそれぞれ表す。なおエネルギー群に関するインデックスは省略している。

このときある放出角度中性子束が、各領域の入射角度中性子束にどの程度寄与するかを考える。例として、領域 L の放出角度中性子束 $\psi_{L,out}(\vec{\Omega})$ に着目する。式(4.3.3)および(5.2.2)より、 $\psi_{L,out}(\vec{\Omega})$ は領域 R の入射角度中性子束 $\psi_{R,in}(\vec{\Omega})$ と領域 L の入射角度中性子束 $\psi_{L,in}(-\vec{\Omega})$ の両方に寄与している。すなわち、領域 L から $\vec{\Omega}$ 方向に放出された中性子は、空間領域境界において同一方向 $\vec{\Omega}$ に透過する成分と逆方向 $(-\vec{\Omega})$ に反射される成分に分離される。さらに、 $\psi_{L,out}(\vec{\Omega})$ の定数係数部分がそれぞれの入射角度中性子束への寄与割合を表している。これは中性子の疑似的な透過率および反射率に相当しており、本論文では中性子透過係数および反射係数として定義する。

領域 L からの中性子透過係数および反射係数は、式(5.2.3)および(5.2.4)のとおりとなる。

このとき式(5.2.5)のとおり、透過係数および反射係数の和は必ず 1.0 となる。これは光の透過率および反射率と同じ性質である。

$$f_{L \rightarrow R}^{trans} = \frac{2f_L}{f_L + f_R}, \quad (5.2.3)$$

$$f_{L \rightarrow L}^{reflec} = \frac{f_R - f_L}{f_L + f_R}, \quad (5.2.4)$$

$$f_{L \rightarrow R}^{trans} + f_{L \rightarrow L}^{reflec} = \frac{2f_L}{f_L + f_R} + \frac{f_R - f_L}{f_L + f_R} = 1.0. \quad (5.2.5)$$

同様に、領域 R の放出角度中性子束 $\psi_{R,out}(-\vec{\Omega})$ に着目すると、領域 R からの中性子透過係数および反射係数は、式(5.2.6)および(5.2.7)のとおりとなる。また同様に式(5.2.8)に示すとおり、透過係数と反射係数の和は必ず 1.0 となる。

$$f_{R \rightarrow L}^{trans} = \frac{2f_R}{f_L + f_R}, \quad (5.2.6)$$

$$f_{R \rightarrow R}^{reflec} = \frac{f_L - f_R}{f_L + f_R}, \quad (5.2.7)$$

$$f_{R \rightarrow L}^{trans} + f_{R \rightarrow R}^{reflec} = \frac{2f_R}{f_L + f_R} + \frac{f_L - f_R}{f_L + f_R} = 1.0. \quad (5.2.8)$$

光の透過および反射とのアナロジーを考えると、式(5.2.3)と(5.2.4)、および式(5.2.6)と(5.2.7)で定義される透過係数および反射係数を、中性子の疑似的な透過率および反射率と考えることができる。従って、DF-MC 計算ではこれら定数係数の値に基づき中性子を透過もしくは反射させることで、EPDF による全中性子束の不連続性を扱うことができる。

以上が、角度中性子束と EPDF の関係式と DF-MC 法における中性子透過係数および反射係数の定義である。DF-MC 法における具体的な透過および反射方法は 5.3.2 項で述べる。

5.3 DF-MC 法

5.3.1 本手法の概要

本節では、DF-MC 法の具体的な計算方法および計算手順を述べる。5.1 および 5.2 節で説明したとおり、DF-MC 法では空間領域境界で中性子を透過もしくは反射させることで全中性子束の不連続性を扱う。DF-MC 法と一般的な定常中性子輸送モンテカルロ法との相違点は以下のとおりである。

- EPDF および中性子透過係数および反射係数の計算
- 物質空間領域境界における中性子の透過・反射
- 負のウエイトの扱い
- 核分裂中性子源の **weight cancellation**

DF-MC 法では、空間領域境界で中性子を透過もしくは反射させる必要があるため、追跡する中性子の飛程と EPDF が与えられる空間領域境界との交差判定を行う必要がある。すなわち、Delta-tracking 法（仮想散乱法）と DF-MC 法を組み合わせることはできない。本検討では、Delta-tracking 法を用いずに、衝突点サンプリング毎に空間領域交差判定を実施することとする。また、DF-MC 計算では中性子のウエイトを扱う必要があるため、本検討では非アナログモンテカルロ法をベースとした計算手順について述べる。

本節の説明では EPDF は事前に計算されていることを仮定する。EPDF の計算方法については 5.3.5 項で述べる。その他 3 つの項目については次項以降でそれぞれ説明する。なお、本節では一般的な定常中性子輸送モンテカルロ法に関する説明は割愛し、参考文献を示すのみに留める[16]–[23]。

5.3.2 中性子の透過および反射

本項では、DF-MC 法における中性子の透過および反射の計算方法について述べる。5.2 節に示したとおり、角度中性子束と EPDF の関係式から、中性子透過係数および反射係数が式(5.2.3)と(5.2.4)、および式(5.2.6)と(5.2.7)のとおり定義される。追跡している中性子が空間領域境界を交差したとき、その境界の透過係数および反射係数に従って中性子を透過もしくは反射させればよい。透過もしくは反射後は、空間領域境界との交差点から中性子の追跡を継続する。

ただし、DF-MC 法における中性子の透過および反射は、光の透過および反射とは以下の二点が異なる。一点目は、反射したときに中性子の飛行方向は反転し、逆方向を向くことである。光の場合、光の反射の法則より入射方向 ($\vec{\Omega}$) に対して法線を挟んだ反射方向 ($\vec{\Omega}'$) に光は反射される。このとき反射角は入射角と等しい。しかし DF-MC 法における中性子の反射は、透過方向 ($\vec{\Omega}$) の 180° 逆方向 ($-\vec{\Omega}$) を向く。これは even-および odd-parity 角度中性子束の定義に起因する。なお、even-および odd-parity 角度中性子束の定義は 3.4 節を参考にすること。従って、境域境界で反射が生じる場合、中性子は入射方向の 180° 逆方向に反射される。

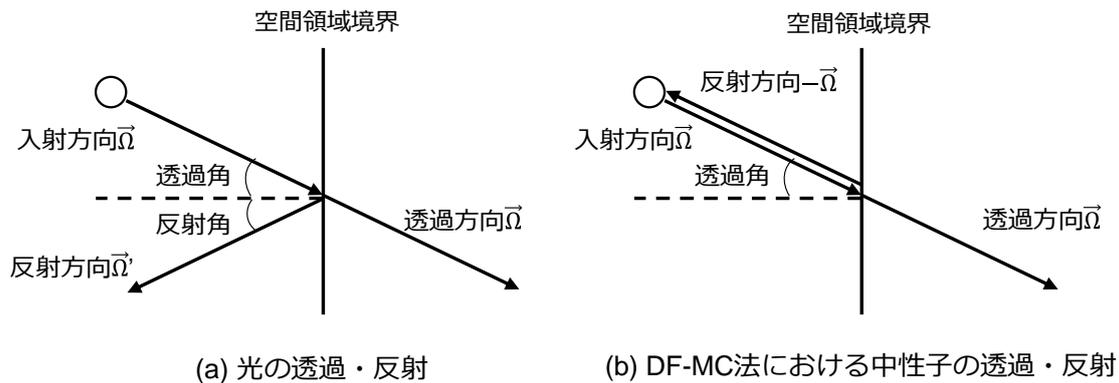


図 5.3.1 光と DF-MC 法における中性子の透過および反射方向

二点目の相違点は、透過係数が 1.0 以上の値をとり反射係数が負の値をとる領域境界および方向が必ず存在することである。光の透過率および反射率は必ず $[0.0, 1.0]$ で値をとる。しかし、中性子透過係数および反射係数の定義式(5.2.3)と(5.2.4)および式(5.2.6)と(5.2.7)より、二領域の EPDF の値 f_L, f_R の大小に依らず、すべての領域境界についてある方向の透過係数および反射係数は、必ず 1.0 以上かつ負の値をとる。

例えば二領域問題において $f_L = 0.6, f_R = 0.4$ とすると、透過係数および反射係数の値は表 5.3.1 のとおり計算できる。表 5.3.1 より、L 方向からの透過係数 $f_{L \rightarrow R}^{trans} = 1.2$ および反射係数 $f_{L \rightarrow L}^{reflec} = -0.2$ となる。すなわち、隣接 2 領域の EPDF が異なる値をとる場合、必ずどちらかの方向の透過係数および反射係数は、1.0 以上および負の値となる。従って、この場合は透過係数および反射係数を中性子透過確率および反射確率とすることができない。なお、式(5.2.5)および(5.2.8)に示すとおり、透過係数および反射係数の大きさに依らず、同一方向の透過係数と反射係数の和は必ず 1.0 になる。

表 5.3.1 $f_L = 0.6, f_R = 0.4$ における透過係数および反射係数の値

方向	透過係数 f^{trans}	透過係数 f^{reflec}
L →	1.2	-0.2
R →	0.8	0.2

以上を踏まえ、透過確率（反射確率）の決定方法および透過反射後の中性子情報（ウェイト、飛行方向）の更新方法について示す。中性子が空間領域境界を交差したとき、 $[0.0, 1.0]$ の一樣乱数 ξ を振る。乱数 ξ と透過確率の大小関係と比較し、 ξ が透過確率以下であれば中性子を透過させ、透過確率以上であれば反射させる。そのため透過および反射係数から透過確率を求める必要がある。同一方向の透過係数および反射係数の和は必ず 1.0 になるが、上述のとおり透過係数および反射係数は $[0.0, 1.0]$ の範囲外の値をとりうる。

そこで、透過係数が 1.0 未満の場合と 1.0 以上の場合で、以下のとおり透過確率と透過反

射後ウェイトの計算方法を変える。いずれの方法も、角度中性子束と EPDF の関係式である式(4.3.3)および(5.2.2)と、透過反射前後のウェイト期待値が保存されるように計算方法を決定している。

以下では二領域問題において L→R 方向に中性子が入射する場合を仮定する。また、透過確率を $p_{L\rightarrow R}^{trans}$ 、反射確率を $p_{L\rightarrow L}^{reflec}$ 、透過反射前のウェイトを W 、透過反射後のウェイトをそれぞれ W^{trans} 、 W^{reflec} とする。

- **透過係数および反射係数が 1.0 未満の場合**

透過係数および反射係数が 1.0 未満の場合、透過係数および反射係数の値が透過確率および反射確率となる。透過確率と反射確率はいずれも 0.0 以上 1.0 未満の値をとり、和は必ず 1.0 となる。

$$p_{L\rightarrow R}^{trans} = f_{L\rightarrow R}^{trans}, \quad (5.3.1)$$

$$p_{L\rightarrow L}^{reflec} = f_{L\rightarrow L}^{reflec} (= 1 - p_{L\rightarrow R}^{trans}). \quad (5.3.2)$$

このとき透過および反射後もウェイトは変化しない。

$$W^{trans} = W^{reflec} = W, \quad (5.3.3)$$

透過反射前後のウェイト期待値は式(5.3.4)のとおり保存される。また、式(4.3.3)および(5.2.2)も常に満たされる。

$$p_{L\rightarrow R}^{trans}W^{trans} + p_{L\rightarrow L}^{reflec}W^{reflec} = W(f_{L\rightarrow R}^{trans} + f_{L\rightarrow L}^{reflec}) = W, \quad (5.3.4)$$

以上より透過および反射係数が 1.0 未満の場合は、透過係数を透過確率として用いればよく、透過反射後のウェイトは変化しない。

- **透過係数が 1.0 以上かつ反射係数が負の値の場合**

透過係数は 1.0 以上の値であるため、そのまま透過確率に設定することはできない。そこで、EPDF と角度中性子束の関係式とウェイト期待値保存式が成立するように、透過確率および反射確率を式(5.3.5)および(5.3.6)のとおり計算する。すなわち透過係数を、透過係数と反射係数の絶対値の和で規格化する。これにより透過確率と反射確率はいずれも 0.0 以上 1.0 未満の値をとり、和は必ず 1.0 となる。

$$p_{L\rightarrow R}^{trans} = \frac{f_{L\rightarrow R}^{trans}}{f_{L\rightarrow R}^{trans} + |f_{L\rightarrow L}^{reflec}|}, \quad (5.3.5)$$

$$p_{L\rightarrow L}^{reflec} = \frac{|f_{L\rightarrow L}^{reflec}|}{f_{L\rightarrow R}^{trans} + |f_{L\rightarrow L}^{reflec}|} (= 1 - p_{L\rightarrow R}^{trans}). \quad (5.3.6)$$

透過および反射後のウェイトは透過反射前のウェイトを以下のとおり定数倍する。反射する場合はウェイトの符号は必ず反転する（マイナスの定数倍される）。

$$W^{trans} = (f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|)W, \quad (5.3.7)$$

$$W^{reflec} = -(f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|)W. \quad (5.3.8)$$

これにより、透過反射前後のウエイト期待値は式(5.3.9)のとおり保存される。

$$\begin{aligned} & p_{L \rightarrow R}^{trans} W^{trans} + p_{L \rightarrow L}^{reflec} W^{reflec} \\ &= \frac{f_{L \rightarrow R}^{trans}}{f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|} (f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|)W \\ &\quad + \frac{|f_{L \rightarrow L}^{reflec}|}{f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|} \cdot -(f_{L \rightarrow R}^{trans} + |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|)W \\ &= f_{L \rightarrow R}^{trans} W - |f_{L \rightarrow L}^{reflec}|W = W(f_{L \rightarrow R}^{trans} + f_{L \rightarrow L}^{reflec}) \\ &= W. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

ウエイト期待値保存のみを満たせばよいのであれば、透過確率は任意の値に設定し、透過反射前後でウエイトが保存されるように透過反射後ウエイトを定数倍すればよい。しかし、DF-MC法では角度中性子束とEPDFの関係式である式(4.3.3)および(5.2.2)を常に満たす必要がある。そのため、式(5.3.5)–(5.3.8)から透過確率と反射確率および透過反射後ウエイトを決定する必要がある。この方法により式(4.3.3)および(5.2.2)は常に成立する。

透過係数が1.0以上かつ負の反射係数が現れる場合は、式(5.3.5)から透過確率を計算する。透過反射後のウエイトは式(5.3.7)および(5.3.8)によって計算する。反射する場合は、反射後のウエイトの符号は反転し負のウエイトが得られる場合がある。

以上が、透過係数が1.0未満もしくは1.0以上の場合における、透過確率および透過反射後ウエイトの計算方法である。同様に、R→L方向に中性子が入射する場合も同じ方法で中性子の透過および反射を扱う。上記の場合分けをまとめると表5.3.2のとおりである。ここで $\vec{\Omega}^{trans}$, $\vec{\Omega}^{reflec}$ は透過反射後の中性子飛行方向である。

表 5.3.2 透過および反射後の中性子情報の更新方法

中性子の挙動	$f^{trans} < 1.0$ の場合 ($f^{reflec} < 1.0$)	$f^{trans} > 1.0$ の場合 ($f^{reflec} < 0.0$)
透過	$p^{trans} = f^{trans},$ $W^{trans} = W,$ $\vec{\Omega}^{trans} = \vec{\Omega}.$	$p^{trans} = \frac{f^{trans}}{f^{trans} + f^{reflec} },$ $W^{trans} = (f^{trans} + f^{reflec})W,$ $\vec{\Omega}^{trans} = \vec{\Omega}.$
反射	$p^{reflec} = f^{reflec},$ $W^{reflec} = W,$ $\vec{\Omega}^{reflec} = -\vec{\Omega}.$	$p^{reflec} = \frac{ f^{reflec} }{f^{trans} + f^{reflec} },$ $W^{reflec} = -(f^{trans} + f^{reflec})W,$ $\vec{\Omega}^{reflec} = -\vec{\Omega}.$

なお、EPDF は定義上いかなる実数値もとりのため、透過係数および反射係数の絶対値が非常に大きな値をとる可能性がある。透過係数および反射係数の絶対値があまりにも大きい値をとる場合、式(5.3.7)および(5.3.8)より透過反射毎にウェイトが爆発的に増大する可能性がある。例えば、 $f_{L \rightarrow}^{trans} = 100.0, f_{L \rightarrow L}^{reflec} = -99.0$ の場合、1 回の透過もしくは反射によってウェイトは ± 199 倍される。従って、計算体系および計算条件によっては透過反射によるウェイトの発散が生じる可能性がある。

5.3.3 負のウェイトの扱う中性子ランダムウォーク

5.3.3 項では中性子の透過および反射の扱いについて述べた。このとき透過および反射後の中性子ウェイトを定数倍する。DF-MC 法では中性子ウェイトを扱うことから、非アナログモンテカルロ法に基づく計算を行う必要がある。また、透過係数が 1.0 以上かつ中性子が反射した場合、ウェイトは負の値で定数倍される。すなわち DF-MC 法では負のウェイトが現れる。従って、DF-MC 計算では負のウェイトを扱う中性子ランダムウォークを行う必要がある。なお、中性子輸送モンテカルロ法による高次モード計算や中性子雑音解析でも負のウェイト（さらに複素数のウェイト）が現れることが確認されている[24]–[28]。

以下では負のウェイトも取り扱い可能な中性子ランダムウォークとして、ロシアンルーレットおよび核分裂中性子の発生について述べる。その他の計算（衝突点のサンプリング、ウェイトの更新、散乱先エネルギー群の決定、エスティメータなど）は、従来の多群非アナログモンテカルロ法と同様であるため、本項では省略する。

● 負のウェイトを扱うロシアンルーレット

非アナログモンテカルロ法では、中性子のウェイトを定数倍することで核反応を模擬する。そのため中性子の追跡を継続しても計算は終わらない（ウェイトが 0 にならない）。また、ウェイトの小さな中性子は核反応への寄与が小さく、そのような中性子を長く追跡するのは計算コストの観点から合理的ではない。そこで非アナログモンテカルロ法では、ウェイトが事前に設定した閾値未満となった中性子に対してロシアンルーレットを行い、一定の確率で中性子を消滅させる。このときロシアンルーレット前後のウェイト期待値は保存させる。これにより、ウェイト絶対値の小さな中性子のみを消去し、効率よく計算を行うことができる。

DF-MC 法では、ウェイトの絶対値に着目してロシアンルーレットを実行する。中性子のウェイトを W としたとき、その絶対値 $|W|$ がロシアンルーレット実行基準ウェイト W_{ku} 以下ならロシアンルーレットを実行する。

ロシアンルーレットでは、 $[0.0, 1.0)$ の一様乱数 ξ を振り、 ξ が $|W|/W_{sur}$ 未満なら、中性子は生存しウェイトは $W_{sur} \cdot \text{sgn}(W)$ に更新されて追跡を継続する。対して、 ξ が $|W|/W_{sur}$ 以上なら、中性子は消滅され追跡は終了する。ここで演算子 $\text{sgn}(\)$ は符号関数であり、引数と同符号で絶対値 1 の値を返す ($W > 0$ なら $\text{sgn}(W) = 1$ 、 $W < 0$ なら $\text{sgn}(W) = -1$)。また

W_{kill}, W_{sur} は入力値として与えられる（ただし $W_{kill} < W_{sur}$ ）。すなわち中性子が生存した場合は、ウエイト絶対値は W_{sur} となり符号は元のウエイトの符号を引き継ぐ。

$$\text{if } 0 \leq \xi < \frac{|W|}{W_{sur}} \Rightarrow \text{中性子は生存、ウエイトは } W_{sur} \cdot \text{sgn}(W) \text{ に更新,} \quad (5.3.10)$$

$$\text{else if } \frac{|W|}{W_{sur}} \leq \xi < 1 \Rightarrow \text{中性子は消滅（すなわちウエイトは } 0 \text{）.} \quad (5.3.11)$$

上記の方法でロシアンルーレットを実行すると、 $|W|/W_{sur}$ の確率でウエイトが $W_{sur} \cdot \text{sgn}(W)$ となり、 $(1 - |W|/W_{sur})$ の確率でウエイトが0となるため、式(3.4.31)に示すとおり、ロシアンルーレット前後でウエイト期待値は保存される。以上が、負のウエイトを扱うロシアンルーレットの計算方法である。

$$\frac{|W|}{W_{sur}} \cdot W_{sur} \cdot \text{sgn}(W) + \left(1 - \frac{|W|}{W_{sur}}\right) \cdot 0 = |W| \cdot \text{sgn}(W) = W. \quad (5.3.12)$$

● 負のウエイトを扱う核分裂中性子の発生

DF-MC 法では、核分裂中性子数 n を式(5.3.13)から計算する。ここで演算子 $\text{int}(\)$ はガウス記号、 k_{eff}^{before} は前バッチ計算で得られた実効増倍率である。 $|n|$ が1以上のとき、その座標（核分裂中性子発生位置）とその座標が含まれる空間領域番号および $\text{sgn}(n)$ を $|n|$ 個だけ記録する。空間領域番号は次項 5.3.4 で説明する **weight cancellation** で用いる。このとき W が負の場合、負のウエイト (-1) を有する核分裂中性子が発生する。

$$n = \text{int} \left(\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_t k_{eff}^{before}} |W| + \xi \right) \cdot \text{sgn}(W). \quad (5.3.13)$$

5.3.4 Weight cancellation

固有値計算において、1バッチ計算分のすべての中性子の追跡が終了したら、次バッチの計算へ移る。このときバッチ間で初期中性子群のウエイト総和が等しくなるように核分裂中性子源を規格化（サンプリング）する。規格化後、核分裂中性子発生位置から中性子を発生させ次バッチ計算の中性子ランダムウォークを始める。このとき発生する中性子のウエイト符号には正負(± 1)が混在しており、そのまま次バッチ計算を行うと数値計算の不安定性が生じ正確な数値解が得られなくなる。そこで、核分裂中性子源の規格化の前に、負のウエイトを持つ核分裂中性子を消去し、正のウエイトを持つ核分裂中性子のみを残す。これを **weight cancellation** と呼ぶ。

本論文における DF-MC 法の **weight cancellation** では、最近点对（最も距離の近いペア）の正と負のウエイトを持つ中性子ペアを打ち消し、負のウエイトを持つ中性子をすべて消去する。本方法では負のウエイトを持つ中性子の最近傍に位置する正のウエイトを持つ中性子を特定する必要がある。この問題は、多次元空間における点集合の中でユークリッド距離が最も小さい点のペアを探す最適化問題に等しく、最適化分野では最近点对問題と呼ばれ

る。

最近点対問題における最も単純な解法は、すべての点間の距離を計算して比較する方法だが、これは点数が N のとき $O(N^2)$ の計算量が必要となる。例えば1バッチあたりのヒストリー数は 10^5 の場合、1バッチあたり $O(10^{10})$ の計算量が必要となり現実的ではない。

そこで本検討では、空間分割に対する分割統治法を用いる。分割統治法は最近点対問題における効率的な解法であり、計算量は $O(N \log(N))$ となる。本論文では、この空間領域に対する分割統治法による最近点対 **weight cancellation** 方法を CP 法と呼ぶ (Closest Pair of points **weight cancellation method by divide and conquer algorithm for space**)。

以下に CP 法の計算手順を示す。また、計算手順の模式図を図 5.3.2 に示す。

step 1) 核分裂性物質領域を複数の空間領域に分割する。本論文では、CP 法による **weight cancellation** のための空間領域を CP 領域と呼ぶ。CP 領域は物質領域やタリー領域などとは別に任意に設定できる。

step 2) バッチ計算を行い、核分裂位置およびそのウェイトを記録する。

step 3) 負のウェイトが含まれる CP 領域内で最近点対となる正のウェイトを持つ中性子を探索する。同一領域内に正のウェイトを持つ中性子が存在しない場合は、隣接領域から順に探索を行う。

step 4) 負のウェイトを中心位置、最近点対距離を半径とした円内に、より距離の短い正のウェイトを持つ中性子がいないか探索する。

step 5) より短い距離に正のウェイトの中性子が存在すれば、その中性子を最近点対に更新する。

step 6) 最近点対の正負のウェイトを持つ中性子ペアを打ち消し合う。

step 7) 手順 3-6 を繰り返し、負のウェイトを持つ中性子をすべて消去する。

以上が CP 法による **weight cancellation** の計算手順である。

核分裂中性子数が十分多ければ、負のウェイトを持つ中性子と同一領域内に最近点対となる正のウェイトを持つ中性子が存在する可能性が高い。そのため同一領域内で最近点対判定を行えば十分であり、体系内のすべての中性子と最近点対判定を行うのに比べて計算量を削減できる。DF-MC 計算では、透過係数の値が 1.0 近傍かつ反射係数が 0.0 近傍の正の値であれば、負のウェイトの原因となる反射が行われる確率が小さいため、負のウェイトを持つ中性子数は少ない。そのため CP 領域を適切に設定すれば、**weight cancellation** に関する計算量を大幅に削減可能である。

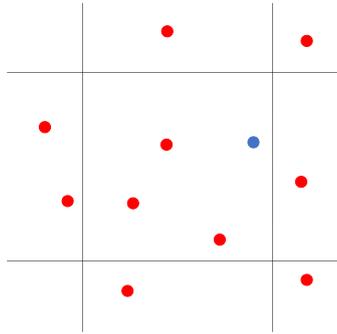
ただし CP 領域が大きすぎると領域内の中性子数が多く、最近点対探索の計算量が増加する。また逆に CP 領域が小さすぎると、同一領域内に含まれる中性子数が少なくなるため隣接領域まで最近点対探索を行わなければならない、計算量が増加する可能性がある。

また、本手法において核分裂中性子数が少なく最近点対距離が長い場合は、CP 法による **weight cancellation** に起因する誤差が生じる。その場合、1バッチあたりのヒストリー数を増やし核分裂中性子数を増やすことで、この誤差を低減できる。

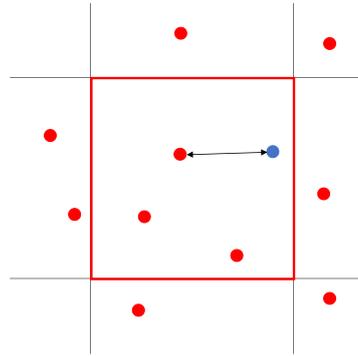
なお step 4)において最近点对距離円内かつ隣接領域に位置する正のウエイトの探索は、本検討で用いた自作DF-MC 計算コードでは最近点对距離円が含まれる隣接領域内のすべての正のウエイトを有する中性子に対して行った。すなわち負のウエイト中性子位置と最近点对距離から、最近点对距離を半径とした円がどの隣接領域に跨っているかを調べ、該当する隣接領域内のすべての正ウエイト中性子との距離を計算した。本方法は円内の中性子との距離を計算するよりも計算量が増加するが実装が比較的容易であるため、本検討ではこのような方法を採用した。

weight cancellation 手法には様々な手法が提案されている[24]–[28]。例として中性子雑音解析で用いられる **binning** 法について説明する[27]。**binning** 法も CP 法と同様に、核分裂性物質を複数の空間領域 (**bin**) に分割する。そして各 **bin** 内に含まれる中性子ウエイトの総和 n_f を計算する。そして、**bin** 内のすべての核分裂位置を消去し、一様乱数を用いて新たな核分裂位置を n_f 個サンプリングする。それぞれの核分裂中性子は+1 のウエイトを持つ。この操作をすべての **bin** で実行する。

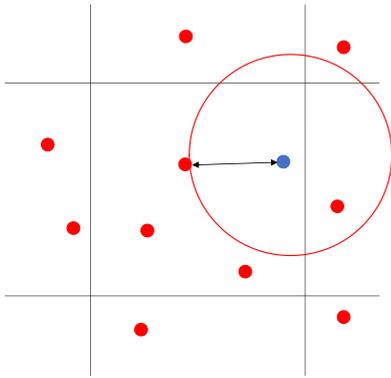
以上が **binning** 法の計算手順である。**binning** 法では CP 法とは異なり最近点对探索を行わないため、少ない計算量で **weight cancellation** を実施できる。また **binning** 法はウエイトが複素数をとる場合にも適用可能である。ただし、**weight cancellation** 後の核分裂中性子が **bin** 内に一様に分布することを仮定するため、**bin** 内の核分裂中性子源分布に偏りがある場合は **weight cancellation** に起因する誤差が生じる。



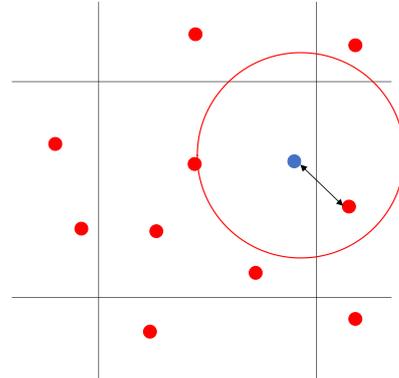
(a) 核分裂中性子の座標と領域を記録
(赤丸および青丸はそれぞれ正負のウェイトを持つ中性子を表す)



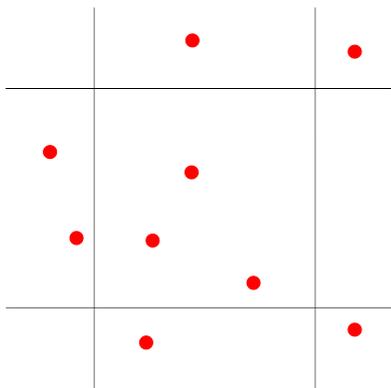
(b) 負のウェイトがある領域内（赤四角）で最近点対となる正のウェイトを探索する



(c) 負のウェイトを中心位置、最近点対距離を半径とした円内に、より距離の短い中性子がないか確認する



(d) より距離の近い正のウェイトがあれば、最近点対を更新する



(e) 最近点対の中性子を打ち消す

図 5.3.2 CP 法の計算手順の模式図

5.3.5 計算手順

本項では DF-MC 法の計算手順を述べる。DF-MC 法による固定源計算および固有値計算の計算フローを図 5.3.3 および図 5.3.4 にそれぞれ示す。全体的な計算の順序は、一般的な多群非アナログモンテカルロ計算と同様である。固定源計算の場合は、核分裂源の計算を行わないため **weight cancellation** は実施しない。

DF-MC 計算を行うには、中性子のランダムウォークを始める前に、EPDF の読み込み、各空間領域境界で透過係数および反射係数を計算する必要がある。また、衝突点サンプリングの際に空間領域境界との交差判定を行う。中性子が空間領域境界を交差したとき、その境界および飛行方向に応じた透過および反射係数を用いて、透過および反射判定を行う。中性子が透過した場合は、飛行方向は変わらず境界との交差点から再度追跡を開始する。反射した場合は、飛行方向を 180° 反転させて境界との交差点から追跡を再開する。透過および反射後のウエイトは、表 5.3.2 のとおり透過係数の値が 1.0 以下か否かで異なる。DF-MC 計算では負のウエイトが現れるため、負のウエイトを扱えるようウエイトの絶対値を用いて核分裂判定やロシアンルーレットを実行する。また核分裂中性子の発生では、**weight cancellation** を行えるように核分裂位置だけではなくウエイトの符号および CP 領域番号も併せて記録する。CP 法による **weight cancellation** では、最近点対問題における分割統治法を用いて、負のウエイトをすべて消去する。これによりバッチ計算の安定性を確保する。ウエイトの更新や物理量のタリーなどは従来の多群非アナログモンテカルロ法と同様である。総バッチおよびヒストリー数の計算が終了したら、タリーした物理量を統計処理し、計算結果を得る。以上が DF-MC 計算の計算手順である。

DF-MC 計算を実行するためには、従来の多群非アナログモンテカルロコードに、①EPDF の読み込み、②透過反射係数の計算、③透過反射判定、④負のウエイトの取扱、⑤核分裂中性子の **weight cancellation**、を実装すればよい。

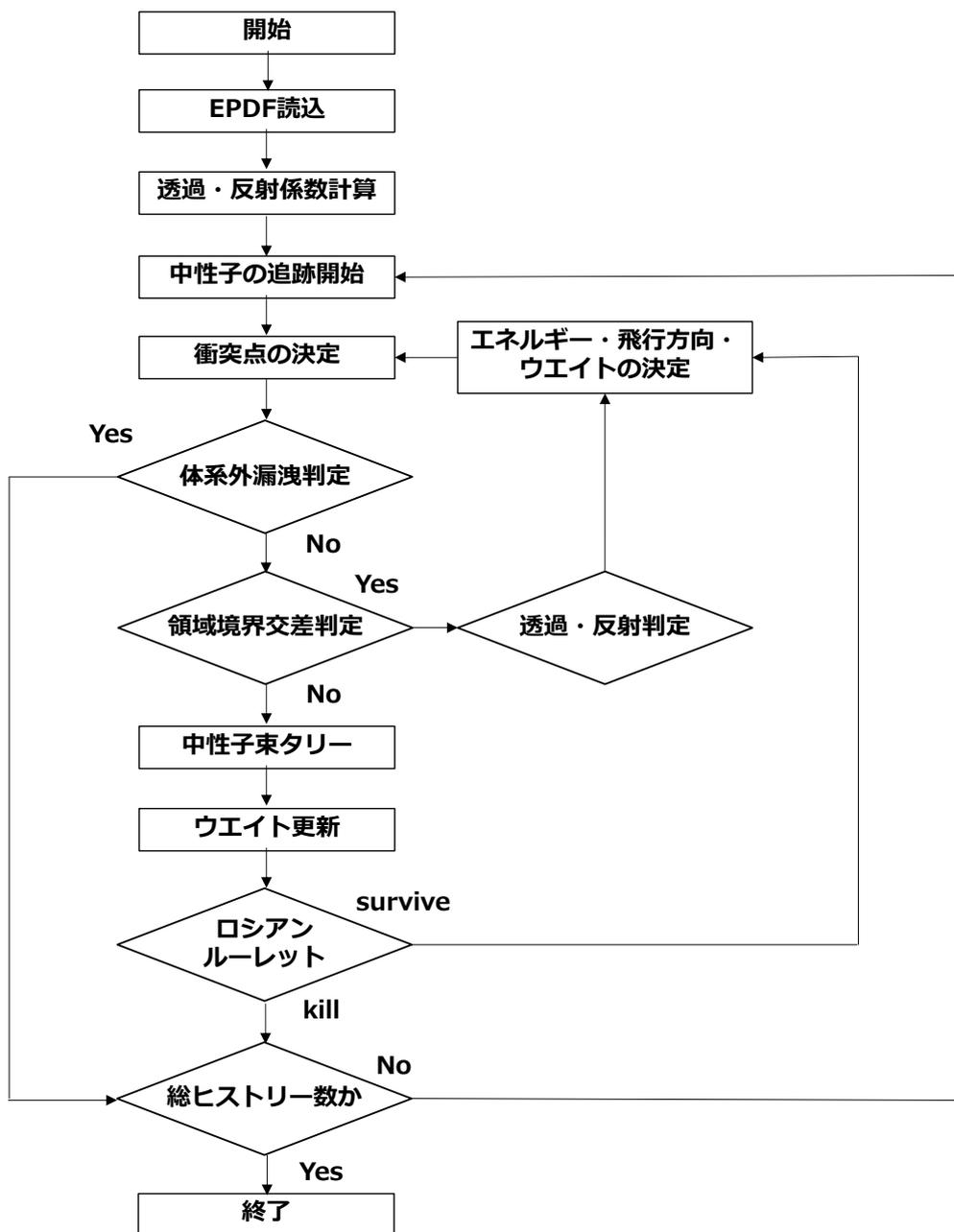


図 5.3.3 DF-MC 法による固定源計算のフロー

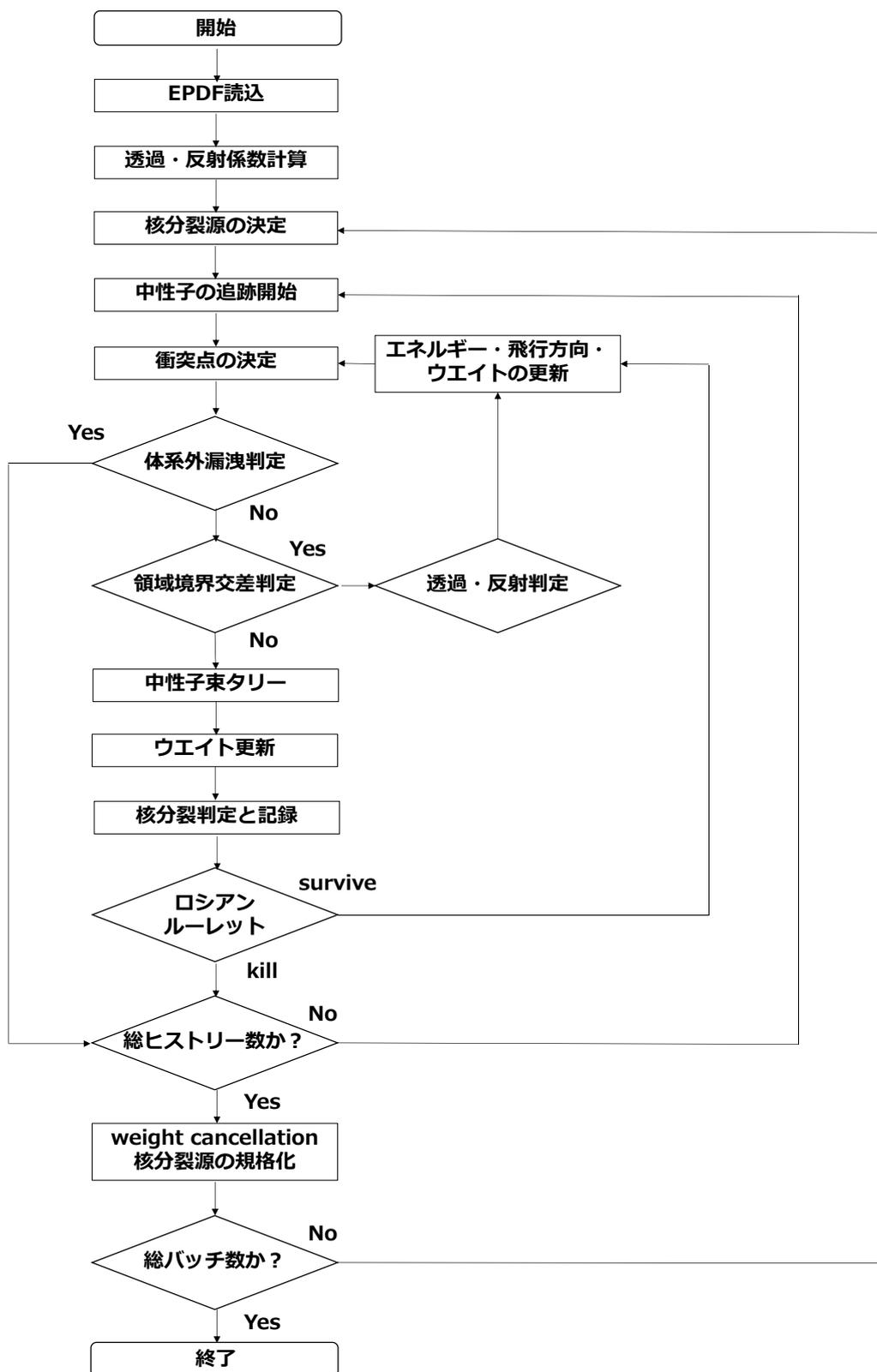


図 5.3.4 DF-MC 法による固有値計算の計算フロー

最後に、EPDF の計算方法について述べる。EPDF の計算方法は、MOC 計算（決定論的手法）に基づく方法と DF-MC 計算に基づく方法の 2 通りが考えられる。前者の MOC 計算は、決定論的手法の場合と同様である[29]。後者は、決定論的手法の場合と同様に、透過係数および反射係数の値を DF-MC 計算を反復させて求める方法である。DF-MC 計算を反復させる方法は、計算コストの観点で現実的ではないと考える。

よって本検討では MOC 計算により EPDF を求める。EPDF のための MOC 計算は、EPDF の離散化誤差がなるべく低減されるよう、詳細な計算条件で実施する必要がある。MOC による EPDF 計算手順は第 3 章 に示すとおりである。下図に空間均質化を伴う場合の MOC による EPDF 計算の計算フローを再掲する（図 3.4.2）。空間均質化を行わず角度分割数やエネルギー群を縮約する場合は、均質 MOC 計算の代わりに粗い計算条件での MOC 計算を実行すればよい。

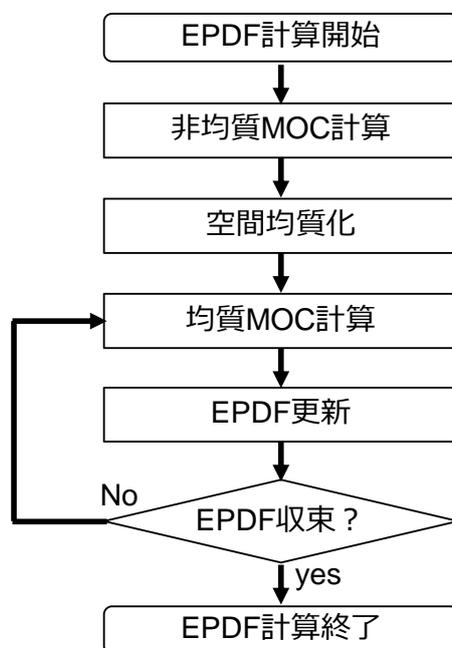


図 3.4.2 MOC による EPDF 計算フロー（再掲）

5.4 固定源計算による検証計算

本節では、固定源計算による DF-MC 法の検証計算について述べる。固定源計算では中性子の透過および反射のみを扱い、weight cancellation は行わない。従って、固定源計算では、EPDF に基づく中性子透過および反射によって全中性子束の不連続性を扱うという、DF-MC 法の基本原理を検証する。

計算体系は、図 5.4.1 に示すエネルギー 2 群 1 次元平板体系を用いる。本体系は 12.0 cm の UO₂ 燃料集合体（左側）および RCC-UO₂ 燃料集合体（右側）が隣接している。各燃料集合体は 1.5 cm の単位セルが 8 つ並んでおり、各セルは 6.0 cm の燃料領域とその両隣 0.45 cm の減速材（軽水）領域から成る。減速材セルの場合はセル全体が減速材から成り、RCC セルは中心部が RCC から成る。体系両端の境界条件は完全反射境界条件である。

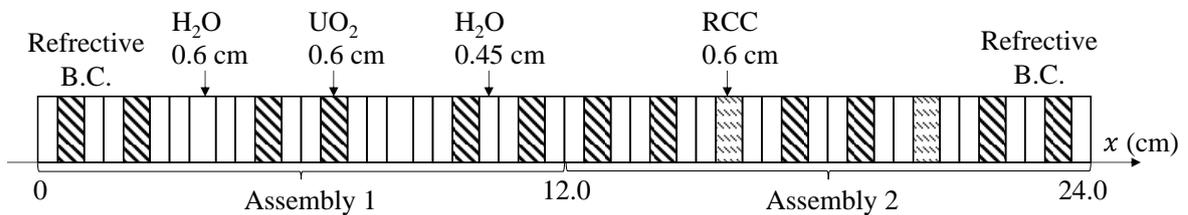


図 5.4.1 1次元平板体系

各物質の核定数は表 5.4.1 のとおりである。巨視的断面積は C5G7 ベンチマーク問題で定義される 7 群断面積を 2 群縮約し固定源計算用に整理して求めている[30]。本体系は等方散乱を仮定しており、固定中性子源 q_f は UO₂ の 1 群でのみ $1.0 \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ として与えた。

表 5.4.1 1次元平板体系における各物質の核定数

Mat	Energy	$\Sigma_{s,1\rightarrow}$ (cm^{-1})	$\Sigma_{s,2\rightarrow}$ (cm^{-1})	Σ_a (cm^{-1})	Σ_t (cm^{-1})	q_f ($\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
UO ₂	1	3.32E-01	4.59E-05	1.17E-02	3.44E-01	1.00E+00
	2	4.04E-04	2.841E-01	3.63E-02	3.19E-01	0.00E+00
H ₂ O	1	3.72E-01	2.54E-05	3.42E-04	4.13E-01	0.00E+00
	2	4.06E-02	1.47E+00	1.86E-02	1.50E+00	0.00E+00
RCC	1	5.00E-01	3.57E-05	4.06E-02	5.40E-01	0.00E+00
	2	5.76E-05	3.81E-01	9.52E-01	1.33E+00	0.00E+00

本検討では以下の 5 つの計算ケースについてピンセル平均全中性子束を比較する。

ケース1. 非均質体系における MOC 計算（参照解）

ケース2. 非均質体系における MC 計算

ケース3. ピンセル均質体系における MC 計算

ケース4. ピンセル均質体系における DF-MC 計算（提案手法）

ケース5. ピンセル均質体系における DF-MOC 計算

図 5.4.1 に示す非均質体系計算とピンセル均質体系計算から EPDF を求め、均質体系で DF-MC 計算を行う。DF-MOC 計算は EPDF を用いた MOC 計算を指す。本検討では、均質化断面積は非均質 MOC 計算から求める。非均質および均質体系で両側とも完全反射境界条件を用いるため、EPDF の離散化誤差が十分小さければ参照解と DF-MC 計算の解は統計的不確かさの範囲内で一致するはずである。

計算条件を以下に示す。まず MOC の計算条件を表 5.4.2 および表 5.4.3 に示す。表 5.4.3 の計算条件は EPDF を求める計算と、DF-MC 計算と比較するための均質 DF-MOC 計算で共通である。EPDF 計算では非均質体系と均質体系でそれぞれ MOC 計算を行う必要がある。非均質体系計算および均質体系計算では、EPDF の空間および角度離散化誤差がなるべく低減されるように詳細な計算条件を用いる。またいずれの計算でも実効的な拡散係数 $Deff$ [8] を用いた CMFD 加速法を適用した。EPDF はピンセル単位で求め、収束条件は 1.0×10^{-7} とした。

表 5.4.2 非均質体系における MOC 計算の計算条件

空間メッシュサイズ	0.05 cm（セル内 30 分割）
角度分割数	64 (Gauss-Legendre 分点)
全中性子束の収束条件	1.0E-12
加速法	CMFD 加速法 ($Deff$ [8])
加速法における粗メッシュ幅 (粗メッシュ内詳細メッシュ数)	1.5 cm (30)
加速法における全中性子束の収束条件	1.0E-13

表 5.4.3 均質体系における MOC の計算条件

空間メッシュサイズ	0.015 cm（セル内 100 分割）
角度分割数	64 (Gauss-Legendre 分点)
全中性子束の収束条件	1.0E-12
加速法	CMFD 加速法 ($Deff$)
加速法における粗メッシュ幅 (粗メッシュ内詳細メッシュ数)	1.5 cm (100)
加速法における全中性子束の収束条件	1.0E-13
EPDF メッシュサイズ	1.5 cm（ピンセル単位）
EPDF 収束条件	1.0E-07

次に、均質体系における DF-MC 計算、非均質体系および均質体系における MC 計算 (EPDF なし) の計算条件を表 5.4.4 に示す。DF-MC 計算では、いずれの体系および計算手法でも総ヒストリー数は 5.0×10^7 とし、衝突エスティメータによりピンセル単位全中性子束分布を求めた。DF-MC 計算では上述の MOC 計算により求めた EPDF を用いる。

なお本節の計算はすべて自作 C++ 計算プログラムで実行している。また倍精度実数を用いている。

表 5.4.4 DF-MC および MC 計算の計算条件

総ヒストリー数	5.0E+07
タリーする物理量	全中性子束 (衝突エスティメータ)

以下に計算結果を示す。各計算ケースの全中性子束空間分布をエネルギー群ごとに図 5.4.2 および図 5.4.3 に示す。本図では、均質 DF-MOC 計算の全中性子束空間分布は非均質 MC 計算と概ね同様のため記載を省略した。なお、本検討では DF-MC 計算は収束し、中性子透過および反射によるウェイトの発散は確認されなかった。

図 5.4.2 および図 5.4.3 より、均質計算は非均質計算の全中性子束分布の大まかな概形を示している。本検討ではピンセル平均の全中性子束分布を比較するため、詳細な全中性子束分布を再現する必要はない。また、例として図 5.4.4 に、エネルギー 2 群の $1.5 \leq x \leq 4.5$ に位置する 2 つのピンセル内の全中性子束分布を拡大して示す。ここで $x = 3.0$ がピンセル境界である。本図に示すとおり、均質 DF-MC 計算ではピンセル間の全中性子束の不連続性を扱えていることが分かる。

図 5.4.5 にエネルギー群毎 EPDF 空間分布を示す。図 5.4.2 および図 5.4.3 に示す全中性子束分布と併せて考えると、ピンセル均質領域内全中性子束分布形状が非均質であるほど EPDF の値は 1.0 から乖離することが分かる。これは均質化領域内の全中性子束分布形状が複雑で非均質であるほど空間均質化誤差が大きくなり EPDF で扱う中性子束不連続性が大きいためである。また、本体系における透過係数の最大値は 1.007 (対応する反射係数は -0.007) であり、ほとんど 1.0 に近い値となった。すなわち、中性子はほとんど透過され反射されず、中性子束の不連続性は比較的小さい。

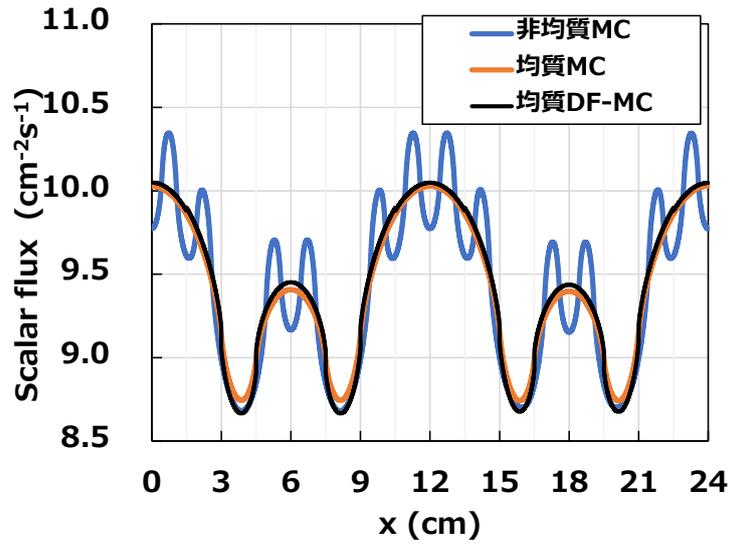


図 5.4.2 各計算ケースにおけるエネルギー1群全中性子束空間分布

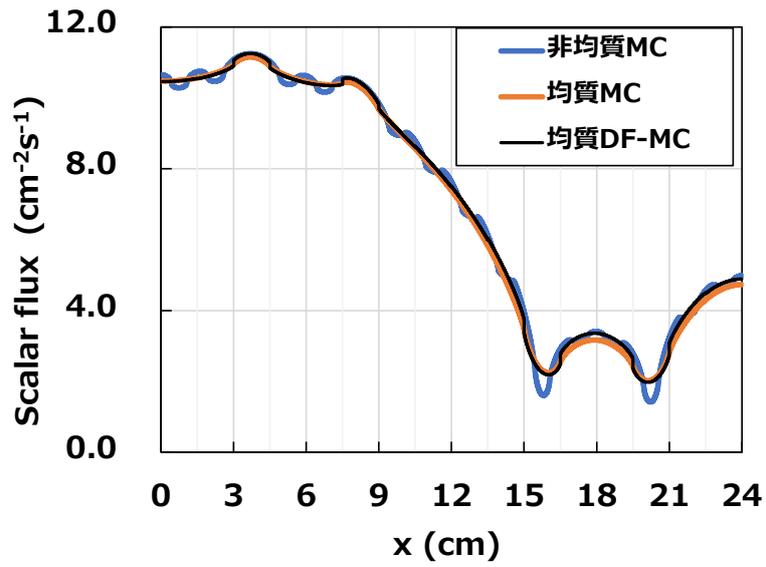


図 5.4.3 各計算ケースにおけるエネルギー2群全中性子束空間分布

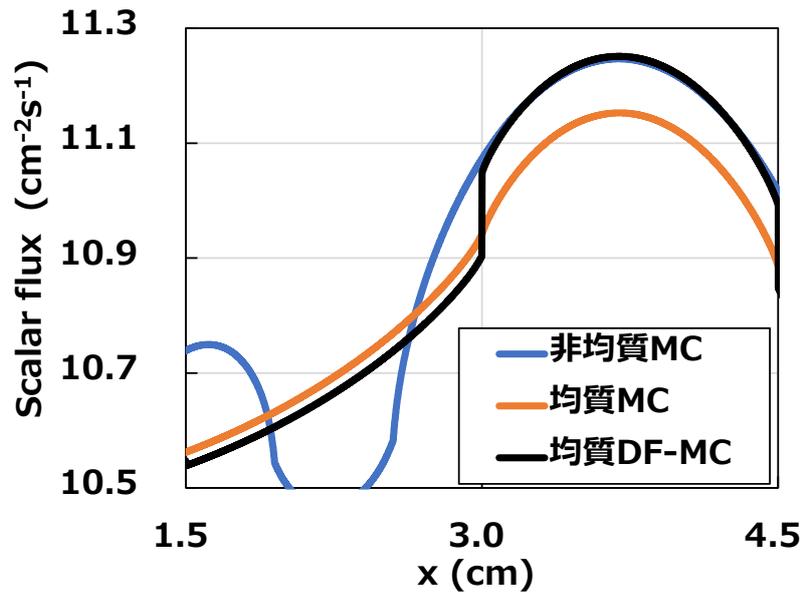


図 5.4.4 1.5 ≤ x ≤ 4.5におけるエネルギー2群全中性子束空間分布

1群	1.011	1.009	1.023	1.008	1.008	1.023	1.009	1.011	1.011	1.009	1.021	1.009	1.009	1.021	1.009	1.011
2群	0.984	0.985	0.972	0.985	0.984	0.971	0.984	0.981	0.979	0.971	1.078	0.976	0.976	1.083	0.974	0.981

図 5.4.5 一次元平板体系における EPDF 空間分布 (x 座標順に整列)

次に、参照解（非均質 MOC 計算）と各計算ケース間の全中性子束相対差異を計算および比較する。相対差異の平均値および絶対値の最大値を表 5.4.5 に、各計算ケースの相対差異空間分布を図 5.4.6–図 5.4.8 に示す。表中には統計的不確かさとして不偏標準偏差を示す。

まず、非均質 MC 計算および均質 DF-MOC 計算の相対差異は非常に小さい値となった。本結果より、本検討で用いた自作 MC 計算コードは正しく実装できていること、また MOC により EPDF を正しく計算できていることがそれぞれ分かる。

均質 MC 計算と均質 DF-MC 計算を比較し、DF-MC 法の検証を行う。均質 MC 計算では空間均質化誤差の影響で相対差異の平均値が約 1%および最大値が約 6%となった。対して、均質 DF-MC 計算では相対差異は平均値および最大値ともに非常に小さい値であり、非均質 MC 計算と概ね同様となった。これは均質モンテカルロ計算において EPDF に基づき中性子を透過もしくは反射させることで、非均質体系計算の均質化領域平均の解を再現できていることが分かる。すなわち、固定源計算により DF-MC 法における中性子透過および反射という基本原理を検証することができた。次項では、固有値計算による DF-MC 計算を実行し、CP 法による weight cancellation を含めた DF-MC 法の検証および炉心体系への適用性確認を実施する。

表 5.4.5 参照解とのピンセル平均全中性子束との相対差異 (%)

計算ケース	平均値	絶対値の最大値
非均質 MC 計算	0.04 ± 0.02	0.1 ± 0.1
均質 MC 計算	1.38 ± 0.02	6.2 ± 0.1
均質 DF-MC 計算	0.02 ± 0.02	0.1 ± 0.1
均質 DF-MOC 計算	0.00	0.00

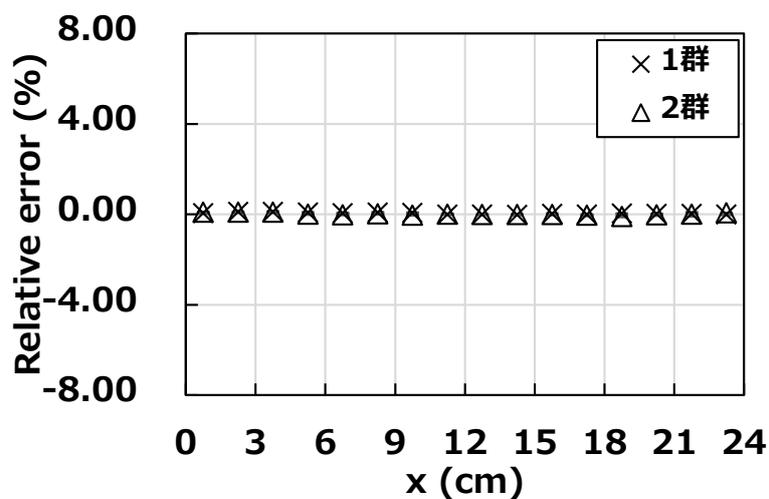


図 5.4.6 非均質 MC 計算のピンセル平均全中性子束相対差異空間分布

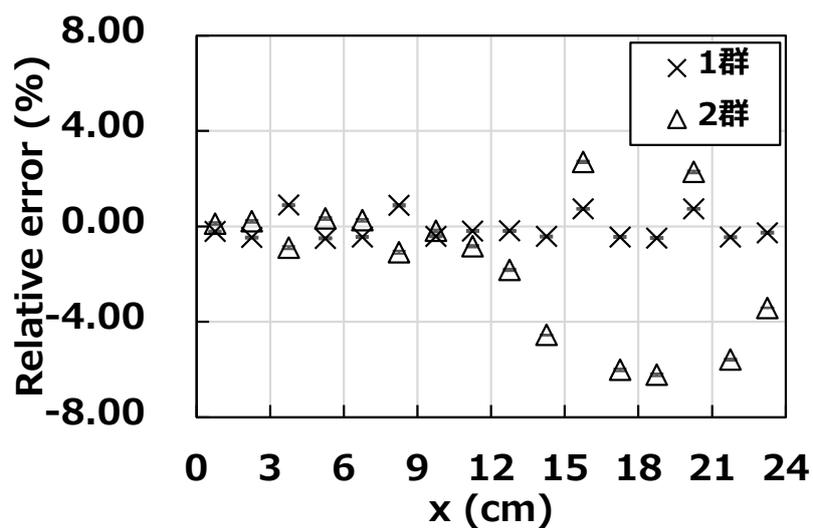


図 5.4.7 均質 MC 計算間のピンセル平均全中性子束相対差異空間分布

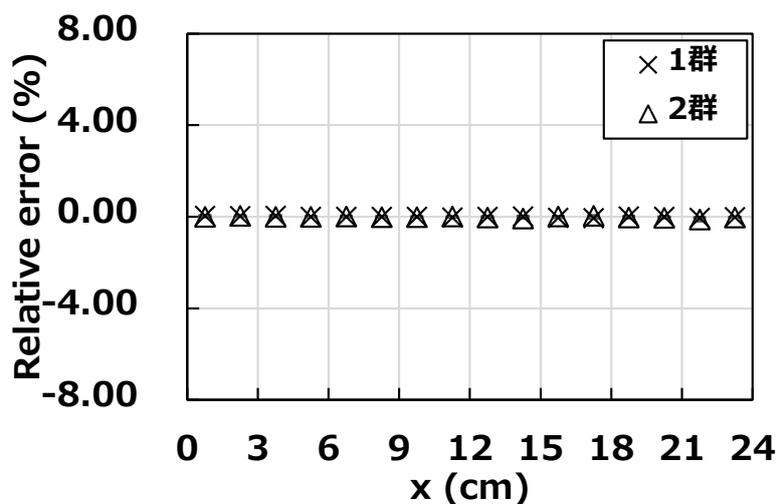


図 5.4.8 均質 DF-MC 計算間のピンセル平均全中性子束相対差異空間分布

5.5 固有値計算による検証計算

前節では、固定源計算により DF-MC 法における中性子透過および反射の原理を検証した。次に本節では固有値計算による検証計算を実施し、CP 法を含めた DF-MC 法の妥当性を検証する。また本節では現実的な集合体計算および炉心計算への DF-MC 法の適用を想定し、二次元集合体体系および炉心体系で検証計算を実施する。これにより、DF-MC 法の実機炉心模擬体系への適用性および有用性を評価する。

5.5.1 二次元単一集合体体系

本項では二次元単一集合体体系における検証計算について示す。以下に、本検討で用いた計算体系を示す。計算体系は小型 PWR 模擬炉心原子炉 KAIST-2A ベンチマーク問題[32]で定義される 5 種類の単一集合体体系(UOX1, UOX2BA, UOX2CR, MOX1, MOX1BA)を用いる。UOX1 は UO_2 燃料集合体、UOX2BA は Gd 入り UO_2 燃料集合体、UOX2CR は制御棒挿入 UO_2 燃料集合体、MOX1 は MOX 燃料集合体、MOX1BA は Gd 入り MOX 燃料集合体である。図 5.5.1 に燃料集合体の幾何形状を、図 5.5.2 に各セルの幾何形状をそれぞれ示す。

各物質の核定数を表 5.5.1 にそれぞれ示す。エネルギーは 7 群である。ここで $\Sigma_{s \rightarrow g'}$ はあるエネルギー群から g' 群への散乱断面積を表している。本表は本検討で用いた計算コードの断面積入力形式である KRAM 形式に則って記述している。

本検討では輸送補正を適用しない巨視的断面積の値を用いる。これは輸送補正を行うと減速材および反射材の 1 群自群散乱断面積が負の値となるためである。本検討では負の散乱断面積が DF-MC 計算に与える影響を排除するため、輸送補正を適用しない。輸送補正を適用しない場合の散乱断面積、吸収断面積および全断面積は輸送断面積および散乱断面積の 1 次モーメント(1 次の非等方成分)から拡張輸送近似(out-scatter 近似)を用いて計算した[32]。

- Lattice: 17 X 17	- Assembly pitch: 21.42 cm
- Number of fuel pins: 264	- Pin pitch: 1.26 cm
- Number of control rod guide tubes: 24	- Active fuel length: 365.76 cm
- Number of instrumentation guide tubes: 1	

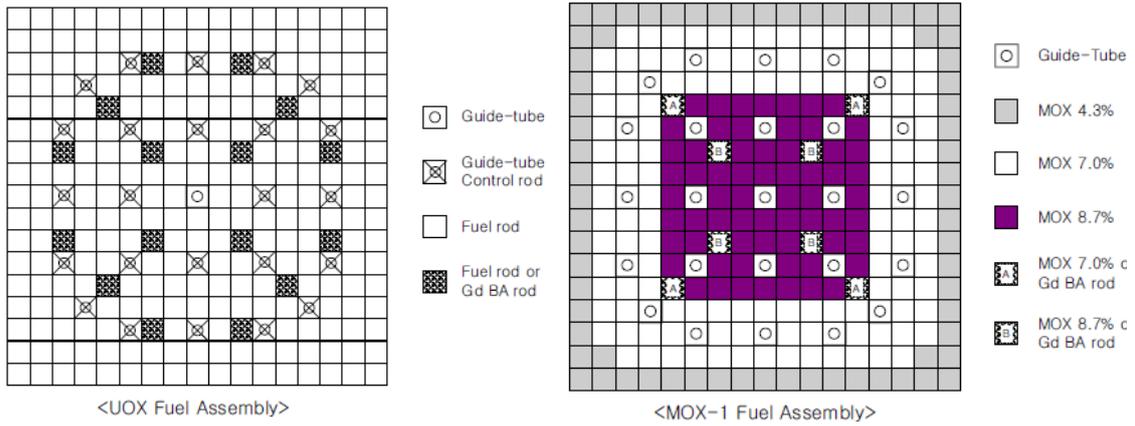


図 5.5.1 燃料集合体の幾何形状および燃料セル配置 [32]

Cell Type	Region	Radius
Fuel (UOX, MOX, and Gd Rod)	$r_0 - r_1$: Fuel	$r_1 = 0.4095$ cm
	$r_1 - r_2$: Gap	$r_2 = 0.4180$ cm
	$r_2 - r_3$: Clad	$r_3 = 0.4750$ cm
Instrumentation guide tube	$r_0 - r_1$: Water	$r_1 = 0.5715$ cm
	$r_1 - r_2$: Clad	$r_2 = 0.6120$ cm
Control rod	$r_0 - r_1$: Control material	$r_1 = 0.3823$ cm
	$r_1 - r_2$: Clad	$r_2 = 0.4839$ cm
	$r_2 - r_3$: Water	$r_3 = 0.5715$ cm
	$r_3 - r_4$: Clad (guide tube)	$r_4 = 0.6120$ cm

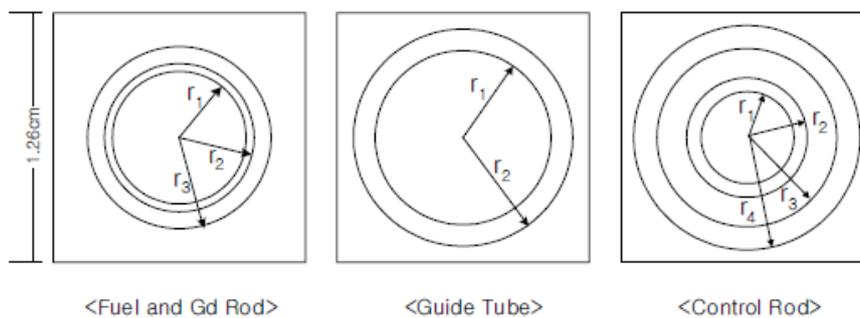


図 5.5.2 燃料棒、ガイドチューブおよび制御棒の幾何形状 [32]

表 5.5.1 KAIST-2A ベンチマーク問題における各物質の核定数
(輸送補正なし、巨視的断面積の単位は[1/cm]、核分裂スペクトルの単位は無次元)

(a) MOX 4.3 w/o 燃料

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{s, \rightarrow 1}$	1.83850E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 2}$	5.34080E-02	4.10670E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.37430E-03	4.99530E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.19490E-03	3.95790E-01	7.70710E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.29950E-02	3.65190E-01	3.98140E-02	2.47970E-03
$\Sigma_{s, \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.38100E-02	3.24810E-01	7.61330E-02
$\Sigma_{s, \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.58430E-04	3.52000E-02	3.35230E-01
$\nu \Sigma_f$	3.73810E-02	4.37420E-03	5.15030E-02	5.72120E-02	1.48850E+00	1.06850E+00	1.55030E+00
Σ_a	1.42070E-02	6.22580E-03	8.58730E-02	2.44810E-01	9.03760E-01	6.15560E-01	8.67830E-01
Σ_t	2.51465E-01	4.19270E-01	5.87598E-01	6.53595E-01	1.30103E+00	1.01538E+00	1.28167E+00
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(b) MOX 7.0 w/o 燃料

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{s, \rightarrow 1}$	1.83540E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 2}$	5.28730E-02	4.09660E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.36860E-03	5.02310E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.05070E-03	4.04420E-01	8.76850E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s, \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.17880E-02	3.66670E-01	4.01200E-02	2.51200E-03
$\Sigma_{s, \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.08630E-02	3.23100E-01	7.69120E-02
$\Sigma_{s, \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.90800E-04	3.47520E-02	3.32470E-01
$\nu \Sigma_f$	4.01480E-02	6.77570E-03	7.69170E-02	8.73600E-02	2.19070E+00	1.71750E+00	2.46240E+00
Σ_a	1.49980E-02	7.06780E-03	1.00160E-01	3.22920E-01	1.32860E+00	9.70820E-01	1.34540E+00
Σ_t	2.51411E-01	4.19096E-01	6.04521E-01	7.39128E-01	1.72539E+00	1.36879E+00	1.75729E+00
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(c) MOX 8.7 w/o 燃料

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.83350E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	5.25370E-02	4.09020E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.36550E-03	5.03930E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.96940E-03	4.09420E-01	9.19950E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.11640E-02	3.67200E-01	4.02300E-02	2.52680E-03
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.96930E-02	3.22030E-01	7.72430E-02
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.64180E-04	3.45410E-02	3.30960E-01
$\nu \Sigma_f$	4.18910E-02	8.28830E-03	9.16560E-02	1.05630E-01	2.60700E+00	2.12620E+00	3.03390E+00
Σ_a	1.54960E-02	7.59840E-03	1.08330E-01	3.65320E-01	1.58160E+00	1.19450E+00	1.64470E+00
Σ_t	2.51383E-01	4.18984E-01	6.14229E-01	7.85904E-01	1.97816E+00	1.59130E+00	2.05543E+00
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(d) UO₂ 2.0 w/o 燃料

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.83880E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	5.44760E-02	4.11500E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.36670E-03	4.95170E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.38670E-03	3.76830E-01	3.92050E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.56420E-02	3.63330E-01	3.97670E-02	2.44270E-03
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	3.29690E-02	3.29610E-01	7.54980E-02
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.63850E-04	3.57300E-02	3.41330E-01
$\nu \Sigma_f$	3.36220E-02	2.05100E-03	2.36030E-02	4.19820E-02	1.84880E-01	3.09670E-01	6.24330E-01
Σ_a	1.32090E-02	5.53310E-03	7.04290E-02	3.33340E-02	1.10700E-01	1.80830E-01	3.58390E-01
Σ_t	2.51565E-01	4.19400E-01	5.67986E-01	4.25806E-01	5.11683E-01	5.85937E-01	7.77661E-01
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(e) Gd + UO₂ 0.711 w/o 燃料 for UOX2BA 燃料集合体

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.82000E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	5.43270E-02	4.05460E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.43040E-03	5.01850E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.38720E-03	3.63000E-01	7.73910E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.55450E-02	3.84530E-01	6.60340E-02	2.73430E-03
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.32990E-02	4.81110E-01	1.41760E-01
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.60680E-04	3.00670E-02	7.28630E-01
$\nu \Sigma_f$	2.90890E-02	8.43670E-04	7.39740E-03	1.31970E-02	4.88330E-02	8.91800E-02	1.81210E-01
Σ_a	1.16570E-02	5.67080E-03	1.15780E-01	2.28880E-01	2.01860E+00	2.70070E+01	1.20660E+02
Σ_t	2.47984E-01	4.13561E-01	6.20017E-01	6.07425E-01	2.42443E+00	2.75842E+01	1.21533E+02
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(f) Gd + UO₂ 0.711 w/o 燃料 for MOX1BA 燃料集合体

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.82240E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	5.40090E-02	4.05320E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.42040E-03	5.03460E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.21250E-03	3.65000E-01	9.41470E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.33430E-02	3.82680E-01	6.70000E-02	2.72170E-03
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.02120E-03	4.79200E-01	1.41050E-01
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.72580E-04	2.92630E-02	7.29500E-01
$\nu \Sigma_f$	2.92390E-02	8.44210E-04	7.25890E-03	1.21420E-02	4.51730E-02	8.88730E-02	1.81940E-01
Σ_a	1.16970E-02	5.66150E-03	1.13680E-01	2.39360E-01	1.59140E+00	2.66740E+01	1.21070E+02
Σ_t	2.47946E-01	4.13402E-01	6.19353E-01	6.17703E-01	1.99269E+00	2.72495E+01	1.21943E+02
χ	5.92520E-01	4.07140E-01	3.31930E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

(g) 制御棒 (B₄C)

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.58020E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	3.43310E-02	3.51780E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	7.51820E-03	4.37670E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.44300E-03	4.13830E-01	5.15380E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.73440E-02	3.88210E-01	5.96880E-02	4.06000E-03
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.92830E-02	3.23990E-01	1.28230E-01
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.41330E-03	6.73290E-02	3.41550E-01
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	6.60120E-03	2.48670E-02	7.24700E-01	7.51930E+00	1.79930E+01	3.14090E+01	5.40620E+01
Σ_t	1.98952E-01	3.84165E-01	1.16481E+00	7.96047E+00	1.84371E+01	3.18600E+01	5.45358E+01
χ	0.00000E+00						

(h) 被覆材

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	1.54670E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	3.25480E-02	3.56790E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00	7.72850E-04	3.26660E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	5.94050E-04	2.65510E-01	2.12680E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.31350E-03	2.56390E-01	1.48500E-02	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.39080E-02	2.44230E-01	2.98990E-02
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.65340E-02	2.59540E-01
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	2.64790E-04	7.31060E-04	5.03490E-03	1.18840E-03	2.79680E-03	4.70120E-03	8.57620E-03
Σ_t	1.87483E-01	3.58294E-01	3.32289E-01	2.72012E-01	2.75222E-01	2.80315E-01	2.98015E-01
χ	0.00000E+00						

(i) ギャップ内ガス

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00						
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00						
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	6.10660E-09	2.61170E-08	1.02680E-06	7.97490E-06	1.87280E-05	3.15200E-05	5.78030E-05
Σ_t	6.10660E-09	2.61170E-08	1.02680E-06	7.97490E-06	1.87280E-05	3.15200E-05	5.78030E-05
χ	0.00000E+00						

(j) 冷却材

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{S_r \rightarrow 1}$	8.25050E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 2}$	8.29800E-02	4.66790E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 3}$	5.22680E-04	9.24870E-02	9.82220E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	8.62420E-02	7.13030E-01	5.42610E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{S_r \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.23320E-02	3.48490E-01	9.33720E-01	2.22910E-01	9.83490E-02
$\Sigma_{S_r \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.23170E-03	4.92250E-02	3.52360E-01	1.18920E+00	6.48580E-01
$\Sigma_{S_r \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.37790E-03	2.20110E-02	1.15130E-01	4.21930E-01	2.00640E+00
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	4.69880E-04	1.50150E-05	7.06440E-04	5.42300E-03	1.27550E-02	2.14560E-02	3.95990E-02
Σ_t	1.66478E-01	5.59292E-01	1.08511E+00	1.13818E+00	1.41939E+00	1.85550E+00	2.79293E+00
χ	0.00000E+00						

(k) バッフル板

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{s \rightarrow 1}$	2.28960E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 2}$	5.14210E-02	3.98020E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 3}$	0.00000E+00	2.97260E-03	9.80560E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	3.18820E-03	8.38820E-01	6.03270E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.23830E-02	7.96680E-01	5.49400E-02	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.05620E-02	7.48690E-01	1.18120E-01
$\Sigma_{s \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.32510E-02	7.62750E-01
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	1.64220E-03	6.75520E-04	7.62520E-03	3.40060E-02	8.18110E-02	1.34990E-01	2.37820E-01
Σ_t	2.82030E-01	4.01670E-01	9.91370E-01	8.95210E-01	9.45090E-01	1.00190E+00	1.11870E+00
χ	0.00000E+00						

(l) 反射材

	1 群	2 群	3 群	4 群	5 群	6 群	7 群
$\Sigma_{s \rightarrow 1}$	8.27160E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 2}$	8.19630E-02	4.71430E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 3}$	5.16420E-04	9.97300E-02	9.55520E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.10140E-01	7.07140E-01	2.38610E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
$\Sigma_{s \rightarrow 5}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.57510E-02	3.54090E-01	8.92030E-01	2.16730E-01	9.82370E-02
$\Sigma_{s \rightarrow 6}$	0.00000E+00	0.00000E+00	2.86830E-03	4.99580E-02	4.28450E-01	1.19390E+00	6.45450E-01
$\Sigma_{s \rightarrow 7}$	0.00000E+00	0.00000E+00	1.78620E-03	2.23260E-02	1.35810E-01	4.32690E-01	2.02330E+00
$\nu \Sigma_f$	0.00000E+00						
Σ_a	4.99290E-04	1.57050E-05	8.29690E-04	5.46490E-03	1.38210E-02	2.16440E-02	3.98810E-02
Σ_t	1.65695E-01	5.71176E-01	1.08690E+00	1.13898E+00	1.47250E+00	1.86496E+00	2.80687E+00
χ	0.00000E+00						

本検討では以下の 3 つの計算ケースについてピンセル平均全中性子束および実効増倍率を比較する。

ケース1. 非均質体系における MOC 計算 (参照解)

ケース2. ピンセル均質体系における MOC 計算

ケース3. ピンセル均質体系における DF-MC 計算 (提案手法)

非均質単一集合体計算体系計算とピンセル均質単一集合体体系計算から EPDF を求め、均質体系で DF-MC 計算を行う。本検討では、均質化断面積は非均質単一集合体計算から求

める。そのため EPDF の離散化誤差が十分小さければ、参照解と DF-MC 計算の解は統計的不確かさの範囲内で一致するはずである。

計算条件を以下に示す。非均質体系における MOC 計算の計算条件を表 5.5.2 に、均質体系における MOC 計算の計算条件を表 5.5.3 にそれぞれまとめる。本計算条件は EPDF 計算および参照解計算のために用いる。MOC 計算は計算コード GENESIS[29][33][34]を用いて実行した。非均質体系計算および均質体系 MOC 計算では、EPDF の空間および角度離散化誤差がなるべく低減されるように詳細な計算条件を用いる。EPDF はピンセル単位で求め、収束条件は 1.0×10^{-4} とした。

表 5.5.2 非均質単一集合体 MOC 計算の計算条件

ピンセルあたりのバックグラウンドメッシュ	径方向：等 6 分割 方位角：等 16 分割
レイトレース幅	0.01 cm
極角分割数	6 (Tabuchi-Yamamoto 分点[35])
方位角分割数	96
境界条件	完全反射境界条件
収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-6}$, $\phi: 1 \times 10^{-6}$
加速法	GCMR 加速
加速法の収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-7}$, $\phi: 1 \times 10^{-7}$

表 5.5.3 ピンセル均質単一集合体体系における MOC 計算の計算条件

ピンセルあたりのバックグラウンドメッシュ	x, y 方向にそれぞれ 10 分割 (x, y 方向それぞれ 0.126 cm)
レイトレース幅	0.01 cm
極角分割数	6 (Tabuchi-Yamamoto 分点[35])
方位角分割数	96
境界条件	完全反射境界条件
収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-6}$, $\phi: 1 \times 10^{-6}$
加速法	GCMR 加速
加速法の収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-7}$, $\phi: 1 \times 10^{-7}$
EPDF の収束条件	1×10^{-4}

次に、均質体系における DF-MC 計算の計算条件を表 5.5.4 に示す。総バッチ数は 1100、捨てバッチ数は 100、1 バッチ当たりのヒストリー数は 10^6 とする。また、 w_{kill} はロシアンル

ーレットを行うウェイト閾値、 w_{sur} は中性子が生存後のウェイトであり、これらの値も併せて示す。また衝突エスティメータによりピンセル平均全中性子束分布を求める。また、weight cancellation で用いる CP 領域はピンセル単位で分割し設定した。なお DF-MC 計算では上述の MOC 計算により求めた EPDF を用いる。DF-MC 計算はすべて C++計算プログラムで倍精度実数を用いて実行している。

表 5.5.4 DF-MC および MC 計算の計算条件

総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
ヒストリー数	10^6
ロシアンルーレットのウェイト	$w_{kill} = 0.01,$ $w_{sur} = 0.5$
k_{eff} および ϕ のエスティメータ	衝突エスティメータ
CP 領域分割	ピンセル単位

以下に計算結果を示す。まず、EPDF は、各燃料集合体に対して、完全反射境界条件を用いた単一集合体体系において計算した。各燃料集合体の EPDF の収束性を図 5.5.3 に示す。縦軸は EPDF の残差の最大値、横軸は EPDF を求めために実行した MOC 計算の反復回数である。本結果より、空間均質化を行う場合でもいずれの燃料集合体で EPDF は安定して収束することが分かる。

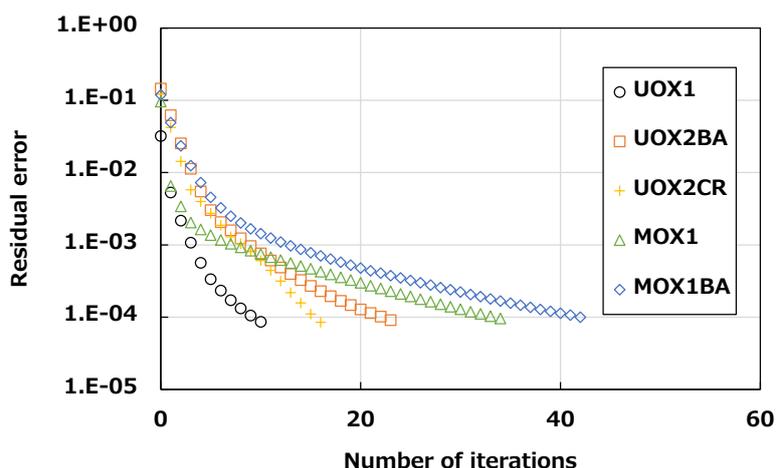


図 5.5.3 各燃料集合体における EPDF の収束性

また、表 5.5.5 に各燃料集合体の EPDF から計算される中性子透過係数の最大値および対応する反射係数の値を示す。本表より、いずれの燃料集合体でも最大透過係数値は 1.1 程度

であり、ほとんどの中性子が領域境界で透過する。すなわち、反射に起因する負のウエイトの中性子数は少なく、すべての中性子数に対して weight cancellation で打ち消す中性子数は少ない。

表 5.5.5 各燃料集合体における透過係数の最大値

燃料集合体	最大透過係数値 (最小反射係数値)
UOX1	1.027 (-0.027)
UOX2BA	1.139 (-0.139)
UOX2CR	1.097 (-0.097)
MOX1	1.071 (-0.071)
MOX1BA	1.095 (-0.095)

各燃料集合体における、各計算ケースの実効増倍率および参照解との相対差異を表 5.5.6 に、全中性子束相対差異を表 5.5.7 にそれぞれ示す。なお DF-MC 計算における統計的不確かさは、表中の値よりも十分小さいため記載は省略した。

表 5.5.6 および表 5.5.7 より、均質 MOC 計算に比べ均質 DF-MC 計算では実効増倍率および全中性子束の相対差異が低減されていることが確認できる。本結果より、ヒストリー数が十分大きければ weight cancellation に起因する誤差は無視できるほど小さく、二次元単一集合体体系における固有値計算においても、DF-MC 法により空間均質化誤差を低減できることが分かる。

ただし、特に UOX2CR では DF-MC 法でも 0.1%程度の実効増倍率の相対差異が生じている。これは、参照解および EPDF の MOC 計算における空間離散化誤差の影響である。非均質 UOX2BA 体系で空間領域サイズを 1/2 倍にして EPDF を求めると、DF-MC 計算における実効増倍率相対差異が 0.1%程度低減した。すなわち、UOX2CR における実効増倍率相対差異は EPDF の空間離散化誤差の影響であり、計算条件を詳細にすることで低減できる。

表 5.5.6 各燃料集合体における実効増倍率

燃料集合体	非均質 MOC	均質 MOC	均質 DF-MC
UOX1	1.100717	1.1012418 (0.048 %)	1.100678 (-0.004 %)
UOX2BA	0.879311	0.8638491 (-1.76 %)	0.879998 (0.078 %)
UOX2CR	0.683501	0.6618692 (-3.16 %)	0.684232 (0.107 %)
MOX1	1.175997	1.1760938 (-0.0082 %)	1.175980 (-0.002 %)
MOX1BA	1.136369	1.1347601 (-0.141 %)	1.136391 (0.002 %)

表 5.5.7 各燃料集合体の全中性子束相対差異 (%)

燃料集合体	均質 MOC		均質 DF-MC	
	最大値	平均値	最大値	平均値
UOX1	3.28	0.2	0.28	0.04
UOX2BA	11.1	1.4	0.75	0.08
UOX2CR	9.03	2.6	0.54	0.09
MOX1	10.6	0.6	0.98	0.06
MOX1BA	11.6	0.8	1.05	0.07

以上より、二次元単一集合体体系における DF-MC 法による固有値計算の妥当性を確認できた。次項では、より現実的な計算体系として二次元炉心体系における検証計算を実施する。

5.5.2 二次元炉心体系 (KAIST-2A ベンチマーク問題)

本項では、二次元炉心体系として KAIST-2A ベンチマーク体系における DF-MC 法の検証計算について示す。KAIST-2A ベンチマーク問題で定義される 1/4 炉心体系は図 5.5.4 のとおりである。燃料集合体 5×5 相当のサイズであり、外周部にはバッフル板および反射材が配置されている。各燃料集合体は、5.5.1 項で示した燃料集合体と同様である。従って燃料集合体の幾何形状は図 5.5.1 および図 5.5.2 のとおりであり、本項への記載は省略する。また、各物質の核定数も表 5.5.1 のとおりである。

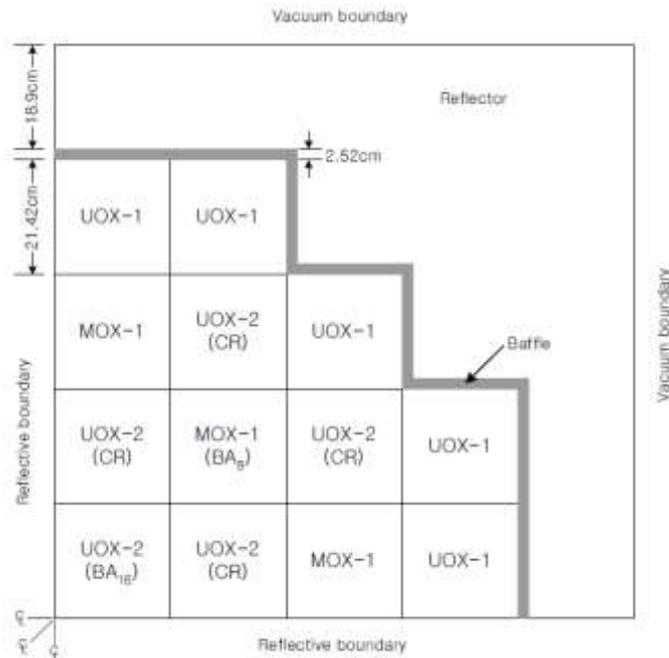


図 5.5.4 KAIST-2A ベンチマーク問題の 1/4 炉心体系図[32]

本検討では、各燃料集合体内の EPDF を単一集合体計算から求める。また空間均質化を、ピンセル単位と燃料集合体単位の 2 通りで行う。それぞれの均質化体系において DF-MC 計算を行い、実効増倍率および均質化領域平均全中性子束を他の計算ケースと比較する。このときピンセル均質化と集合体均質化で、比較する計算ケースの種類が異なる。

まず、ピンセル空間均質化を行う場合の検証計算について示す。ピンセル空間均質化を行う場合は、以下の 7 つの計算ケースを比較する。

- ケース1. 非均質炉心体系の MOC 計算（参照解）
- ケース2. ピンセル均質炉心体系の MOC 計算
- ケース3. ピンセル均質炉心体系の MC 計算
- ケース4. ピンセル均質炉心体系の DF-MOC 計算
- ケース5. ピンセル均質炉心体系の DF-MC 計算
- ケース6. ピンセル均質炉心体系の DF-MOC 計算（AEPDF あり）
- ケース7. ピンセル均質炉心体系の DF-MC 計算（AEPDF あり）

ここで AEPDF (Assembly EPDF) とは、燃料集合体毎の中性子束レベルの差異を補正する不連続因子である。MOC 計算における EPDF では、AEPDF を用いることでより角度離散化誤差を低減できることが示されている[29]。AEPDF ありの計算では、AEPDF を体系境界領域の EPDF に乗じることで集合体間の中性子束レベルの不連続性を近似的に扱う。本検討では AEPDF は式(5.5.1)から近似的に求める。

$$AEPDF_{sur} = \frac{\phi_{sur}^{fine}}{\phi_{sur}^{coarse}} \quad (5.5.1)$$

ここで ϕ_{sur}^{fine} は詳細計算で求める体系境界平均全中性子束（本検討では非均質計算）、 ϕ_{sur}^{coarse} は粗い計算条件の計算で求まる体系境界平均全中性子束（本検討では均質計算）である。本検討では非均質単一集合体計算で求まる体系境界平均全中性子束と、均質単一集合体計算で求まる体系境界平均全中性子束から AEPDF を求める。

式(5.5.1)から分かる通り、本来 AEPDF は集合体の各境界面でそれぞれ定義される。しかし本検討では、1/4 対称性を有する燃料集合体のみを扱うため、すべての体系境界で AEPDF の値が同一となる。

以下に計算条件を示す。非均質体系および均質体系における MOC 計算の計算条件を表 5.5.8 および表 5.5.9 に示す。本計算条件は、EPDF 計算および参照解計算で用いる。EPDF の収束条件は 1×10^{-4} とする。ここで EPDF は燃料集合体毎に、非均質および均質単一集合体計算により求めている。

表 5.5.8 非均質単一集合体 MOC 計算の計算条件

ピンセルあたりの バックグラウンドメッシュ	径方向：等 6 分割 方位角：等 16 分割
レイトレース幅	0.01 cm
極角分割数	6 (Tabuchi-Yamamoto 分点[35])
方位角分割数	96
境界条件	完全反射境界条件
収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-6}$, $\phi: 1 \times 10^{-6}$
加速法	GCMR 加速
加速法の収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-7}$, $\phi: 1 \times 10^{-7}$

表 5.5.9 ピンセル均質単一集合体体系における MOC 計算の計算条件

ピンセルあたりの バックグラウンドメッシュ	x, y 方向にそれぞれ 10 分割 (x, y 方向それぞれ 0.126 cm)
レイトレース幅	0.01 cm
極角分割数	6 (Tabuchi-Yamamoto 分点[35])
方位角分割数	96
境界条件	完全反射境界条件
収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-5}$, $\phi: 1 \times 10^{-5}$
加速法	GCMR 加速
加速法の収束条件	$k_{eff}: 5 \times 10^{-6}$, $\phi: 1 \times 10^{-6}$
EPDF の収束条件	1×10^{-4}

次に、均質体系における DF-MC および MC 計算の計算条件を表 5.5.10 に示す。総バッチ数は 1100、捨てバッチ数は 100、1 バッチあたりのヒストリー数は 10^6 とする。また、 w_{kill} はロシアンルーレットを行うウエイト閾値、 w_{sur} は中性子が生存後のウエイトをそれぞれ表す。また衝突エスティメータによりピンセル平均全中性子束分布を求める。また、weight cancellation で用いる CP 領域はピンセル単位で分割し設定した。これはピンセル均質体系および集合体均質体系で同一である。なお DF-MC 計算では上述の MOC 計算により求めた EPDF を用いる。DF-MC 計算はすべて自作 C++計算プログラムで倍精度実数を用いて実行している。

表 5.5.10 DF-MC および MC 計算の計算条件

総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
ヒストリー数	10^6
ロシアンルーレットのウエイト	$w_{kill} = 0.01,$ $w_{sur} = 0.5$
k_{eff} および ϕ のエスティメータ	衝突エスティメータ
CP 領域分割	ピンセル単位

以下に計算結果を示す。各計算ケースにおける実効増倍率の相対差異を表 5.5.11 に、全中性子束の相対差異を表 5.5.12 に示す。なお本検討における MC 計算の統計的不確かさは実効増倍率は 10^{-6} オーダー、全中性子束は 10^{-5} オーダーであり表中の値よりも十分小さい。

表 5.5.11 より、均質 MOC と MC、均質 DF-MOC と DF-MC、均質 DF-MOC (AEPDF) と MC (AEPDF) で、実効増倍率の相対差異は約 0.01 %オーダーである。本結果より、DF-MC 計算コードは正しく実装できており DF-MOC と同等の相対差異が得られることが分かる。

均質 DF-MOC および MC 計算は、均質 MOC および MC 計算に比べて、実効増倍率および全中性子束の相対差異が大きく低減されており、EPDF による空間均質化誤差の低減が確認できる。EPDF を用いた MOC および MC 計算でも、特に全中性子束に、相対差異が残っているのは単一集合体計算から EPDF を計算したためである。また本結果より、ヒストリー数が十分多ければ CP 法による weight cancellation に起因する誤差は無視できるほど小さいことが確認できる。以上より、DF-MC 法はピンセル均質炉心計算にも適用可能であることが分かる。

また、AEPDF を用いることで実効増倍率の相対差異は EPDF のみよりもさらに低減されている。一方で全中性子束相対差異については、平均値は僅かに増加したものの、最大値および最小値は小さくなった。本結果のみからは、AEPDF の有用性は確認されず、他の炉心体系での検証計算などが必要であると考えられる。

表 5.5.11 各計算ケースにおける実効増倍率の値と参照解との相対差異 (%)

計算ケース	k_{eff}	相対差異 (%)
非均質 MOC 計算 (参照解)	0.998984	-
均質 MOC 計算	0.997828	-0.116
均質 MC 計算	0.997758	-0.123
均質 DF-MOC 計算	0.999935	0.095
均質 DF-MC 計算	0.999938	0.096
均質 DF-MOC 計算 (AEPDF)	0.999382	0.040
均質 DF-MC 計算 (AEPDF)	0.999412	0.043

表 5.5.12 各計算ケースにおける全中性子束の相対差異 (%)

計算ケース	最大値	最小値	平均値
非均質 MOC 計算 (参照解)	-	-	-
均質 MOC 計算	7.80	-21.8	4.66
均質 MC 計算	7.81	-20.3	4.37
均質 DF-MOC 計算	2.96	-3.81	0.46
均質 DF-MC 計算	3.06	-3.77	0.39
均質 DF-MOC 計算 (AEPDF)	1.54	-1.74	0.50
均質 DF-MC 計算 (AEPDF)	2.46	-2.77	0.63

次に、ピンセル平均全中性子束相対差異の空間分布のカラーマップを図 5.5.5 に示す。ここで全エネルギー群平均のピンセル平均全中性子束相対差異を示している。ここで全エネルギー群平均とは領域平均全中性子束をエネルギー群について総和し、総エネルギー群数で割って得られる値 (エネルギーに関する平均値) を指す。なお、均質 MC 計算は均質 MOC 計算と概ね同様なカラーマップだったため記載は省略する。また炉心外周部の減速材領域もカラーマップからは省略する。

カラーマップより、EPDF を用いることで体系全体の相対差異が大きく低減できていることが分かる。また、均質 DF-MOC および DF-MC (図 5.5.5, (b), (c)) では集合体境界 (特に体系中心部の MOX 集合体境界) で相対差異が大きくなっているのが確認できる。一方で AEPDF を用いると集合体境界の差異は低減されるが、代わりに集合体内部 (特に MOX 燃料集合体に隣接する UOX1 集合体内部) の相対差異が増加している。これは AEPDF があくまで近似値であり真の補正值ではないためである。

また DF-MOC と DF-MC、DF-MOC (AEPDF) と DF-MC (AEPDF) をそれぞれ比較すると、MC 計算では相対差異分布が体系全体でばらつきがあり、MOC に比べて相対差異分布形状が異なる。これはモンテカルロ計算の統計的不確かさに起因している。

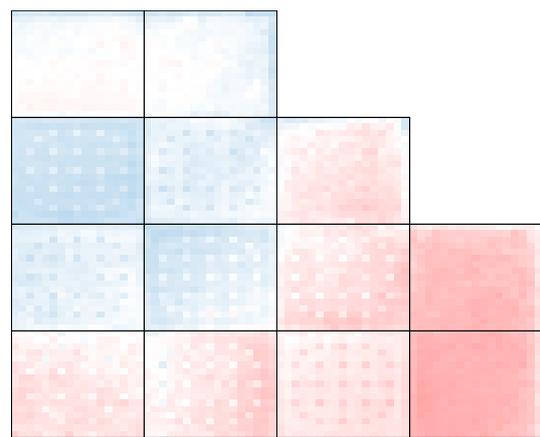
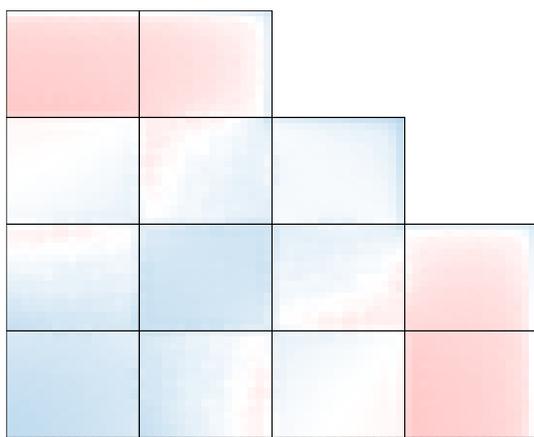
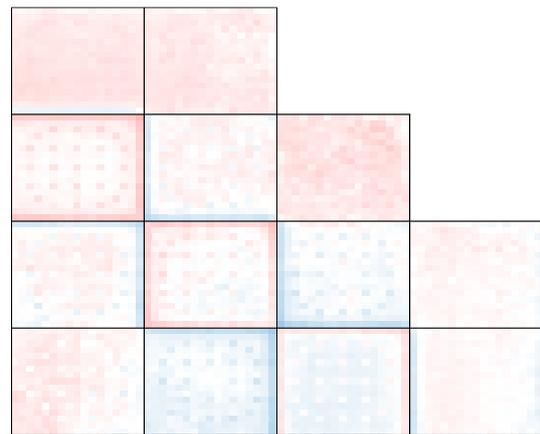
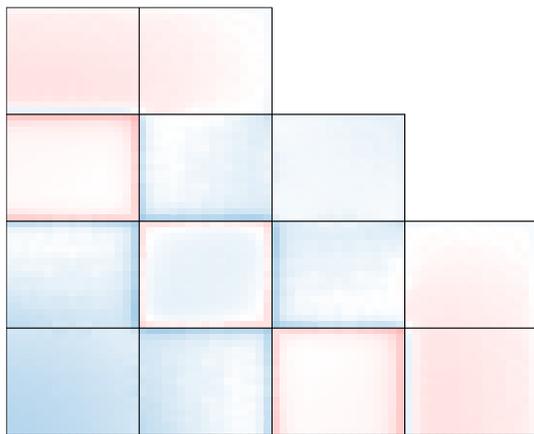
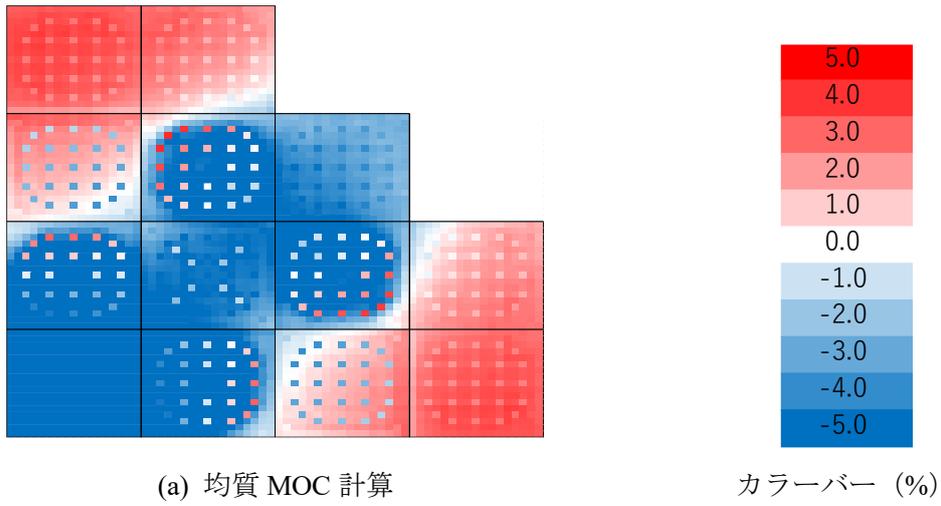


図 5.5.5 各計算ケースにおける全中性子束相対差異のカラーマップ

そして各計算ケースの計算時間を表 5.5.13 に示す。ここで最大 EPDF 計算時間とは 5 種類の燃料集合体の EPDF 計算のうち、最も長い計算時間を記載している。これは各燃料集合体の EPDF 計算を並行して実行することを想定したためである。本計算では MOX1BA 集合体の EPDF 計算時間が最大時間に当たる。カッコ内の合計 EPDF 計算時間は、5 種類の燃料集合体の EPDF 計算時間を合計した値である。また最右列における総計算時間は最大 EPDF 計算時間と輸送計算時間の和を、カッコ内は合計 EPDF 計算時間と輸送計算時間の和をそれぞれ表している。

表 5.5.13 より、EPDF 計算が計算全体のボトルネックになっていることが分かる。これは EPDF を求めるためには MOC 計算自体を反復させる必要があるためである。EPDF 反復計算の大半は transport sweep (特に角度中性子束の反復) が占めているため、角度中性子束に関する反復計算を並列化することで、計算を高速化できる可能性がある。また、本計算における GENESIS による EPDF 計算では、MOC 計算毎に ray tracing を行っている。従って、反復一回目だけ ray tracing を行ってその結果を出力し、反復二回目以降は ray tracing 情報を読み込めば、計算時間をより短縮できると考える。

輸送計算時間のみを考えると、本体系では非均質 MOC で十分短い計算時間であることが分かる。均質 DF-MOC と DF-MC を比較すると DF-MC 計算の方が計算時間はわずかに短くなったが、これは DF-MC 計算の計算時間が少ないのではなく DF-MOC 計算の計算時間が長いからである。DF-MOC 計算では ray trace 上で角度中性子束に関する反復計算を行う必要がある。そのため、空間領域数・角度分割数に応じて計算量および計算時間が爆発的に増大する。一方で DF-MC 計算では、空間領域数の増加に伴い透過係数および反射係数の計算や透過・反射によるウエイトの増加はあるものの、従来 MC 計算に比した計算量の増加量は少ない。

ただし MOC 計算コード (GENESIS) および自作 MC 計算コードのいずれも、計算時間の観点で最適化されていない。そのため本結果のみから、DF-MOC 計算と DF-MC 計算の計算時間を厳密に比較できない。また、EPDF を用いる場合も同様である。従って計算時間の比較を行うには、計算コードの最適化や他の計算体系での検証計算の実施が必要である。

表 5.5.13 ピンセル均質化における各計算ケースの計算時間

計算ケース	最大 EPDF 計算時間 (合計 EPDF 計算時間) [h]	輸送計算 時間 [h]	総計算時間 (合計 EPDF 計算時間+ 輸送計算時間) [h]
非均質 MOC 計算 (参照解)	-	3.1	3.1
均質 MOC 計算	-	1.6	1.6
均質 MC 計算	-	14.0	14.0
均質 DF-MOC 計算	70.8 (262.7)	16.0	86.8 (278.8)
均質 DF-MC 計算	70.8 (262.7)	14.0	86.6 (278.5)
均質 DF-MOC 計算 (AEPDF)	70.8 (262.7)	13.4	84.2 (276.1)
均質 DF-MC 計算 (AEPDF)	70.8 (262.7)	15.9	86.7 (278.6)

次に、集合体均質化を行う場合の検証計算について示す。計算体系および計算条件は上述と同様である。集合体均質化断面積および EPDF は単一集合体計算から求める。このとき、単一集合体計算から集合体単位の EPDF を求めることはできない。これは非均質および均質体系で完全反射境界条件を用い、空間均質化によって反応率が保存されるためである。そのため、本計算では AEPDF を EPDF として用いる。AEPDF は式(5.5.1)から求める。このとき、燃料集合体は 1/4 対称性を有するため、すべての集合体境界で同一の EPDF の値が求まる。従って AEPDF は領域毎（集合体毎）の値となる。

本検討では以下の 5 つの計算ケースを比較する。

ケース1. 非均質炉心 MOC 計算（参照解）

ケース2. 燃料集合体均質炉心 MOC 計算

ケース3. 燃料集合体均質炉心 MC 計算

ケース4. 燃料集合体均質炉心 DF-MOC 計算

ケース5. 燃料集合体均質炉心 DF-MC 計算

以下に計算結果を示す。本検討では、実効増倍率に加え、ピンセル平均全中性子束と集合体平均全中性子束をそれぞれ比較する。なお、ピンセル平均全中性子束は、均質化した集合体において、ピンセルに相当する空間領域の全中性子束である。

各計算ケースにおける実効増倍率の相対差異を表 5.5.14 にまとめる。均質 MOC と MC、均質 DF-MOC と DF-MC はそれぞれ実効増倍率が約 0.01%程度の差異で一致していることから、MC 計算および DF-MC 計算は正しく実行できていることが分かる。また、均質 MC 計算に比べると、均質 DF-MC 計算では実効増倍率相対差異が大幅に低減されていることが分かる。

表 5.5.14 各計算ケースの k_{eff} および参照解との相対差異

計算ケース	k_{eff}	相対差異 (%)
非均質 MOC 計算 (参照解)	0.998984	-
均質 MOC 計算	0.994607	-0.438
均質 MC 計算	0.994515	-0.447
均質 DF-MOC 計算	0.999713	0.073
均質 DF-MC 計算	0.999542	0.056

次に、ピンセル平均全中性子束の相対差異を表 5.5.15 に、燃料集合体平均全中性子束の相対差異を表 5.5.16 にそれぞれ示す。全中性子束相対差異も、MOC と MC で概ね同等の値が得られた。表 5.5.15 ではいずれの計算ケースでも全中性子束相対差異は概ね等しい値をとった。一方で表 5.5.16 では、DF-MC および DF-MOC において全中性子束相対差異が半減されている。これは集合体を均質化しているため集合体内の詳細な全中性子束分布概形までは再現できていないが、集合体平均の全中性子束分布は比較的精度よく再現できていることを示している。以上の結果より、DF-MC 計算は集合体均質炉心体系に対しても十分適用可能であるといえる。なお、集合体内の詳細な中性子束分布、あるいは燃料棒出力分布を求めるためには、近代ノード法で用いられる燃料棒出力再構成などの手法を用いる必要がある。

表 5.5.15 各計算ケースにおけるピンセル平均全中性子束の相対差異 (%)

計算ケース	最大値	最小値	平均値
非均質 MOC 計算 (参照解)	-	-	-
均質 MOC 計算	13.8	-46.8	7.73
均質 MC 計算	13.9	-47.0	7.76
均質 DF-MOC 計算	12.9	-44.0	7.24
均質 DF-MC 計算	13.3	-44.1	7.30

表 5.5.16 各計算ケースにおける集合体平均全中性子束の相対差異 (%)

計算ケース	最大値	最小値	平均値
非均質 MOC 計算 (参照解)	-	-	-
均質 MOC 計算	6.71	-7.19	2.34
均質 MC 計算	7.35	-7.19	2.37
均質 DF-MOC 計算	2.12	-3.24	1.26
均質 DF-MC 計算	2.72	-3.27	1.34

次に、ピンセル平均全中性子束相対差異の空間分布を図 5.5.6 に、燃料集合体平均全中性子束の相対差異の空間分布を図 5.5.7 にそれぞれまとめる。カラーバーの目盛はピンセル均質 KAIST 炉心体系計算と同様である（最大+5%、最小-5%）。

図 5.5.6 より、MOC と MC は概ね同等の相対差異カラーマップを示した。DF-MOC および DF-MC はわずかに UOX1 集合体内部の相対差異が低減されているものの、体系全体では数%の相対差異が生じている。一方図 5.5.7 では、EPDF を用いることで（1/4 炉心図の中央に位置する）MOX1BA 集合体の相対差異が大幅に低減されている。

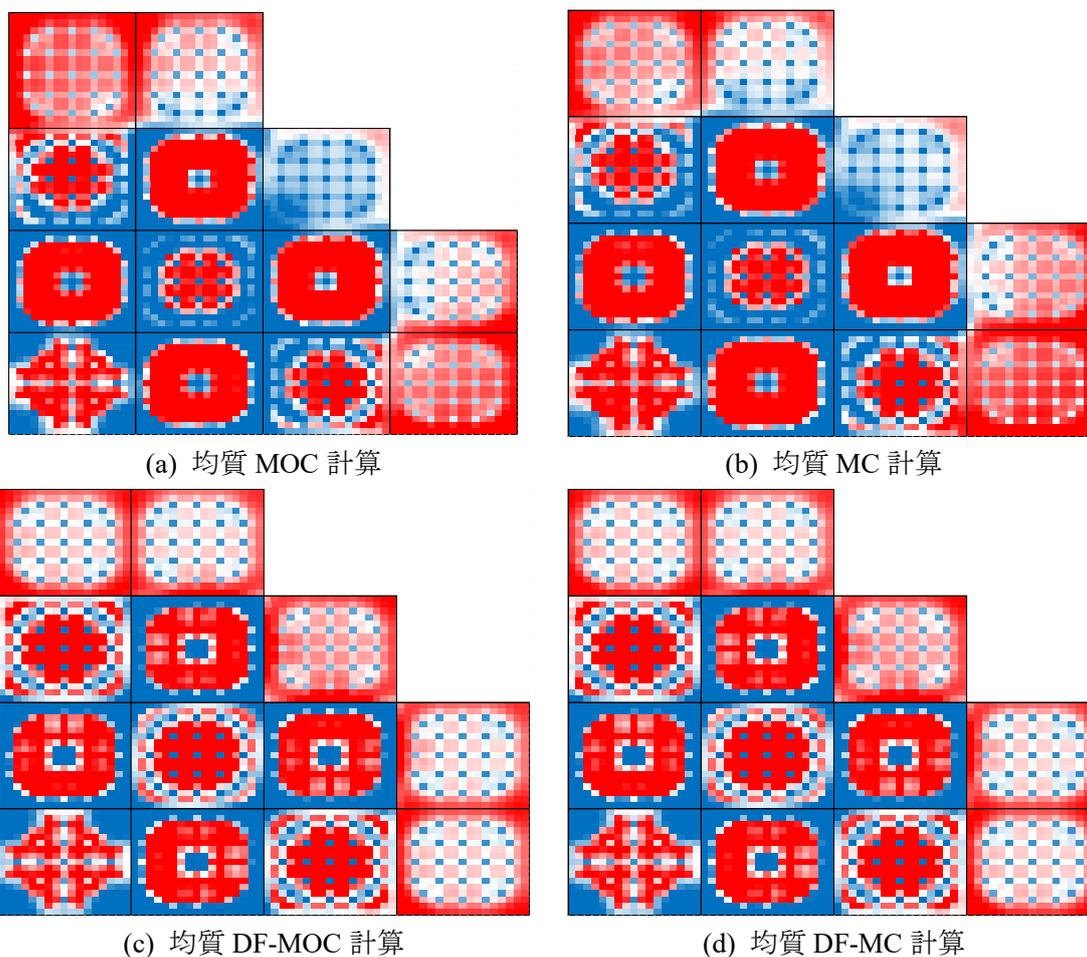


図 5.5.6 ピンセル平均全中性子束相対差異のカラーマップ

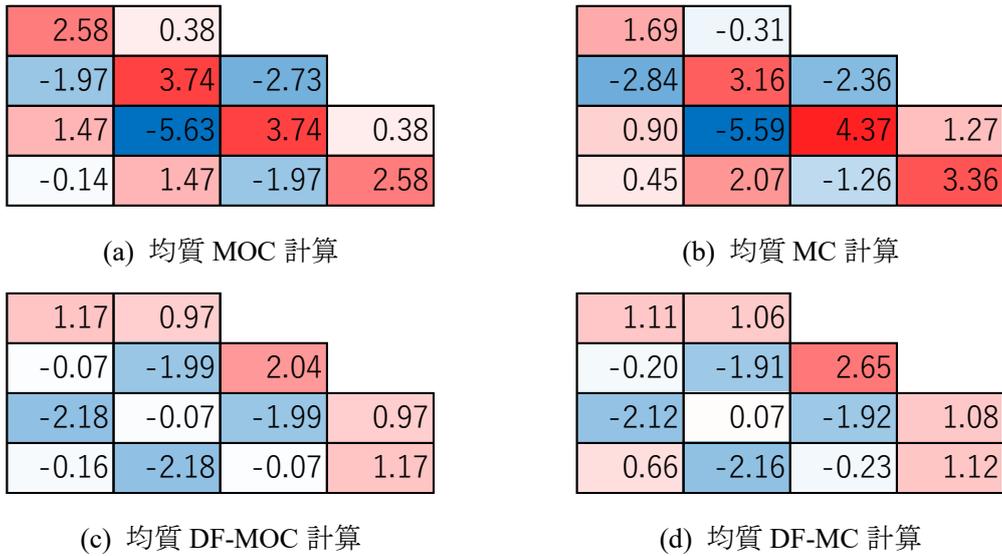


図 5.5.7 集合体平均全中性子束相対差異のカラーマップ (%)

最後に、集合体均質 KAIST 炉心計算の各計算ケースの計算時間を表 5.5.17 にまとめる。集合体均質 MOC と MC 計算では MOC 計算の方が短い計算時間となった。一方で集合体均質 DF-MOC と DF-MC 計算では DF-MC 計算の方が短い計算時間となった。これはピンセル均質体系と同様の理由、すなわち DF-MOC 計算では角度中性子束の反復による計算時間増大量が顕著だが、DF-MC 計算は MC 計算と概ね変わらない計算量であるためだと推測する。ただしピンセル均質体系計算と同様に、本結果も計算コードの最適化を行っていないため計算時間についてはさらなる検討が必要である。

以上より、二次元炉心体系においても DF-MC 法の原理を実証できた。

表 5.5.17 各計算ケースの計算時間

計算ケース	最大 EPDF 計算時間 (合計 EPDF 計算時間) [h]	輸送計算 時間 [h]	総計算時間 (合計 EPDF 計算時間+ 輸送計算時間) [h]
非均質 MOC 計算 (参照解)	-	3.1	3.1
集合体均質 MOC 計算	-	1.6	1.6
集合体均質 MC 計算	-	7.9	7.9
集合体均質 DF-MOC 計算	3.5 (15.3)	14.7	18.2 (29.9)
集合体均質 DF-MC 計算	3.5 (15.3)	8.7	12.2 (23.3)

5.6 本章のまとめ

本章では、領域毎 even-parity 不連続因子 (EPDF) を扱う多群モンテカルロ法 (DF-MC 法) を提案し、一次元固定源計算および二次元固有値計算による検証計算を実施した。一般的な中性子輸送モンテカルロ法では空間、角度、エネルギーに関する離散化誤差を排除できるため、不連続因子は適用されてこなかった。また同時にモンテカルロ法への不連続因子の適用方法は確立されていなかった。不連続因子を扱う多群モンテカルロ法の提案により、モンテカルロ法による炉心計算の実現化や、新たな炉物理計算分野の開拓が期待できる。

EPDF は、ある飛行方向とその逆方向の角度中性子束の和および差から定義される even-および odd-parity 角度中性子束からなる輸送方程式に対して定義される不連続因子である。一般的な不連続因子は領域境界毎や角度中性子束毎に定義されるため、境域境界依存性や角度依存性を有している。しかし EPDF はいずれも有しておらず領域毎に一意に値が決定される。even-parity 角度中性子束に関する輸送方程式に境界条件を与えて整理すると、EPDF と領域入射および放出角度中性子束の関係式が求まる。この関係式は、領域に入射する中性子が、そのまま透過する割合と逆方向に反射する割合を表している。これは光の透過および反射のアナロジーとして考えると、中性子の疑似的な透過率および反射率を表している。

そこで DF-MC 法では、EPDF から求まる疑似的な透過率および反射率を中性子透過係数および反射係数として定義し、それらの値に基づいて境域境界で中性子を透過もしくは反射させる。透過した場合は飛行方向を変えず、反射した場合は 180° 逆方向を向く。いずれの場合も中性子の追跡は継続する。このとき透過係数の値が 1.0 未満か以上かによって透過確率や透過・反射後のウェイトの値が異なる。これにより EPDF で扱っている中性子束の空間的不連続性をモンテカルロ計算でも扱うことができる。

ただし注意点として、DF-MC 法では負のウェイトが必ず現れる。従って、中性子ランダムウォークでは負のウェイトを扱った計算式を用いる必要がある。また固有値計算において、負の核分裂中性子を明示的に持ち越して次のバッチ計算を行うと数値的な不安定性が現れ計算が収束しなくなる。そのため、核分裂源の規格化の前に weight cancellation を行い負のウェイトを消去する必要がある。本検討では最近点对探索における空間分割統治法を用いた weight cancellation 手法 (CP 法) を用いる。CP 法では空間領域に対して分割統治法を適用し、負のウェイトを持つ中性子の最近点对となる正のウェイトを持つ中性子を特定し、それらを打ち消す。これをすべての負のウェイトを持つ中性子に対して適用する。これによりバッチ計算間で負のウェイトを持ち越さず、安定した計算を実行できる。また DF-MC 法では中性子の軌跡と領域境界の交差判定を行う必要があるため Delta-Tracking 法 (仮想散乱法) と併用できない。

DF-MC 法の原理実証のための検証計算として、一次元固定源計算と二次元固有値計算をそれぞれ実行した。固定源計算では、燃料集合体模擬体系においてピンセル空間均質化を行い、非均質および均質 MOC 計算から EPDF を求めた。均質体系における DF-MC 計算は、参照解である非均質体系における MOC 計算から求まるピンセル平均全中性子束を統計的

不確かさの範囲内で再現した。本計算により、中性子の透過および反射によりモンテカルロ法で EPDF を扱うことができるという基本原理を検証した。

固有値計算では単一集合体計算と炉心計算をそれぞれ行い、DF-MC 法による固有値計算の妥当性確認および炉心体系への適用可能性を確認した。単一集合体計算ではピンセル均質化を行い、均質 DF-MC 計算が非均質 MOC 計算と概ね一致した解が得られた。本結果から負のウェイトを扱うモンテカルロ計算式や CP 法による **weight cancellation** の妥当性を確認した。また炉心計算では、計算体系には KAIST-2A ベンチマークを用い、ピンセル均質化と集合体均質化の両方をそれぞれ行った。いずれの均質化体系においても、DF-MC 計算は EPDF を扱う MOC 計算と同精度の解が得られた。また、本章のすべての EPDF 計算において EPDF は安定して収束した。すなわちピンセル均質化および集合体均質化を伴う炉心体系においても DF-MC 法は適用可能であることが示唆された

以上より、本章では EPDF に基づいて領域境界で中性子を透過もしくは反射させることで、中性子束の空間的不連続性を扱える新たな多群モンテカルロ手法を提案した。検証計算の結果、DF-MC 法の妥当性や炉心計算への適用性が確認された。今後 DF-MC 法による実機炉心計算やさらなる手法の発展が期待される。

5.7 参考文献

- [14]. A. YAMAMOTO, T. ENDO, and Y. CHAO, “A Derivation of Discontinuity Factor for Angular Flux in Integro-Differential Transport Equation,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **104**, 815 (2011).
- [15]. A. YAMAMOTO, and T. ENDO, “A New Interpretation of Discontinuity Factor,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 991 (2019); <https://doi.org/10.1080/00295639.2019.1579514>.
- [16]. 山本俊弘, “Boltzmann 方程式の解法 -確率論的手法による解法-,” 第 34 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.79–92, 日本原子力学会 (2002).
- [17]. 長家康展, “モンテカルロ計算の基礎理論および実験解析への適用,” 第 38 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.153–188, 日本原子力学会 (2006).
- [18]. 長家康展, “-粒子輸送モンテカルロ計算の基礎原理とそこに潜む不確かさ-,” 第 44 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.65–99, 日本原子力学会 (2012).
- [19]. 長家康展, “Python を利用した核計算(2)統計論手法,” 第 50 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp.163–192, 日本原子力学会 (2012).
- [20]. 小出嵩大, “球状燃料分散体系の核特性計算手法に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2016).
- [21]. 大久保卓哉, “GPU を用いたモンテカルロ計算の高速化に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2016).
- [22]. 長屋康展, et. al, “MVP/GMVP 第 3 版 : 連続エネルギー法及び多群法に基づく汎用中性子・光子輸送計算モンテカルロコード,” 日本原子力研究開発機構, 原子力科学研究部門, 原子力基礎工学研究セミナー (2016); <https://jopss.jaea.go.jp/pdfdata/JAEA-Data-Code-2016-019.pdf>. (2021 年 12 月 20 日現在)
- [23]. 林幸司, “モンテカルロ法による固有値計算における統計誤差過少評価に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2017).
- [24]. T. BOOTH, “Computing the Higher k-Eigenfunctions by Monte Carlo Power Iteration: A Conjecture,” *Nucl. Sci. Eng.*, **143**, 291–300 (2003); <https://doi.org/10.13182/NSE02-10TN>.
- [25]. T. BOOTH, and J. GUBERNATIS “Exact Regional Monte Carlo Weight Cancellation for Second Eigenfunction Calculations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **165**, 283–291 (2010); <https://doi.org/10.13182/NSE09-62>.
- [26]. T. YAMAMOTO, “Non-Regionwise Weight Cancellation for Monte Carlo Higher Order Criticality Calculations Using Kernel Density Estimator,” *Ann. Nucl. Energy.*, **38**, 2515–2520 (2011); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2011.07.029>.
- [27]. T. YAMAMOTO, “Monte Carlo Method with Complex-Valued Weights for Frequency Domain Analysis of Neutron Noise,” *Ann. Nucl. Energy.*, **58**, 72–79 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.03.002>.
- [28]. A. ROUCHON, A. ZOIA, and R. SANCHEZ, “A New Monte Carlo Method for Neutron Noise Calculations,” *PHYSOR 2016*, Sun Valley, ID, May 1–5 2016 (2016).

- [29]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Utilization of Regionwise Even-Parity Discontinuity Factor to Reduce Discretization Error of MOC,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 253 (2019); <https://doi.org/10.1080/00295639.2019.1579514>.
- [30]. 坂本達哉, “中性子輸送計算における不連続因子に関する研究,” 名古屋大学大学院工学研究科, 修士論文 (2014).
- [31]. E. LARSEN, “Infinite Medium Solutions to the Transport Equation, SN Discretization Schemes, and the Diffusion Approximation,” *Proc. M&C + SNA*, Salt Lake City, UT, USA, September 9–13 (2001) (CD-ROM).
- [32]. N. Z. CHO, *Benchmark Problems in Reactor and Particle Transport Physics*, KAIST (2000).
- [33]. A. YAMAMOTO et al., “GENESIS: A Three-Dimensional Heterogeneous Transport Solver Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Sci. Eng.*, **186**, 1–22 (2017).
- [34]. A. YAMAMOTO, A. GIHO, and T. ENDO, “Recent Developments in the GENESIS Code Based on the Legendre Polynomial Expansion of Angular Flux Method,” *Nucl. Eng. Technol.*, **49**, 1143–1156 (2017).
- [35]. A. YAMAMOTO et al., “Derivation of Optimum Polar Angle Quadrature Set for the Method of Characteristics Based on Approximation Error for the Bickley Function,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**, 129–136 (2007).

第6章 結論

6.1 まとめ

本論文では、不連続因子を用いた中性子輸送計算手法に関する検討を行った。不連続因子とはある物理量の不連続性を定量的に表すパラメータであり、不連続因子を扱うことで別の物理量の連続性を保存できる。不連続因子の適用により中性子輸送計算の離散化誤差を低減でき、計算精度をほとんど保ったまま計算コストを削減できる。そのため炉心解析手法の高度化には、不連続因子のさらなる活用が不可欠であると考えられる。

中性子輸送計算手法には、方程式を離散化して数値計算を行う決定論的手法と、乱数を用いる確率論的手法（モンテカルロ法）があるが、不連続因子のさらなる活用にあたり両手法にはいくつかの要検討事項があった。決定論的手法において不連続因子を用いる非線形収束加速法の収束性では、非線形収束加速法の収束性は計算モデルとの関連性の観点から議論されてこなかった。非線形収束加速法の計算モデルと収束性の関係を明確化することで、加速法のさらなる収束性向上を達成できる可能性がある。また、確率論的中性子輸送計算における不連続因子の適用手法は確立されていなかった。不連続因子を適用した確率論的手法を新たに提案することで、不連続因子および確率的手法の有用性が高まる可能性がある。

以上より本研究では、不連続因子の利用可能性を広げることを目的として、不連続因子を用いた決定論的中性子輸送計算手法の一種である非線形収束加速法の計算モデルと収束性の関係解明と、不連続因子を適用した確率論的中性子輸送計算手法の提案および手法の妥当性確認をそれぞれ行った。

第1章では、本研究の序論として背景および目的を述べた。原子炉の安全性及び経済性を評価する炉心解析における中性子輸送計算の重要性について言及した。また炉心解析における、不連続因子を用いた中性子輸送計算手法の活用による計算コストの削減や計算結果の高精度化について述べた。最後に、さらなる計算コスト削減および高精度化を目的として不連続因子を用いた中性子輸送計算の利用可能性を広げるため、本研究では非線形収束加速法の収束性評価およびDF-MC法の提案と妥当性検証を行うことを述べた。

第2章では、従来の決定論的中性子輸送計算に対する非線形収束加速法について述べた。まずは非線形収束加速法の原理と代表的な加速法であるCMFD法の計算理論と収束性について述べた。またCMFD加速法で利用される収束性向上手法についてもまとめるとともに、数値的な収束性評価手法と解析的な収束性評価手法である線形化フーリエ解析の評価方法についてそれぞれ説明した。

第3章では、従来の決定論的中性子輸送計算に対する離散化誤差低減手法について述べた。代表的な手法および本研究に関連する手法である不連続因子、SPH法および領域毎 even-parity 不連続因子の計算理論と計算手順についてそれぞれまとめた。

第4章では、非線形収束加速法の空間および角度離散化モデルと収束性の関係に関する検討について述べた。まず初めに、本検討の目的が、①詳細計算と非線形収束加速法の空間および角度離散化モデルの乖離と収束性の関係明確化、②LS MOC への非線形収束加速法

の収束性評価、③LS 近似もしくは離散角度求積近似を用いた加速法の収束性評価、の3点であることを述べた。また、本検討のために新たに提案した4つの非線形収束加速法、FS/LS ACMFD 加速法およびFS/LS ADMOC 加速法の計算理論について述べた。FS/LS ACMFD 加速法およびFS/LS ADMOC 加速法はそれぞれ空間離散化モデルにFS 近似もしくはLS 近似、角度離散化モデルに拡散近似もしくは離散角度求積近似をそれぞれ用いている。そして、線形化フーリエ解析および数値計算による収束性評価を行いその結果を比較した。収束性評価の結果、収束性に及ぼす影響は空間均質化誤差(詳細計算と加速計算のメッシュ数の違い)が最も支配的であり、次に空間離散化(有限差分、FS 近似、LS 近似)、角度離散化(P1, 角度離散点)の順となることが確認された。またLS MOC に対してFS 近似およびP1 近似を用いる加速法を適用することは、収束性および実用上の観点からは十分合理的であることを確認した。

第5章では、領域毎 even-parity 不連続因子を適用した多群モンテカルロ (DF-MC) 法を提案し、妥当性確認のため検証計算を行った。まずDF-MC 法における中性子の透過および反射の原理を説明した。さらに従来の多群モンテカルロ法との相違点に着目し、DF-MC 方で実施する中性子の透過および反射、負のウエイトの扱い、weight cancellation についてそれぞれ詳しく述べた。検証計算として、1次元平板体系における固定源計算および2次元単一集合体体系および小型炉心体系における固有値計算を実行した。その結果、本論文で提案するDF-MC 法は不連続因子を適用したMOC 計算と一致した解が得られ、手法の妥当性が確認された。また炉心体系での検証計算結果より、炉心計算への適用可能性を確認した。

以上より、本研究では決定論的手法および確率論的手法の各方面において、不連続因子を用いた中性子輸送計算手法の収束性評価や新たな手法の提案及び妥当性確認を行った。これにより、不連続因子を用いる中性子輸送計算手法に関する新たな知見が得られたとともに、不連続因子の利用可能性を広げることができたと考える。本研究で得られた知見および本研究で示した提案手法は、今後の炉心解析手法及び原子炉物理学の発展に貢献するものとする。

6.2 今後の課題

非線形収束加速法（第4章）の収束性に関する課題を以下に示す。

● FS/LS ADMOC 加速法における分点セットと収束性に関する検討

本検討では MOC および ADMOC 加速法ではすべて Gauss-Legendre 分点を用いた。しかし ADMOC 加速計算は詳細計算の収束加速を目的としているため、異なる分点セットを用いることで収束性が変化する可能性がある。また、ADMOC 加速法では角度縮約を行うが、再帰的な分点セットである Gauss-Patterson 分点を用いることで効率的な加速計算が可能かどうか検討することが挙げられる。

● 多次元多群体系において提案した非線形収束加速法の収束性評価

本検討では、線形化フーリエ解析で扱える 1 群 1 次元均質平板での収束性解析を行った。実機炉心体系への適用性を検証するため、多群多次元非均質体系での収束性評価を行う必要がある。

● 空間均質化誤差を低減できる新たな加速法開発に関する検討

本検討より、空間均質化誤差が収束性に与える影響が支配的であることが示された。そのため、加速計算モデルや restriction および prolongation 方法の改良によって、空間均質化誤差を低減できる新たな加速法を開発することで、さらなる抜本的な収束加速を実現できると期待する。

● 統一的な非線形収束加速法の提案

GCMR 加速法において、FS ACMFD 加速法と等価なときの加速パラメータの値を検討する。もしくは、GCMR 加速法（CMR 加速法および CMFD 加速法）や ACMFD 加速法を統一的に記述できる加速法を新たに提案する。これにより統一的手法を一度実装すれば、入力条件の設定を行うだけで上記全ての加速法を利用できる見込みがある。

● エネルギー群縮約を含む、より網羅的な収束性評価

本検討では空間離散化および角度縮約と収束性の関係性を評価したが、エネルギー群縮約と収束性の関係性は評価していない。非線形収束加速法においてエネルギー群縮約を行う場合、2 群もしくは 1 群に縮約されることが多い。そこで、エネルギー群縮約誤差も考慮したより系統的かつ網羅的な収束性評価を行うことで、空間、角度、エネルギーの離散化と収束性の関係性を評価できる。

● LS ACMFD 加速法および FS/LS ADMOC 加速法の線形化フーリエ解析

LS ACMFD 加速法および FS/LS ADMOC 加速法の線形化フーリエ解析は、計算式の複雑さから固有値方程式の導出が困難であった。これら加速法に対する線形化フーリエ解析方法を開発することで、より詳細な収束特性を評価できる。

次に、領域毎 even-parity 不連続因子を適用した多群モンテカルロ法（第 5 章）に関する課題を以下に示す。

- **実機軽水炉炉心体系における検証計算**

本検討より DF-MC 法の小型炉心体系への適用可能性が確認された。さらに実機炉心体系による DF-MC 計算を行い、大型炉心体系および炉心解析への適用性を確認する必要がある。

- **計算コストに関する検討**

各計算コードの最適化を行い、MOC と DF-MC 計算で計算時間および計算メモリの比較を行う。これにより計算コストの観点で DF-MC 法の有用性を評価することができる。

- **領域毎 even-parity 不連続因子（EPDF）の計算方法に関する検討**

本検討では MOC 計算により EPDF を計算した。しかし DF-MC 法により EPDF（透過係数および反射係数）を計算することも原理上は可能である。DF-MC 法と MOC のどちらの方法で EPDF 計算を行うのが、計算時間や収束性の観点から効率的かどうか検討する必要がある。

- **Weight cancellation 手法に関する検討**

本検討では、空間領域に関する分割統治法による最近点对 weight cancellation 法（CP 法）により負のウェイトを消去した。Weight cancellation 方法には binning 法など他の手法も提案されている。計算量や計算精度の観点で、どのような weight cancellation 手法が有用なのか検討する必要がある。

- **ウェイト安定化手法に関する検討**

DF-MC 法において、1 つの中性子が吸収され消滅する前に、透過反射によるウェイト増大量は散乱比、光学距離および透過係数の値に依存する。散乱比が 1 に近く、光学距離が小さいほど透過反射回数は増加し、透過係数の値が 1 を超えて大きな値をとるほど、1 回の透過反射当たりのウェイト増加率が大きい。そのため、計算条件によってはウェイトが発散する可能性がある。そのような場合に、ウェイトを低減し発散しないよう安定して中性子追跡を行えるような工夫が必要となる。

- **効率的な全中性子束分布タリー方法に関する検討**

DF-MC 法では集合体均質体系で高精度なモンテカルロ計算を実行できるが、集合体内の詳細な全中性子束分布を求めるためには、タリー領域を詳細に分割する必要がある。しかしタリー領域が小さいと領域内の核反応回数が減るため、統計的不確かさを十分小さくするにはヒストリー数を増やす必要がある。そこで、集合体内の全中性子束分布を正規直交基底の線形結合で表すことを考える。正規直交基底は複数回の単一集合体計算から求まるデータセットに特異値分解法を適用することで事前に計算することができ、展開係数を DF-MC 法におけるタリーから求める方法について検討の余地がある。

Appendix A 線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出

A.1 本章の概要

本章では、線形化フーリエ解析による非線形収束加速法の固有値方程式の導出過程を詳細に述べる。線形化フーリエ解析とは、非線形反復法の収束率（スペクトル半径）を求める解析的な手法である。非線形反復法では、反復毎に定数係数の値が変化するため、1反復当たりの演算を行列形式の固有値方程式で記述することが困難である。そのため、解析的な固有値からスペクトル半径を求めることができない。本手法はいくつかの仮定をおくことで、非線形反復法の解析的な固有値およびスペクトル半径を求めることができる。第2章では、線形化フーリエ解析による CMFD 加速法の固有値方程式を示した。本章では、各非線形収束加速法に対して線形化フーリエ解析を適用し、固有値方程式の導出過程を示す。

以下に本章の構成を以下に示す。A.2 節では CMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析、A.3 節では p-CMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析、A.4 節では GCMR 加速法に対する線形化フーリエ解析、A.5 節では FS ACMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析の固有値方程式導出についてそれぞれ述べる。最後に A.6 節に本章のまとめ、A.7 節に参考文献をそれぞれ示す。

A.2 CMFD 加速法

CMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出について述べる[1]。導出の概要については 2.6.1 項を参照すること。本節では、導出過程を 3つのステップに分けて説明する。

step 1) 仮定および基礎方程式の整理

本導出では以下の計算体系および計算条件を仮定する。

- 1次元均質平板体系
- 固定源計算、等方散乱源
- エネルギー1群
- 周期境界条件（1次元均質平板では完全反射境界条件に相当）
- 詳細計算手法に Sn 法（step characteristics）を利用（一次元平板体系では MOC と等価）

以下に、MOC に対する CMFD 加速法の基礎方程式を列挙する。MOC の基礎方程式は下式のとおりである。

$$\frac{\mu_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \Sigma_t \left(f_n \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) = \Sigma_s \phi_k^l + q, \quad (\text{A.2.1})$$

$$f_n = -\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\Sigma_t}{\mu_n}}} \quad (\text{A.2.2})$$

$$1 - f_n = \frac{\mu_n}{h\Sigma_t} - \frac{e^{-\frac{h\Sigma_t}{\mu_n}}}{1 - e^{-\frac{h\Sigma_t}{\mu_n}}} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\phi_k^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \left(f_n \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1 - f_n) \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.2.4})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

μ_n : n 方向の中性子飛行方向余弦、

ψ : 角度中性子束、

ϕ : 全中性子束、

h : 領域サイズ、

Σ_t : 巨視的全断面積、

Σ_s : 巨視的散乱断面積、

q : 等方固定中性子源、

f_n : n 方向の角度中性子束のための重み関数(本章では **step characteristics** に基づく式を記載)、

w : 求積法における重み ($\sum_n w_n = 2$)、

l : 反復回数のインデックス、 $l + 1/2$ は l 回反復後(加速計算前)を表す、

k : MOC における詳細空間領域のインデックス、

$k + 1/2$: 詳細空間領域 $k + 1$ と k 間の領域境界、

n : 飛行方向のインデックス。

空間均質化に関する基礎式は以下のとおりである。

$$\phi_i^l = \frac{1}{p} \sum_k \phi_k^l, \quad (\text{A.2.5})$$

$$\phi_i^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \sum_k \phi_k^{l+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.2.6})$$

$$\sum_k q = qp. \quad (\text{A.2.7})$$

ここで、 p は空間均質化領域数である。

CMFD 加速法における中性子流差分式は以下のとおりである。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{FD}(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \hat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}), \quad (\text{A.2.8})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{FD}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \hat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}), \quad (\text{A.2.9})$$

ここで、

$$\tilde{D}^{FD} = \frac{D}{ph}, \quad (\text{A.2.10})$$

$$\widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \widetilde{D}^{FD} \left(\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_i^{l+\frac{1}{2}} \right)}{\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} + \phi_i^{l+\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.2.11})$$

$$\widehat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \widetilde{D}^{FD} \left(\phi_i^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right)}{\phi_i^{l+\frac{1}{2}} + \phi_{i-1}^{l+\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.2.12})$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.2.13})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.2.14})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

\widetilde{D}^{FD} : 有限差分近似に基づく結合係数、

\widehat{D} : 中性子流補正係数、

D : 拡散係数、

i : CMFD 加速計算で用いる粗空間領域のインデックス (p 個の詳細空間領域を内包)、

$i + 1/2$: 粗領域 $i + 1$ と i の間の領域境界。

式(A.2.8), (A.2.9)を用いると、CMFD 加速方程式は下式のとおり

$$\begin{aligned} & -\widetilde{D}^{FD}(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) + \widetilde{D}^{FD}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) \\ & - \widehat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}) + ph\Sigma_a\phi_i^{l+1} = phq, \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

ここで、 $\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_a$ である。

CMFD 加速計算が収束したら、下式を用いて全中性子束を更新する (prolongation)。

$$\phi_k^{l+1} = \phi_k^{l+\frac{1}{2}} \frac{\phi_i^{l+1}}{\phi_i^{l+\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.2.16})$$

以上、式(A.2.1)–(A.2.16)が、MOC における CMFD 加速法の基礎方程式である。

step 2) 中性子束の線形近似および線形化

全中性子束および角度中性子束を、解析解近傍で誤差関数を用いて線形近似する。

$$\phi_k^l = \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon\zeta_k^l), \quad (\text{A.2.17})$$

$$\phi_k^{l+\frac{1}{2}} = \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon\zeta_k^{l+\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{A.2.18})$$

$$\phi_i^l = \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon\zeta_i^l), \quad (\text{A.2.19})$$

$$\phi_i^{l+\frac{1}{2}} = \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{A.2.20})$$

$$\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{A.2.21})$$

$$\psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{A.2.22})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

q/Σ_a : 中性子束の解析解、

ζ : 全中性子束の誤差関数、

ξ : 角度中性子束の誤差関数

ε : 微小量（誤差関数の展開係数に相当）。

これらの式を、各基礎方程式に代入して整理する。

まず、MOCの基礎方程式を解析解近傍で展開する。式(A.2.1)に式(A.2.17)–(A.2.22)を代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_n}{h\Sigma_t} \left(\frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & + \left(f_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + (1-f_n) \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_k^l) + \frac{q}{\Sigma_t}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.23})$$

式を整理すると以下のとおりとなる。

$$\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} \left(\frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) + \left(\frac{q}{\Sigma_a} \left(f_n \varepsilon \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \varepsilon \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_k^l, \quad (\text{A.2.24})$$

ここで、以下の式を用いて式変形を行った。

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \frac{q}{\Sigma_a} + \frac{q}{\Sigma_t} = \frac{\Sigma_s q + \Sigma_a q}{\Sigma_t \Sigma_a} = \frac{\Sigma_t q}{\Sigma_t \Sigma_a} = \frac{q}{\Sigma_a}. \quad (\text{A.2.25})$$

さらに式(A.2.24)の両辺を q/Σ_a で割ると以下の式(A.2.26)が得られる。

$$\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} \left(\xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \left(f_n \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) = c \zeta_k^l, \quad (\text{A.2.26})$$

ここで、散乱比 $c = \Sigma_s/\Sigma_t$ である。

また、式(A.2.4)に式(A.2.17)–(A.2.22)を代入すると式(A.2.27)が得られる。

$$\zeta_k^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \left(f_n \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.2.27})$$

以上より、MOCにおける誤差関数の関係式として式(A.2.26)および(A.2.27)が得られた。

次に、CMFD加速方程式を解析解近傍で展開する。式(A.2.11)の両辺に $(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1})$ をかけ、式(A.2.13)を代入すると、式(A.2.28)が得られる。

$$\widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) = \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \widetilde{D}^{FD} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \frac{\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}}{\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} + \phi_i^{l+\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.2.28})$$

式(A.2.28)に式(A.2.17)–(A.2.22)を代入して整理すると、式(A.2.33)が得られる。

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) &= \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \frac{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1}) + \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1})}{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}}) + \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}})}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.29})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) &= \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\frac{1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} + 1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}}{1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} + 1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) &= \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \left(1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} \left(\zeta_{i+1}^{l+1} + \zeta_i^{l+1} - \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2.31})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) &= \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \frac{\varepsilon}{2} \left(\zeta_{i+1}^{l+1} + \zeta_i^{l+1} - \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{A.2.32})$$

$$\tilde{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.2.33})$$

ここでは、 $\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n = 0$ の関係式および式(A.2.34)の近似式を用いた。また、 ε の高次項は $O(\varepsilon^2)$ として無視できるほど小さいとする。これにより方程式を線形化する。

$$(1+x)^{-1} \approx 1-x+O(x^2). \quad x \approx 0 \quad (\text{A.2.34})$$

同様に、式(A.2.12)も以下のとおり整理できる。

$$\tilde{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}) = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.2.35})$$

式(A.2.17)–(A.2.22)、(A.2.29)および(A.2.35)を式(A.2.15)に代入すると下式が得られる。

$$\begin{aligned} -\tilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1}) - \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) \right) + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\ + \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ + \tilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) - \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1}) \right) - \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\ - \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \phi_i^{l+1} = phq. \end{aligned} \quad (\text{A.2.36})$$

さらに整理すると、式(A.2.39)が得られる。

$$\begin{aligned} -\tilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+1}) \right) + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ + \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + \tilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1}) \right) \\ - \tilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) = phq, \end{aligned} \quad (\text{A.2.37})$$

$$\begin{aligned} -\tilde{D}^{FD} (\zeta_{i+1}^{l+1} - \zeta_i^{l+1}) + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \left(\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \tilde{D}^{FD} \left(\zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ + \tilde{D}^{FD} (\zeta_i^{l+1} - \zeta_{i-1}^{l+1}) - \tilde{D}^{FD} \left(\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.38})$$

$$\begin{aligned} -\tilde{D}^{FD} \zeta_{i+1}^{l+1} + 2\tilde{D}^{FD} \zeta_i^{l+1} - \tilde{D}^{FD} \zeta_{i-1}^{l+1} + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \left(\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \tilde{D}^{FD} \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} \\ - 2\tilde{D}^{FD} \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{FD} \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + ph \Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.39})$$

次に、式(A.2.1)を全立体角で積分する。

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \sum_n \Sigma_t W_n \left(f_n \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ = \sum_n W_n (\Sigma_s \phi_k^l + q), \end{aligned} \quad (\text{A.2.40})$$

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \sum_n \Sigma_t W_n \left(f_n \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ = 2(\Sigma_s \phi_k^l + q), \end{aligned} \quad (\text{A.2.41})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_t \sum_n W_n \left(f_n \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ = \Sigma_s \phi_k^l + q, \end{aligned} \quad (\text{A.2.42})$$

$$\frac{1}{2} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \Sigma_t \phi_k^{l+\frac{1}{2}} = \Sigma_s \phi_k^l + q. \quad (\text{A.2.43})$$

この式変形では、式(A.2.4)を用いた。式(A.2.43)を均質化領域数 p 個だけ足し合わせ、空間均質化に関する式である式(A.2.5)–(A.2.7)を用いると式(A.2.45)が得られる。

$$\frac{1}{2} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \Sigma_t \sum_k \phi_k^{l+\frac{1}{2}} = \Sigma_s \sum_k \phi_k^l + \sum_k q, \quad (\text{A.2.44})$$

$$\frac{1}{2} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \Sigma_t p \phi_i^{l+\frac{1}{2}} = \Sigma_s p \phi_i^l + qp, \quad (\text{A.2.45})$$

式(A.2.45)に式(A.2.17)–(A.2.22)を代入すると、以下のとおりとなる。

$$\frac{1}{2} \sum_n \frac{\mu_n W_n}{h} \left(\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) = \Sigma_s p \zeta_i^l - \Sigma_t p \zeta_i^{l+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.2.46})$$

そして式(A.2.46)を式(A.2.39)に代入すると式(A.2.47)が得られる。

$$\begin{aligned} -D^{FD} \zeta_{i+1}^{l+1} + 2D^{FD} \zeta_i^{l+1} - D^{FD} \zeta_{i-1}^{l+1} + ph \Sigma_s \zeta_i^l - ph \Sigma_t \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + D^{FD} \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2D^{FD} \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \\ + D^{FD} \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + ph \Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.47})$$

最後に、prolongationに関する式(A.2.16)を誤差関数で展開する。

$$\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_k^{l+1}) = \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} \right) \frac{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1})}{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}})}, \quad (\text{A.2.48})$$

$$(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+1}) = \left(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} \right) \frac{(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1})}{(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}})}, \quad (\text{A.2.49})$$

$$(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+1}) = \left(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} \right) \left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (\text{A.2.50})$$

$$(1 + \varepsilon \zeta_k^{l+1}) = 1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \varepsilon \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2), \quad (\text{A.2.51})$$

$$\zeta_k^{l+1} = \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_i^{l+1} - \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon). \quad (\text{A.2.52})$$

ここで $O(\varepsilon)$ は ε を含まない項に比べて無視できるほど小さいとする。以上より、CMFD 加速における誤差関数の関係式として式(A.2.47)および prolongation における誤差関数の関係式として式(A.2.52)が得られた。

以上をまとめると、MOC に対する CMFD 加速法の基礎方程式は誤差関数を用いて式(A.2.53)–(A.2.56)で表される。

$$\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} \left(\xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \left(f_n \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) = c \zeta_k^l. \quad (\text{A.2.53})$$

$$\zeta_k^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \left(f_n \xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + (1-f_n) \xi_{n,k-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.2.54})$$

$$D^{FD} \zeta_{i+1}^{l+1} + 2D^{FD} \zeta_i^{l+1} - D^{FD} \zeta_{i-1}^{l+1} + ph\Sigma_s \zeta_i^l - ph\Sigma_t \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + D^{FD} \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2D^{FD} \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2.55})$$

$$+ D^{FD} \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + ph\Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0.$$

$$\zeta_k^{l+1} = \zeta_k^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_i^{l+1} - \zeta_i^{l+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.2.56})$$

step 3) フーリエ級数展開および固有値方程式の導出

誤差関数を以下のとおりフーリエ級数展開する。なお本来なら式(A.2.57)–(A.2.61)は波数 λ の総和で表されるが、以下では式の簡略化のため、代表的な λ の項のみを示している。

$$\zeta_k^l = \omega^l A_k \exp(j\lambda x_k), \quad (\text{A.2.57})$$

$$\zeta_i^l = \omega^l A \exp(j\lambda x_i), \quad (\text{A.2.58})$$

$$\zeta_k^{l+\frac{1}{2}} = \omega^l B_k \exp(j\lambda x_k). \quad (\text{A.2.59})$$

$$\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} = \omega^l B \exp(j\lambda x_i). \quad (\text{A.2.60})$$

$$\xi_{n,k+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \omega^l a_{n,k} \exp(j\lambda x_{k+\frac{1}{2}}). \quad (\text{A.2.61})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

ω : 複素振幅率、

$A, B, A_k, B_k, a_{n,k}$: 各誤差関数の展開係数

λ : フーリエ波数

j : 虚数単位。

まず、式(A.2.53)に式(A.2.57)–(A.2.61)を代入すると以下のとおり。

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_n}{h\Sigma_t} \left(\omega^l a_{n,k} \exp(j\lambda x_{k+\frac{1}{2}}) - \omega^l a_{n,k-1} \exp(j\lambda x_{k-\frac{1}{2}}) \right) \\ & + \left(f_n \omega^l a_{n,k} \exp(j\lambda x_{k+\frac{1}{2}}) + (1-f_n) \omega^l a_{n,k-1} \exp(j\lambda x_{k-\frac{1}{2}}) \right) \\ & = c \omega^l A_k \exp(j\lambda x_k), \end{aligned} \quad (\text{A.2.62})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_n}{h\Sigma_t} (a_{n,k} \exp(j\lambda h) - a_{n,k-1}) + (f_n a_{n,k} \exp(j\lambda h) + (1-f_n) a_{n,k-1}) \\ & = c A_k \exp\left(\frac{j\lambda h}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.2.63})$$

$$\left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) \exp(jv) a_{n,k} + \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) \exp(-jv) a_{n,k-1} = c A_k, \quad (\text{A.2.64})$$

ここで $x_{k+1/2} - x_{k-1/2} = h$ および $v = \lambda h/2$ の関係式を用いた。このとき指数関数は v (すなわち λ) について周期を有することが分かる。

式(A.2.64)は行数 p の行列形式で記述できる。例として、 $p = 4$ のとき式(A.2.64)を行列形式で記述すると以下のとおりである。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 & 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} \\ \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ a_{n,3} \\ a_{n,4} \end{bmatrix} \\ & = c \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.65})$$

ここで、周期境界条件より $a_{n,0} = a_{n,4}$ の関係式を用いた。

次に、式(A.2.54)に式(A.2.57)–(A.2.61)を代入すると以下のとおり。

$$\begin{aligned} & \mu_n \frac{1}{h\Sigma_t} \left(\omega^l a_{n,k} \exp(j\lambda x_{k+\frac{1}{2}}) - \omega^l a_{n,k-1} \exp(j\lambda x_{k-\frac{1}{2}}) \right) \\ & + \left(f_n \omega^l a_{n,k} \exp(j\lambda x_{k+\frac{1}{2}}) + (1-f_n) \omega^l a_{n,k-1} \exp(j\lambda x_{k-\frac{1}{2}}) \right) \\ & = c \omega^l A_k \exp(j\lambda x_k), \end{aligned} \quad (\text{A.2.66})$$

$$B_k \exp\left(\frac{j\lambda h}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_n w_n (f_n a_{n,k} \exp(j\lambda h) + (1 - f_n) a_{n,k-1}), \quad (\text{A.2.67})$$

$$B_k = \frac{1}{2} \sum_n w_n f_n \exp(jv) a_{n,k} + \frac{1}{2} \sum_n w_n (1 - f_n) \exp(-jv) a_{n,k-1} \quad (\text{A.2.68})$$

式(A.2.68)も行列形式で記述することができる。 $p = 4$ のとき、周期境界条件より以下のとおりである。

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \begin{bmatrix} f_n e^{jv} & 0 & 0 & (1 - f_n) e^{-jv} \\ (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ a_{n,3} \\ a_{n,4} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.69})$$

このとき、式(A.2.69)に式(A.2.65)を代入すると式(A.2.70)が得られる。

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \frac{c}{2} \sum_n w_n \begin{bmatrix} f_n e^{jv} & 0 & 0 & (1 - f_n) e^{-jv} \\ (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - f_n) e^{-jv} & f_n e^{jv} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 & 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} \\ \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right) e^{-jv} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right) e^{jv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.70})$$

よって p について一般化すると、式(A.2.70)は式(A.2.71)のとおり記述できる。

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{H} \vec{\mathbf{A}}, \quad (\text{A.2.71})$$

ここで、ベクトル $\vec{\mathbf{A}}$ 、 $\vec{\mathbf{B}}$ および行列 \mathbf{H} の要素は以下のとおり。なおベクトルサイズは p 、行列サイズは $p \times p$ である。

$$\vec{\mathbf{A}} = [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_p]^T, \quad (\text{A.2.72})$$

$$\vec{\mathbf{B}} = [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_p]^T, \quad (\text{A.2.73})$$

$$\mathbf{H} = \frac{c}{2} \sum_n w_n \begin{bmatrix} f_n e^{j\nu} & 0 & 0 & \cdots & (1-f_n)e^{-j\nu} \\ (1-f_n)e^{-j\nu} & f_n e^{j\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-f_n)e^{-j\nu} & f_n e^{j\nu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-f_n)e^{-j\nu} & f_n e^{j\nu} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right)e^{j\nu} & 0 & 0 & \cdots & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right)e^{-j\nu} \\ \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right)e^{-j\nu} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right)e^{j\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right)e^{-j\nu} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right)e^{j\nu} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right)e^{-j\nu} & \left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right)e^{j\nu} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.2.74})$$

このとき行列 \mathbf{H} は角度方向 n について和をとるが、各要素は方向余弦 0 を対称軸とせず n に関して対称にならないことに注意すること。

$p = 1$ の場合は、各ベクトルおよび行列要素は以下のとおりとなる。

$$\vec{\mathbf{A}} = A_1. \quad (\text{A.2.75})$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_1, \quad (\text{A.2.76})$$

$$\mathbf{H} = \frac{c}{2} \sum_n w_n \frac{[f_n e^{j\nu} + (1-f_n)e^{-j\nu}]}{\left(\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + f_n\right)e^{j\nu} + \left(-\frac{\mu_n}{h\Sigma_t} + 1 - f_n\right)e^{-j\nu}}. \quad (\text{A.2.77})$$

次に、式(A.2.55)に式(A.2.57)–(A.2.61)を代入すると以下のとおり。

$$\begin{aligned} & -\tilde{D}^{FD} \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i+1}) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_i) \\ & - \tilde{D}^{FD} \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i-1}) \\ & + ph\Sigma_s \omega^l A \exp(j\lambda x_i) - ph\Sigma_t \omega^l B \exp(j\lambda x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.2.78})$$

$$\begin{aligned} & + \tilde{D}^{FD} \omega^l B \exp(j\lambda x_{i+1}) - 2\tilde{D}^{FD} \omega^l B \exp(j\lambda x_i) + \tilde{D}^{FD} \omega^l B \exp(j\lambda x_{i-1}) = 0, \\ & -\tilde{D}^{FD} \omega A \exp(j\lambda x_{i+1}) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) \omega A \exp(j\lambda x_i) - \tilde{D}^{FD} \omega A \exp(j\lambda x_{i-1}) \\ & + ph\Sigma_s A \exp(j\lambda x_i) - ph\Sigma_t B \exp(j\lambda x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.2.79})$$

$$+ \tilde{D}^{FD} B \exp(j\lambda x_{i+1}) - 2\tilde{D}^{FD} B \exp(j\lambda x_i) + \tilde{D}^{FD} B \exp(j\lambda x_{i-1}) = 0,$$

ここで両辺を $\exp(j\lambda x_i)$ で割ると下式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\tilde{D}^{FD} \omega A \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) \omega A - \tilde{D}^{FD} \omega A \exp(-j\lambda ph) \\ & + ph\Sigma_s A - ph\Sigma_t B \end{aligned} \quad (\text{A.2.80})$$

$$+ \tilde{D}^{FD} B \exp(j\lambda ph) - 2\tilde{D}^{FD} B + \tilde{D}^{FD} B \exp(-j\lambda ph) = 0.$$

ここで、 $x_{i+1} - x_i = ph$ および $x_{i-1} - x_i = -ph$ の関係式を用いた。

同様に、式(A.2.56)をフーリエ級数展開すると以下のとおりである。

$$\omega^{l+1}A_k \exp(j\lambda x_k) = \omega^l B_k \exp(j\lambda x_k) + \omega^{l+1}A \exp(j\lambda x_i) - \omega^l B \exp(j\lambda x_i), \quad (\text{A.2.81})$$

$$A_k \exp(j\lambda x_k) = B_k \exp(j\lambda x_k) + \omega A \exp(j\lambda x_i) - B \exp(j\lambda x_i). \quad (\text{A.2.82})$$

$$\omega A - B = (\omega A_k - B_k) \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)}. \quad (\text{A.2.83})$$

ここで式(A.2.80)をさらに整理すると以下のとおりである。

$$\begin{aligned} & \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) \omega A \\ & - \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) B \\ & + ph\Sigma_s A - ph\Sigma_s B = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.84})$$

$$\begin{aligned} & \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) (\omega A - B) + ph\Sigma_s (A - B) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.85})$$

式(A.2.83)を式(A.2.85)に代入すると式(A.2.86)が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) (\omega A_k - B_k) \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)} \\ & + ph\Sigma_s (A - B) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.86})$$

ここで空間均質化に関する式(A.2.5)および(A.2.6)を、線形展開およびフーリエ級数展開すると以下の式がそれぞれ得られる。

$$A = \frac{1}{p} \sum_k A_k \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)}, \quad (\text{A.2.87})$$

$$B = \frac{1}{p} \sum_k B_k \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)}. \quad (\text{A.2.88})$$

両辺で辺々差をとると下式が得られる。

$$A - B = \frac{1}{p} \sum_k (A_k - B_k) \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)}. \quad (\text{A.2.89})$$

式(A.2.89)を式(A.2.86)に代入すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) (\omega A_k - B_k) \frac{\exp(j\lambda x_k)}{\exp(j\lambda x_i)} \\ & + ph\Sigma_s \frac{1}{p} \sum_{k'} (A_{k'} - B_{k'}) \frac{\exp(j\lambda x_{k'})}{\exp(j\lambda x_i)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.90})$$

$$\begin{aligned} & \left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right) (\omega A_k - B_k) \\ & + h\Sigma_s \sum_{k'} (A_{k'} - B_{k'}) \frac{\exp(j\lambda x_{k'})}{\exp(j\lambda x_k)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.91})$$

式(A.2.91)は行列形式に直すと、式(A.2.92)のとおりとなる。

$$\omega \vec{\mathbf{A}} = -\theta \mathbf{W} \vec{\mathbf{A}} + (\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}) \vec{\mathbf{B}}. \quad (\text{A.2.92})$$

ここで、ベクトル $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ は式(A.2.72)および(A.2.73)のとおりであり、スカラー値 θ および行列 \mathbf{W} は下式のとおり定義される。また \mathbf{I} は単位行列である。行列サイズは $p \times p$ である。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{h\Sigma_s}{\left(-\tilde{D}^{FD} \exp(j\lambda ph) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_a) - \tilde{D}^{FD} \exp(-j\lambda ph) \right)} \\ &= \frac{h\Sigma_t c}{-\tilde{D}^{FD} (\cos 2pv + j \sin 2pv) + (2\tilde{D}^{FD} + ph\Sigma_t (1 - c)) - \tilde{D}^{FD} (\cos 2pv - j \sin 2pv)} \\ &= \frac{h\Sigma_t c}{\tilde{D}^{FD} (2 - 2 \cos 2pv) + ph\Sigma_t (1 - c)} \\ &= \frac{h\Sigma_t c}{4\tilde{D}^{FD} \sin^2 pv + ph\Sigma_t (1 - c)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.93})$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \exp(2jv) & \exp(4jv) & \cdots & \exp(2(p-1)jv) \\ \exp(-2jv) & 1 & \exp(2jv) & \cdots & \exp(2(p-2)jv) \\ \exp(-4jv) & \exp(-2jv) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \exp(2jv) \\ \exp(-2(p-1)jv) & \exp(-2(p-2)jv) & \cdots & \exp(-2jv) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.94})$$

なお、 $p = 1$ の場合、 $\mathbf{W} = \mathbf{1}$ となる。

最後に式(A.2.71)を用いて、 $\vec{\mathbf{B}}$ を消去して $\vec{\mathbf{A}}$ に関する式に直すと以下のとおり。

$$\begin{aligned} \omega \vec{\mathbf{A}} &= -\theta \mathbf{W} \vec{\mathbf{A}} + (\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}) \mathbf{H} \vec{\mathbf{A}}, \\ \omega \vec{\mathbf{A}} &= (-\theta \mathbf{W} + (\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}) \mathbf{H}) \vec{\mathbf{A}}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.95})$$

従って、反復行列 \mathbf{M} を用いて固有値方程式は以下のとおり記述できる。

$$\omega \vec{\mathbf{A}} = \mathbf{M} \vec{\mathbf{A}}, \quad (\text{A.2.96})$$

ここで反復行列 \mathbf{M} の定義は以下のとおりである。

$$\mathbf{M} = (-\theta \mathbf{W} + (\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}) \mathbf{H}). \quad (\text{A.2.97})$$

式(A.2.96)は $\vec{\mathbf{A}}$ を固有ベクトル、 ω を固有値とした固有値方程式である。よって、式(A.2.95)を解くことで1反復あたりの収束率を求めることができる。このとき収束率は、反復行列 \mathbf{M} のスペクトル半径に対応する。従って、スペクトル半径 ρ は反復行列 \mathbf{M} の固有値の絶対値の最大値を、 v （もしくは λ ）について最大化した値に相当する。

$$\rho = \max_v \left(\max \left(\text{abs}(\text{eig}(\mathbf{M})) \right) \right) . \quad (\text{A.2.98})$$

以上が、MOCにおけるCMFD加速法に対して線形化フーリエ解析したときの固有値方程式の導出過程である。線形化フーリエ解析により非線形収束加速法の1反復当たりの演算を線形な固有値方程式で記述できる。反復行列の固有値を求めることで、解析的な収束率を求めることができる。2.5.4項に示した各拡散係数を用いる場合は、それらの値を用いてスカラー値 θ を計算すればよい。また、反復行列に含まれるパラメータの関係から、各パラメータが収束率に対して有する感度を解析することができる。

A.3 p-CMFD 加速法

本節では、partial current-based CMFD (p-CMFD) 加速法[2]に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出について述べる[3]。また、導出された固有値方程式に基づいてArtificial grid diffusion coefficient (AGD) の導出についても述べる[4]。

p-CMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析はCMFD加速法と概ね同様である。従ってここではCMFD加速法と同様の仮定および計算手法を用いる。本節では、CMFD加速法と異なる導出過程のみについて述べる。

step 1) 仮定および基礎方程式の整理

p-CMFD加速法では、1つの領域境界で2つの中性子流補正係数を用いて部分中性子流および正味中性子流を保存するように正味中性子流差分式をたてる。まず、粗領域 i の正方向境界における部分中性子流はそれぞれ下式のとおり表される。

$$J_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\frac{\tilde{D}^{FD}}{2} (\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \hat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1}, \quad (\text{A.3.1})$$

$$J_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+1} = \frac{\tilde{D}^{FD}}{2} (\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \hat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} \quad (\text{A.3.2})$$

ここで、 J_+, J_- は正負方向の部分中性子流である。このとき各変数は以下のとおりである。

$$\tilde{D}^{FD} = \frac{D}{ph}. \quad (\text{A.3.3})$$

$$\hat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \frac{\tilde{D}^{FD}}{2} (\phi_{i+1}^{l+1/2} - \phi_i^{l+1/2})}{\phi_i^{l+1/2}}. \quad (\text{A.3.4})$$

$$\hat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} - \frac{\tilde{D}^{FD}}{2} (\phi_{i+1}^{l+1/2} - \phi_i^{l+1/2})}{\phi_{i+1}^{l+1/2}}. \quad (\text{A.3.5})$$

$$J_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.3.6})$$

$$J_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.3.7})$$

このとき正味中性子流差分式は以下のとおり表される。

$$\begin{aligned} J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} &= J_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+1} - J_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+1} \\ &= -\tilde{D}^{FD}(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) - \left(\hat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} - \hat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

同様に、粗領域*i*の負方向境界における部分中性子流および正味中性子流は下式で表される。

$$J_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\frac{\tilde{D}^{FD}}{2}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \hat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1}, \quad (\text{A.3.9})$$

$$J_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+1} = \frac{\tilde{D}^{FD}}{2}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \hat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1}, \quad (\text{A.3.10})$$

$$\begin{aligned} J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} &= J_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+1} - J_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+1} \\ &= -\tilde{D}^{FD}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) - \left(\hat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} - \hat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3.11})$$

$$\hat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \frac{\tilde{D}^{FD}}{2}(\phi_i^{l+1/2} - \phi_{i-1}^{l+1/2})}{\phi_{i-1}^{l+1/2}}, \quad (\text{A.3.12})$$

$$\hat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} - \frac{\tilde{D}^{FD}}{2}(\phi_i^{l+1/2} - \phi_{i-1}^{l+1/2})}{\phi_i^{l+1/2}} \quad (\text{A.3.13})$$

$$J_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.3.14})$$

$$J_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3.15})$$

p-CMFD 加速法における正味中性子流である式(A.3.8)および(A.3.11)を用いて、p-CMFD 加速方程式は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} &-\tilde{D}^{FD}(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) - \left(\hat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} - \hat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} \right) + \tilde{D}^{FD}(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) \\ &+ \left(\hat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} - \hat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1} \right) + ph\Sigma_a \phi_i^{l+1} = phq, \end{aligned} \quad (\text{A.3.16})$$

その他の基礎方程式は CMFD 加速法と同様のため省略する。

step 2) 中性子束の線形近似および線形化

全中性子束および角度中性子束を解析解近傍において誤差関数で展開する。展開式は

CMFD 加速同様に、式(A.2.17)–(A.2.22)を用いる。

粗領域境界 $i + 1/2$ の正方向における部分中性子流補正係数の式(A.3.4)に ϕ_i^{l+1} をかける。

$$\widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} = \left(J_{i+\frac{1}{2}+}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \left(\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \frac{\phi_i^{l+1}}{\phi_i^{l+1/2}}. \quad (\text{A.3.17})$$

式(A.2.17)–(A.2.22)を用いて式(A.3.17)を誤差関数の式に展開する。

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \left(\frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \frac{q}{\Sigma_a} \frac{(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+4})}{\left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.18})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\frac{1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}}{1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \left(1 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3.20})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{A.3.21})$$

このとき ε の高次項 $O(\varepsilon^2)$ は無視できるほど小さい。

同様に、粗領域境界 $i + 1/2$ の負方向における部分中性子流補正係数の式(A.3.5)より、以下の式が求まる。

$$\widehat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} = \left(J_{i+\frac{1}{2}-}^{l+1/2} - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \left(\phi_{i+1}^{l+1/2} - \phi_i^{l+1/2} \right) \right) \frac{\phi_{i+1}^{l+1}}{\phi_{i+1}^{l+1/2}}, \quad (\text{A.3.22})$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{A.3.23})$$

よって、正味中性子流補正項は以下のとおり整理できる。

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} - \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right),
\end{aligned} \tag{A.3.24}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{-,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i+1}^{l+1} - \widehat{D}_{+,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} \\
&= -\widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+1} + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{A.3.25}$$

また粗領域境界 $i - 1/2$ についても同様に、部分中性子流補正係数および正味中性子流補正項は以下のとおり展開および整理できる。

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1} = \left(J_{i-\frac{1}{2},+}^{l+1/2} + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \left(\phi_i^{l+1/2} - \phi_{i-1}^{l+1/2} \right) \right) \frac{\phi_{i-1}^{l+1}}{\phi_{i-1}^{l+1/2}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{A.3.26}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} = \left(J_{i-\frac{1}{2},-}^{l+1/2} - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \left(\phi_i^{l+1/2} - \phi_{i-1}^{l+1/2} \right) \right) \frac{\phi_i^{l+1}}{\phi_i^{l+1/2}} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{A.3.27}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{-,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} - \widehat{D}_{+,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{\widetilde{D}^{FD}}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right),
\end{aligned} \tag{A.3.28}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{D}_{-i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_i^{l+1} - \widehat{D}_{+i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \phi_{i-1}^{l+1} \\
&= -\widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{A.3.29}$$

以上より式(A.3.25)および(A.3.29)を、式(A.3.16)に代入して整理する。

$$\begin{aligned}
& -\widetilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1}) - \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) \right) \\
& \quad - \left(-\widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_i^{l+1} + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& \quad + \widetilde{D}^{FD} \left(\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) - \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1}) \right) \\
& \quad + \left(-\widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_i^{l+1} - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& \quad + ph \Sigma_a \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) = phq,
\end{aligned} \tag{A.3.30}$$

$$\begin{aligned}
& -\widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - 2\varepsilon \zeta_i^{l+1} + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + \widetilde{D}^{FD} \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} - \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\varepsilon \zeta_i^{l+1} + 2\varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) = phq,
\end{aligned} \tag{A.3.31}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{D}^{FD}(\zeta_{i+1}^{l+1} - 2\zeta_i^{l+1} + \zeta_{i-1}^{l+1}) + \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \left(\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + \tilde{D}^{FD} \left(\zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \left(\zeta_{i+1}^{l+1} - \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\zeta_i^{l+1} + 2\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1}^{l+1} - \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + ph\Sigma_a \varepsilon \zeta_i^{l+1} = 0,
\end{aligned} \tag{A.3.32}$$

式(A.3.32)に、MOC の方程式を全立体角積分し空間均質化を行って得られる式(A.2.46)を代入して整理する。

$$\begin{aligned}
& -\tilde{D}^{FD}(\zeta_{i+1}^{l+1} - 2\zeta_i^{l+1} + \zeta_{i-1}^{l+1}) + ph\Sigma_s \zeta_i^l - ph\Sigma_t \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{FD} \left(\zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \left(\zeta_{i+1}^{l+1} - \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - 2\zeta_i^{l+1} + 2\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1}^{l+1} - \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad + ph\Sigma_a \varepsilon \zeta_i^{l+1} = 0.
\end{aligned} \tag{A.3.33}$$

以上より、MOC に対する p-CMFD 加速法の基礎方程式を、誤差関数を用いて表すことができる。CMFD 加速法についての式(A.2.53)–(A.2.56)から、式(A.2.55)を式(A.3.33)に置き換えたのが p-CMFD 加速法における誤差関数の関係式となる (MOC および prolongation に関する式は CMFD 加速法と同様である)。

step 3) フーリエ級数展開および固有値方程式の導出

誤差関数を式(A.2.57)–(A.2.61)によりフーリエ級数展開する。展開式は CMFD 加速法と同様である。式(A.3.33)をフーリエ級数展開すると下式のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
& -\tilde{D}^{FD} \left(\omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i+1}) - 2\omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_i) + \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i-1}) \right) \\
& \quad + ph\Sigma_s \omega^l A \exp(j\lambda x_i) - ph\Sigma_t \omega^l B \exp(j\lambda x_i) \\
& \quad + \tilde{D}^{FD} \left(\omega^l B \exp(j\lambda x_{i+1}) - 2\omega^l B \exp(j\lambda x_i) + \omega^l B \exp(j\lambda x_{i-1}) \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n \left(\omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i+1}) - \omega^l B \exp(j\lambda x_{i+1}) \right. \\
& \quad - 2\omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_i) + 2\omega^l B \exp(j\lambda x_i) + \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_{i-1}) \\
& \quad \left. - \omega^l B \exp(j\lambda x_{i-1}) \right) + ph\Sigma_a \omega^{l+1} A \exp(j\lambda x_i) = 0,
\end{aligned} \tag{A.3.34}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{D}^{FD}(\omega A \exp(j\lambda ph) - 2\omega A + \omega A \exp(-j\lambda ph)) + ph\Sigma_s A - ph\Sigma_t B \\
& + \tilde{D}^{FD}(B \exp(j\lambda ph) - 2B + B \exp(-j\lambda ph)) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n (\omega A \exp(j\lambda ph) - B \exp(j\lambda ph) - 2\omega A + 2B) \quad (\text{A.3.35}) \\
& + \omega A \exp(-j\lambda ph) - B \exp(-j\lambda ph) + ph\Sigma_a \omega A = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{D}^{FD}(\exp(j\lambda ph) - (2 + ph\Sigma_a) + \exp(-j\lambda ph))\omega A \\
& + \tilde{D}^{FD}(\exp(j\lambda ph) - (2 + ph\Sigma_a) + \exp(-j\lambda ph))B \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n (\exp(j\lambda ph) + \exp(-j\lambda ph) - 2)(\omega A - B) + ph\Sigma_s A \quad (\text{A.3.36}) \\
& - ph\Sigma_s B = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n (\exp(j\lambda ph) + \exp(-j\lambda ph) - 2) \right. \\
& \quad \left. - \tilde{D}^{FD}(\exp(j\lambda ph) - (2 + ph\Sigma_a) + \exp(-j\lambda ph)) \right) (\omega A - B) \quad (\text{A.3.37}) \\
& + ph\Sigma_s (A - B) = 0,
\end{aligned}$$

式(A.3.37)に、式(A.2.83)および(A.2.89)を代入して整理する。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n (\exp(j\lambda ph) + \exp(-j\lambda ph) - 2) \right. \\
& \quad \left. - \tilde{D}^{FD}(\exp(j\lambda ph) - (2 + ph\Sigma_a) + \exp(-j\lambda ph)) \right) (\omega A_k - B_k) \quad (\text{A.3.38}) \\
& + h\Sigma_s \sum_{k'} (A_{k'} - B_{k'}) \frac{\exp(j\lambda x_{k'})}{\exp(j\lambda x_k)} = 0,
\end{aligned}$$

式(A.3.38)に式(A.2.71)を代入して \vec{B} を消去し、行列形式に直すと以下のとおりとなる。

$$\omega \vec{A} = \mathbf{M} \vec{A} \quad (\text{A.3.39})$$

$$\mathbf{M} = (-\theta \mathbf{W} + [\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}] \mathbf{H}) \quad (\text{A.3.40})$$

この反復行列 \mathbf{M} は θ の定義を除いて CMFD 加速法と同様である。ここで θ は以下のとおり定義される。この定義は参考文献[3]と等しい。

θ

$$\begin{aligned}
&= \frac{h\Sigma_s}{\frac{1}{2}\sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n (\exp(j\lambda p h) + \exp(-j\lambda p h) - 2) - \tilde{D}^{FD}(\exp(j\lambda p h) - (2 + ph\Sigma_a) + \exp(-j\lambda p h))} \\
&= \frac{h\Sigma_t c}{\frac{1}{2}\sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n (2 - 2 \cos(2p\nu)) + 4\tilde{D}^{FD} \sin^2 p\nu + ph\Sigma_t(1 - c)}, \tag{A.3.41} \\
&= \frac{h\Sigma_t c}{\frac{1}{2}\sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n 4 \sin^2 p\nu + 4\tilde{D}^{FD} \sin^2 p\nu + ph\Sigma_t(1 - c)} \\
&= \frac{h\Sigma_t c}{4(\tilde{D}^{FD} + \frac{1}{2}\sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n) \sin^2 p\nu + ph\Sigma_t(1 - c)},
\end{aligned}$$

以上が p-CMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出であり、式(A.3.39)–(A.3.41)が p-CMFD 加速法における固有値方程式である。

ここで、p-CMFD 加速法と等価になる CMFD 加速法を考える[4]。CMFD 加速法と p-CMFD 加速法の固有値方程式は θ に含まれる結合係数項のみが異なる。従って、CMFD 加速法において以下の結合係数 \tilde{D}^{pCMFD} を用いれば、CMFD 加速法と等価な収束性を示すはずである。

$$\tilde{D}^{pCMFD} = \tilde{D}^{FD} + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n, \tag{A.3.42}$$

ここで結合係数から拡散係数の形に変形する。

$$D^{pCMFD} = D + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} (w_n \mu_n) ph, \tag{A.3.43}$$

D は従来の拡散係数であるため D^{Conv} 、 ph は粗領域サイズであるため Δ を用いてそれぞれ記述すると、 D^{pCMFD} は 2.5.4 項で述べた AGD と同じ形式となる。このとき α の値は式(A.3.45)のとおりである。

$$D^{pCMFD} = D_i^{AGD} = D_i^{Conv} + \alpha \Delta_i, \tag{A.3.44}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} (w_n \mu_n) \right). \tag{A.3.45}$$

従って、式(A.3.45)で与えられる α の値を用いれば、CMFD 加速法において p-CMFD 加速法と等価な収束性を示す。このとき、式(A.3.45)で計算される値について考える。この値は MOC で用いる分点数および分点セットによって異なる。しかし、中性子輸送計算で用いられる分点セットでは、分点数が増加するほど式(A.3.45)は 1/4 に漸近する。

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} (w_n \mu_n) \approx \frac{1}{4} \tag{A.3.46}$$

例として、Gauss-Legendre 分点セットにおける分点数と $\frac{1}{2}\sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n$ の値の関係を表 A.3.18 に示す。表中には $\frac{1}{2}\sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n$ と 0.25(=1/4)との相対差異 (%) も示した。

表 A.3.18 Gauss-Legendre 分点における重みと方向余弦の積和

分点数	$\frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n$ (0.25 との相対差異)
2	0.28868 (15 %)
4	0.26063 (4.3 %)
8	0.25288 (1.2 %)
16	0.25076 (0.3 %)
32	0.25019 (0.08 %)
64	0.25005 (0.02 %)
100	0.25002 (0.008 %)

表より、分点数が増大するほど式(A.3.45)の値は 1/4 に漸近することが分かる。中性子輸送計算では多くの場合、分点数は 32 以上に設定されるため、式(A.3.45)は 1/4 と近似して問題ない。そのため、式(A.3.47)に示すとおり AGD において $\alpha = 1/4$ とすることで、CMFD 加速法において p-CMFD 加速法と同等の収束性を得ることができる。

$$D_i^{AGD} = D_i^{Conv} + \frac{1}{4} \Delta_i \quad (\text{A.3.47})$$

以上が p-CMFD 加速法と等価な収束性を示す拡散係数 AGD の導出である。なお、AGD は拡散理論における部分中性子流と正味中性子流の関係式からも導出可能である[4]。

最後に、p-CMFD 加速法と AGD を用いた CMFD 加速法の収束性評価例を示す。MOC において角度分割数 64、分点セットは Gauss-Legendre 分点として、散乱比 $c = 0.99$ 、均質化領域数 $p = 4$ としたときの、p-CMFD 加速法および AGD を用いた CMFD 加速法の収束性を下図に示す。ここで AGD において $\alpha = 1/4$ としている。

図より、従来の拡散係数を用いた CMFD 加速法では光学距離によってスペクトル半径が 1.0 を超えるが、AGD を用いることで収束性が向上している。また、AGD を用いる CMFD 加速法と p-CMFD 加速法は等価な収束性を示している。本結果より、AGD において $\alpha = 1/4$ とすることで p-CMFD 加速法と等価な収束性が得られることが確認できる。本結果は散乱比や均質化領域数を変化させても同様である。より詳細な収束性評価結果については、2.5.4 項を参照すること。

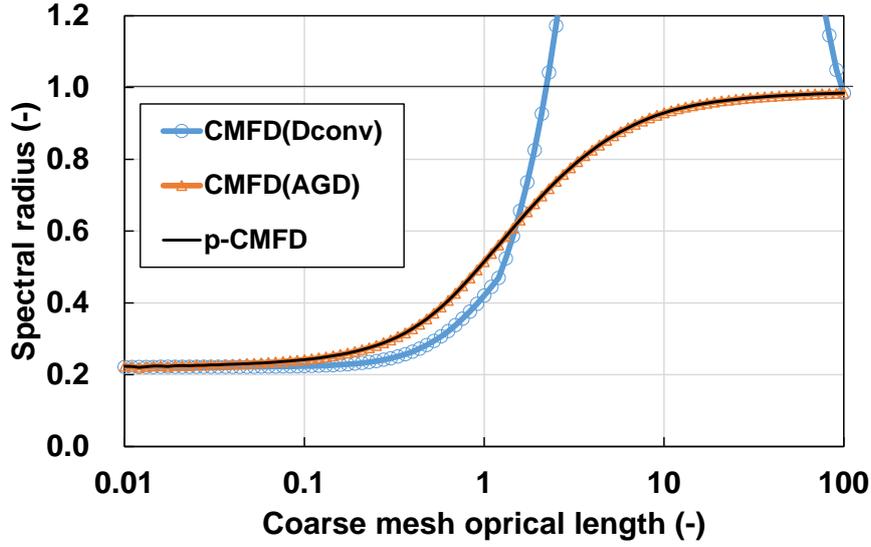


図 A.3.8 p-CMFD 加速法と AGD を用いた CMFD 加速法の収束性比較

A.4 GCMR 加速法

本節では GCMR 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式導出過程を示す [5][6]。本節でも GCMR 加速法と同様の仮定および計算手法を用いる。FS ACMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析も GCMR 加速法と概ね同様であるため、GCMR 加速法と異なる導出過程のみについて述べる。

step 1) 仮定および基礎方程式の整理

GCMR 加速法では、加速パラメータ α と補正因子 β を用いて正味中性子流を以下のとおり記述する。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\alpha_{i+\frac{1}{2}}^{-} \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{-, l+1/2} \phi_i^{l+1} = \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{+} \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} - \beta_{i+\frac{1}{2}}^{+, l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1}, \quad (\text{A.4.1})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\alpha_{i-\frac{1}{2}}^{-} \phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{-, l+1/2} \phi_{i-1}^{l+1} = \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{+} \phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} - \beta_{i-\frac{1}{2}}^{+, l+1/2} \phi_i^{l+1}. \quad (\text{A.4.2})$$

このとき加速パラメータ α は体系内のすべての領域で一定であり、式(A.4.1)および(A.4.2)に拡散理論における全中性子束と中性子流の関係式を適用して整理すると、以下のとおり中性子流差分式が求まる。なお加速パラメータ α の値は入力として与えられる。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{+, l+1/2}}{2} \phi_{i+1}^{l+1} + \frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-, l+1/2}}{2} \phi_i^{l+1} \quad (\text{A.4.3})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{+,l+1/2}}{2} \phi_i^{l+1} + \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{-,l+1/2}}{2} \phi_{i-1}^{l+1} \quad (\text{A.4.4})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

$$\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} = \frac{J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2}}{\phi_i^{l+1/2}}, \quad (\text{A.4.5})$$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}}^{+,l+1/2} = \frac{-J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2}}{\phi_{i+1}^{l+1/2}}, \quad (\text{A.4.6})$$

$$\beta_{i-\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} = \frac{J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2}}{\phi_{i-1}^{l+1/2}}, \quad (\text{A.4.7})$$

$$\beta_{i-\frac{1}{2}}^{+,l+1/2} = \frac{-J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2}}{\phi_i^{l+1/2}}, \quad (\text{A.4.8})$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2}, \quad (\text{A.4.9})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2}. \quad (\text{A.4.10})$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+1/2}, \quad (\text{A.4.11})$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+1/2}. \quad (\text{A.4.12})$$

式(A.4.3)および(A.4.4)を用いると、GCMR 加速方程式は下式のとおりとなる。

$$-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{+,l+1/2}}{2} \phi_{i+1}^{l+1} - \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{-,l+1/2}}{2} \phi_{i-1}^{l+1} + \left(\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2}}{2} + \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{+,l+1/2}}{2} + ph\Sigma_a \right) \phi_i^{l+1} = phq. \quad (\text{A.4.13})$$

その他の基礎方程式は CMFD 加速法と同様のため省略する。

step 2) 中性子束の線形近似および線形化

全中性子束および角度中性子束を解析解近傍において誤差関数で展開する。展開式は CMFD 加速同様に、式(A.2.17)–(A.2.22)を用いる。

式(A.4.5)より両辺に ϕ_{i+1}^{l+1} をかける。

$$\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} = \left(J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} \right) \frac{\phi_{i+1}^{l+1}}{\phi_i^{l+1/2}}. \quad (\text{A.4.14})$$

式(A.2.17)–(A.2.22)を用いて解析解近傍で誤差関数により展開する。

$$\begin{aligned} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} &= \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \sum_n w_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(1 + \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \right) \frac{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1})}{\frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}})}, \end{aligned} \quad (\text{A.4.15})$$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} = \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \frac{q}{\Sigma_a} + \frac{\alpha}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \sum_n w_n \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \frac{1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}}{1 + \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.4.16})$$

$$\begin{aligned} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} &= \left(\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \frac{q}{\Sigma_a} + \frac{\alpha}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \sum_n w_n \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \left(1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4.17})$$

$$\begin{aligned} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} &= \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \sum_n w_n \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_i^{l+1} \\ &\quad - \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

同様に、式(A.4.6), (A.4.7)および(A.4.8)についても同様の变形および展開を行う。

$$\begin{aligned} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{+,l+1/2} \phi_{i+1}^{l+1} &= \left(-J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i+\frac{1}{2}}^{l+1/2} \right) \frac{\phi_{i+1}^{l+1}}{\phi_{i+1}^{l+1/2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \sum_n w_n \varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} \\ &\quad - \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

$$\begin{aligned} \beta_{i-\frac{1}{2}}^{-,l+1/2} \phi_{i-1}^{l+1} &= \left(J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} + \alpha \phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+1/2} \right) \frac{\phi_{i-1}^{l+1}}{\phi_{i-1}^{l+1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} \frac{q}{\Sigma_a} \sum_n w_n \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} - \alpha \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \\ &\quad + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{A.4.20})$$

$$\begin{aligned}
\beta_{i-\frac{1}{2}}^{+,l+\frac{1}{2}}\phi_i^{l+1} &= \left(-J_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\phi_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}\right)\frac{\phi_i^{l+1}}{\phi_i^{l+1/2}} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{q}{\Sigma_a}\sum_n w_n\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+1} \\
&\quad - \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{A.4.21}$$

よって、式(A.4.18)–(A.4.21)を式(A.4.13)に代入できるようにまとめると下式のとおりである。

$$\begin{aligned}
&-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{+,l+\frac{1}{2}}}{2}\phi_{i+1}^{l+1} - \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{-,l+\frac{1}{2}}}{2}\phi_{i-1}^{l+1} + \frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{-,l+\frac{1}{2}}}{2}\phi_i^{l+1} + \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{+,l+\frac{1}{2}}}{2}\phi_i^{l+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{q}{\Sigma_a}\sum_n w_n\varepsilon\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_{i+1}^{l+1} - \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{q}{\Sigma_a}\sum_n w_n\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_{i-1}^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{q}{\Sigma_a}\sum_n w_n\varepsilon\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}\frac{q}{\Sigma_a}\sum_n w_n\varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\frac{q}{\Sigma_a}\varepsilon\zeta_i^{l+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_n w_n\mu_n\frac{q}{\Sigma_a}\left(\varepsilon\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon\xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{q}{\Sigma_a}\left(-\frac{\alpha}{2}\varepsilon\zeta_{i+1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2}\varepsilon\zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{2}\varepsilon\zeta_{i-1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2}\varepsilon\zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha\varepsilon\zeta_i^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\varepsilon\zeta_i^{l+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{A.4.22}$$

式(A.4.22)を GCMR 加速方程式(A.4.13)に代入、他の項も誤差関数で展開すると下式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& + \frac{q}{\Sigma_a} \left(-\frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \varepsilon \zeta_i^{l+1} \right. \\
& \left. - \alpha \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \frac{q}{\Sigma_a} (1 + \varepsilon \zeta_i^{l+1}) = phq, \tag{A.4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \frac{q}{\Sigma_a} \left(\varepsilon \xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\
& + \frac{q}{\Sigma_a} \left(-\frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \varepsilon \zeta_i^{l+1} \right. \\
& \left. - \alpha \varepsilon \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \right) + ph \Sigma_a \frac{q}{\Sigma_a} \varepsilon \zeta_i^{l+1} = 0, \tag{A.4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \left(\xi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \xi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2} \zeta_{i+1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{2} \zeta_{i-1}^{l+1} + \frac{\alpha}{2} \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} + \alpha \zeta_i^{l+1} - \alpha \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} \\
& + ph \Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0, \tag{A.4.25}
\end{aligned}$$

式(A.4.25)に、MOC の方程式を全立体角積分し空間均質化を行って得られる式(A.2.46)を代入して整理すると、GCMR 加速方程式は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha}{2} \zeta_{i+1}^{l+1} + \alpha \zeta_i^{l+1} - \frac{\alpha}{2} \zeta_{i-1}^{l+1} + ph \Sigma_s \zeta_i^l - ph \Sigma_t \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} \zeta_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \alpha \zeta_i^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} \zeta_{i-1}^{l+\frac{1}{2}} \\
& + ph \Sigma_a \zeta_i^{l+1} = 0, \tag{A.4.26}
\end{aligned}$$

式(A.4.26)と、CMFD 加速方程式における誤差関数の関係式(A.2.55)を比較すると、誤差関数 ζ の係数部分のみ異なる。両式が一致するとき、加速パラメータに以下の関係式が成り立つ。

$$\alpha = 2\tilde{D}^{FD} = 2 \frac{D}{ph} \tag{A.4.27}$$

式(A.4.27)は、CMFD 加速法と等価な GCMR 加速法の条件を表している。また、本結果から GCMR 加速法は CMFD 加速法を結合係数（および拡散係数）について一般化した手法であることが分かる。

step 3) フーリエ級数展開および固有値方程式の導出

式(A.4.26)は CMFD 加速法と同じ形式で記述されている。また、その他の方程式は CMFD 加速法と同様である。従って、CMFD 加速法と同様の過程で固有値方程式を導出でき、方程式の形式も CMFD と同様に記述できる。このとき固有値方程式は下式のとおりである。

$$\vec{\omega} \vec{A} = \vec{M} \vec{A}, \quad \vec{M} = (-\theta \mathbf{W} + [\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}] \mathbf{H}) \tag{A.4.28}$$

このとき θ の定義のみが以下のとおり、CMFD 加速法と異なる。その他のベクトルおよび行

列は CMFD 加速法と同様である。

$$\theta = \frac{h\Sigma_t c}{2\alpha \sin^2 pv + ph\Sigma_t(1-c)} \quad (\text{A.4.29})$$

なお α を下式のとおり与えると、A.5 節で後述する FS ACMFD 加速法と等価になる。

$$\alpha = 2\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s) \quad (\text{A.4.30})$$

ただし式(A.4.30)を用いた GCMR 加速法が FS ACMFD 加速法と等価になるのは本解析で仮定した 1 群 1 次元均質平板体系でのみである。理由は A.5 節で述べる。

式(A.4.29)では結合係数部分が加速パラメータ α で表されている。すなわち GCMR 加速法は、CMR 加速法や CMFD 加速法だけでなく、p-CMFD 加速法や計条件によっては FS ACMFD 加速法も内包している。

以上が GCMR 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出であり、式(A.4.28)および(A.4.29)が GCMR 加速法における固有値方程式である。GCMR 加速法は、CMFD 加速法において結合係数の値を加速パラメータとして入力することに等しい。GCMR 加速法の収束性と加速パラメータの関係については参考文献[5]を確認すること。

A.5 FS ACMFD 加速法

本節では FS ACMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式導出過程を示す[7][8]。本節でも CMFD 加速法と同様の仮定および計算手法を用いる。FS ACMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析も CMFD 加速法と概ね同様であるため、CMFD 加速法と異なる導出過程のみについて述べる。

FS ACMFD 加速法では、1 次元拡散方程式に基づき正味中性子流差分式を解析的に求める。正味中性子流差分式は下式で表される。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + S_{i+\frac{1}{2}}^{FS,l+1} + \hat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}), \quad (\text{A.5.1})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + S_{i-\frac{1}{2}}^{FS,l+1} + \hat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}). \quad (\text{A.5.2})$$

ここで、各変数は以下のとおりである。

$$\tilde{D}^{ACMFD} \frac{D\tau^2}{ph \sinh^2(\tau)}, \quad (\text{A.5.3})$$

$$\tau = \frac{ph}{2}\kappa, \quad (\text{A.5.4})$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_t}{D}}, \quad (\text{A.5.5})$$

$$S_{i+\frac{1}{2}}^{FS,l+1} = S_{i-\frac{1}{2}}^{FS,l+1} = -\tilde{D}^{Ana}\gamma q + \tilde{D}^{Ana}\gamma q = 0. \quad (\text{A.5.6})$$

$$\gamma = \frac{-ph\kappa + \sinh(ph\kappa)}{ph\kappa\Sigma_t} \quad (\text{A.5.7})$$

式(A.5.6)より、FS ACMFD 加速法における定数項 S^{FS} は常に 0 となる。従って以下のとおり整理できる。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \hat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) \quad (\text{A.5.8})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \hat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}) \quad (\text{A.5.9})$$

このとき、各変数は以下のとおりである。

$$\hat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{ACMFD}(\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_i^{l+\frac{1}{2}})}{\phi_{i+1}^{l+\frac{1}{2}} + \phi_i^{l+\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.5.10})$$

$$\hat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{J_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \tilde{D}^{ACMFD}(\phi_i^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1}^{l+\frac{1}{2}})}{\phi_i^{l+\frac{1}{2}} + \phi_{i-1}^{l+\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.5.11})$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.5.12})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_n w_n \mu_n \psi_{n,i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.5.13})$$

式(A.5.8)および(A.5.9)を用いると、FS ACMFD 加速方程式は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} & -\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \hat{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}) \\ & + \tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) - \hat{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}) \\ & + ph\Sigma_a\phi_i^{l+1} = phq, \end{aligned} \quad (\text{A.5.14})$$

式(A.5.14)と CMFD 加速方程式である式(A.2.15)を比較すると、式(A.2.15)における結合係数 \tilde{D}^{FD} を $\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)$ に置き換えると、式(A.5.14)となる。その他の方程式は CMFD 加速法と同様である。従って、FS ACMFD 加速法における固有値方程式の導出過程は CMFD 加速法と同様であり、結合係数を変更するだけでよい。このとき、結合係数には以下の値を用いる。

$$\tilde{D}^{ACMFD}\gamma\Sigma_s = \frac{D\tau^2}{ph\sinh^2(\tau)} \left(1 + \frac{-ph\kappa + \sinh(ph\kappa)}{ph\kappa\Sigma_t} \Sigma_s \right) \quad (\text{A.5.15})$$

以上より、FS ACMFD 加速法における固有値方程式は以下のとおり記述できる。なお導

出過程は CMFD 加速法と同様のため省略する。

$$\omega \vec{A} = \vec{M} \vec{A}, \quad \vec{M} = (-\theta \mathbf{W} + [\theta \mathbf{W} + \mathbf{I}] \mathbf{H}). \quad (\text{A.5.16})$$

このとき、FS ACMFD 加速法では θ の分母に含まれる結合係数項のみが下式のとおり異なる。その他のベクトルおよび行列は CMFD 加速法と同様である。

$$\theta = \frac{h \Sigma_t c}{4 \tilde{D}^{ACMFD} (1 + \gamma \Sigma_s) \sin^2 pv + ph \Sigma_t (1 - c)}. \quad (\text{A.5.17})$$

以上が FS ACMFD 加速法の固有値方程式の導出過程である。

なお、本計算条件（1 群 1 次元均質平板体系）では CMFD 加速法や GCMR 加速法において式(A.2.15)に基づく結合係数（加速パラメータ）を用いれば FS ACMFD 加速法と等価な収束性を示す。しかし、多群多次元非均質体系では式(A.2.15)を用いても FS ACMFD 加速法と完全に等価とならない。これは、固定源の非均質性により式(A.5.6)に示す S^{FS} が 0 とならないことや、式(A.2.15)に巨視的断面積の値が含まれることに起因する。

次に、FS 近似を明示的に仮定しない ACMFD 加速法の線形化フーリエ解析を行う。本解析においても CMFD 加速法と同様の仮定を適用し、CMFD 加速法と異なる導出についてのみ示す。

ACMFD 加速法における正味中性子流差分式は以下のとおりである。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD} (\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + S_{i+\frac{1}{2}}^{FS,l+1} + \tilde{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}), \quad (\text{A.5.18})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD} (\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + S_{i-\frac{1}{2}}^{FS,l+1} + \tilde{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}). \quad (\text{A.5.19})$$

ここで、以下に示す変数のみは FS ACMFD 加速法と異なる。その他の変数は FS ACMFD 加速法と同様である。

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}}. \quad (\text{A.5.20})$$

このとき ACMFD 加速法においても、以下の式が成立する。

$$S_{i+\frac{1}{2}}^{FS,l+1} = S_{i-\frac{1}{2}}^{FS,l+1} = -\tilde{D}^{Ana} \gamma q + \tilde{D}^{Ana} \gamma q = 0. \quad (\text{A.5.21})$$

従って、式(A.5.18)および(A.5.19)は以下のとおり記述できる。

$$J_{i+\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD} (\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \tilde{D}_{i+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (\phi_{i+1}^{l+1} + \phi_i^{l+1}), \quad (\text{A.5.22})$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^{l+1} = -\tilde{D}^{ACMFD} (\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \tilde{D}_{i-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (\phi_i^{l+1} + \phi_{i-1}^{l+1}). \quad (\text{A.5.23})$$

この正味中性子流差分式は、CMFD 加速法および FS ACMFD 加速法と同じ形式であり、結

合係数の値のみが異なる。CMFD 加速法では \tilde{D}^{FD} 、FS ACMFD 加速法では $\tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s)$ 、ACMFD 加速法では \tilde{D}^{ACMFD} である。従って、以降の導出過程は CMFD 加速法と同様であり、導出される固有値方程式も CMFD 加速法と同様である。

$$\omega\vec{A} = \vec{M}\vec{A}, \quad \mathbf{M} = (-\theta\mathbf{W} + [\theta\mathbf{W} + \mathbf{I}]\mathbf{H}). \quad (\text{A.5.24})$$

ただし、 θ に含まれる結合係数項が以下のとおりとなる。

$$\theta = \frac{h\Sigma_t c}{4\tilde{D}^{ACMFD} \sin^2 pv + ph\Sigma_t(1 - c)}. \quad (\text{A.5.25})$$

以上が、ACMFD 加速法に対する線形化フーリエ解析による固有値方程式の導出過程である。本導出から分かるとおり、CMFD 加速法の固有値方程式において、結合係数の値を変えることで FS ACMFD 加速法と ACMFD 加速法の固有値方程式を記述することができる。FS ACMFD 加速法の収束性については 4.4.1 項を確認すること。

A.6 本章のまとめ

本章では、線形化フーリエ解析による非線形収束加速法の反復演算に相当する固有値方程式の導出過程を述べた。線形化フーリエ解析では、中性子束を解析解近傍で誤差関数の一次式で展開する。このとき誤差関数の高次項は無視できるほど十分小さいとして、方程式を線形化する。そして誤差関数をフーリエ級数展開し整理することで、1反復相当の演算を表す固有値方程式を求めることができる。固有値方程式の固有ベクトルは中性子束誤差関数のフーリエ級数展開係数、固有値が1反復当たりの誤差低減率を表している。すなわち固有値方程式における行列の固有値を計算することで、非線形収束加速法の解析的な収束率（スペクトル半径）を計算することができる。

本章では、中性子輸送計算に対して適用される非線形収束加速法である CMFD 加速法、p-CMFD 加速法、GCMR 加速法、FS ACMFD 加速法に対してそれぞれ線形化フーリエ解析を適用し固有値方程式を導出した。また導出された固有値方程式に基づき、CMFD 加速法において p-CMFD 加速法と等価な収束性を示す AGD の定数値を導出した。

いずれの加速法でも、式(A.6.1)の形式で表される固有値方程式が得られた。

$$\vec{A} = \mathbf{M}\vec{A}, \quad \mathbf{M} = (-\theta\mathbf{W} + [\theta\mathbf{W} + \mathbf{I}]\mathbf{H}). \quad (\text{A.6.1})$$

このとき、各加速法で θ に含まれる結合係数（拡散係数）の定義が以下のとおり異なる。

$$\theta = \frac{h\Sigma_t c}{4\tilde{D} \sin^2 pv + ph\Sigma_t(1-c)}, \quad (\text{A.6.2})$$

$$\tilde{D} = \begin{cases} \tilde{D}^{FD}, & \text{if CMFD} \\ \tilde{D}^{FD} + \frac{1}{2} \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n, & \text{if p-CMFD} \\ \alpha, & \text{if GCMR} \\ \tilde{D}^{ACMFD}(1 + \gamma\Sigma_s), & \text{if FS ACMFD} \end{cases}. \quad (\text{A.6.3})$$

各変数の定義は各加速法について述べた節をそれぞれ参照すること。

A.7 参考文献

- [1]. A. YAMAMOTO, T. ENDO, and A. GIHO, "Transport Consistent Diffusion Coefficient for CMFD Acceleration and Comparison of Convergence Properties," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **56**, 716–723 (2019); <https://doi.org/10.1080/00223131.2019.1618405>.
- [2]. N. Z. CHO, G. S. LEE, and C. J. PARK, "Partial Current-Based CMFD Acceleration of the 2D/1D Fusion Method for 3D Whole-Core Transport Calculations," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **88**, 594 (2003).
- [3]. H. T. KIM, and Y. KIM, "Convergence Studies on Nonlinear Coarse Mesh Finite Difference Accelerations for Neutron Transport Analysis," *Nucl. Sci. Eng.*, **191**, 136–149 (2018); <https://doi.org/10.1080/00295639.2018.1463747>.
- [4]. M. JARRET, B. KOCHUNAS, A. ZHU, and T. DOWNAR, "Analysis of Stabilization Techniques for CMFD Acceleration of Neutron Transport Problems," *Nucl. Sci. Eng.*, **184**, 208–227 (2016); <https://doi.org/10.13182/NSE16-51>.
- [5]. A. YAMAMOTO et al., "Convergence Improvement of Coarse Mesh Rebalance Method for Neutron Transport Calculations," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, 781–789 (2004); <https://doi.org/10.1080/18811248.2004.9715547>.
- [6]. A. YAMAMOTO, "Generalized Coarse-Mesh Rebalance Method for Acceleration of Neutron Transport Calculations," *Nucl. Sci. Eng.*, **151**, 274 (2005); <https://doi.org/10.13182/NSE151-274>.
- [7]. Y. OSHIMA, A. YAMAMOTO, and T. ENDO, "S2 Consistent Analytic CMFD Acceleration for Method of Characteristics," *Proc. M&C 2021*, Online, October 3–7, 1840-1849 (2021).
- [8]. Y. OSHIMA, T. ENDO, and A. YAMAMOTO, "Impact of Angular and Spatial Source Distribution Approximations on Convergence Performance of Nonlinear Acceleration Methods for MOC in Slab Geometry," *Nucl. Sci. Eng.* (2021); <https://doi.org/10.1080/00295639.2021.1982549>.

Appendix B 中性子束傾きを更新する LS ACMFD 加速法

B.1 本章の概要

本章では、加速計算中に中性子束傾きを更新する LS ACMFD 加速法 (LS ACMFD-D) の計算方法と収束性評価について述べる。第 4 章 4.3.3 項では LS ACMFD 加速法の計算理論と収束性評価結果について述べた。LS ACMFD 加速法では、詳細計算に基づく粗メッシュ全中性子束一次展開係数 (傾き) を、加速計算で更新された粗メッシュ平均全中性子束を用いて更新する。このとき加速計算中に一次展開係数の値を直接的に計算することはしない。対して、LS ACMFD 加速計算の外部反復毎に拡散方程式の解析解を利用して全中性子束一次展開係数の値を直接的に更新することも可能である。そこで本論文では、全中性子束一次展開係数の値を直接的に更新する方法を LS ACMFD-D 加速法 (LS ACMFD acceleration for Directly updating the 1st order expansion coefficient of scalar flux in a coarse mesh) と称し、本章ではその計算理論と収束性評価について述べる。

LS ACMFD 加速法では、空間均質化において重み付き残差法を用いて全中性子束一次展開係数を計算し、拡散方程式の解析解を利用して正味中性子流差分式を求める。このとき得られる全中性子束の解析解に対して重み付き残差法を適用することで、全中性子束一次展開係数の計算を行うことができる。しかし、単に重み付き残差法による計算を行っても、詳細計算との計算モデルの差異 (輸送方程式と拡散方程式) の差異に起因する離散化誤差により、領域内反応率が保存されず加速計算が詳細計算の解を再現できない。そこで、LS ACMFD-D 加速法では、全中性子束一次展開係数に対する補正係数を新たに定義し、詳細計算の全中性子束一次展開係数を保存する。これにより、全中性子束一次展開係数に基づく領域内反応率分布を保存し、加速計算による収束加速を実現する。

本章の構成を以下に示す。B.2 節では LS ACMFD-D 加速法の計算方法について述べる。B.3 節では 1 群 1 次元平板体系における数値計算による収束性評価について述べる。本節では、第 4 章 と同様の計算体系および計算条件を用い、LS ACMFD 加速法と収束性を比較する。最後に、B.4 節には本章のまとめを示す。

B.2 計算方法

本節では、LS ACMFD-D 加速法の計算方法を示す。LS ACMFD-D 加速法の計算方法は、4.3.3 項の LS ACMFD 加速法と概ね同様であり、全中性子束一次展開係数の更新方法のみが異なる。そこで本節では、LS ACMFD-D 加速法における全中性子束一次展開係数の更新方法について述べる。なお、本節では簡単のため 1 次元平板体系固定源計算を仮定する。

ここで詳細計算として LS MOC を考えると、LS MOC および LS ACMFD 加速では中性子束 1 次展開係数を重み付き残差法によって計算する。このとき、LS MOC では輸送方程式から導出される角度中性子束の解析解を基に、LS ACMFD 加速法では一次元拡散方程式の解析解を基に、中性子束の高次展開係数をそれぞれ計算することができる。このとき、輸送方程式と拡散方程式の間にある離散化誤差の差異に起因して、展開係数はそれぞれ異なる値に計算される。従って、LS ACMFD 加速で拡散方程式の解析解を単に多項式フィッティングしても輸送計算の一次展開係数を再現できず、収束加速として機能しない。

そこで加速計算で得られる中性子束一次展開係数が、詳細計算で得られる値を再現するように、中性子束一次展開係数補正係数 $\hat{\phi}$ から成る補正項を導入する。 $\hat{\phi}$ は「空間均質化で求まる（詳細計算に基づく）粗メッシュ中性子束一次展開係数」と「LS ACMFD-D 加速計算で得られる粗メッシュ中性子束一次展開係数」を一致させる役割を有する。これは CMFD 加速における中性子流補正係数 \hat{D} が、粗メッシュ境界正味中性子流を保存することと同様の考えに基づいている。

まず、中性子束一次展開係数補正係数 $\hat{\phi}$ の計算手順を以下に示す。

step 4) 空間均質化および重み付き残差法により、詳細計算に基づく粗メッシュ中性子束 1 次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{fine}$ を計算する。

step 5) ノード問題を解き、拡散方程式における全中性子束の解析解を求める。

step 6) 拡散方程式における全中性子束の解析解に重み付き残差法を適用し、多項式展開したときの展開係数（1 次展開係数） $\phi_{x,g,i}^{coarse,\ell}$ を求める。

step 7) Step 1)と step 3)で計算された展開係数の差を $\hat{\phi}$ として計算する。

step 8) 上記手順 1-4 を全ノードについて実施する。

$\hat{\phi}$ の値は中性子流補正係数 \hat{D} 同様に、加速計算開始前に計算され加速計算中は一定値として用いる。以下に、各手順における具体的な計算方法を示す。

まず空間均質化を行い、詳細計算に基づく粗メッシュ中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{fine}$ を計算する。このとき、詳細メッシュ全中性子束分布に対して重み付き残差法を適用することで粗メッシュにおける全中性子束分布を求める。LS MOC 計算により、詳細メッシュ全中性子束分布 $\phi_{g,k}(x)$ は式(B.2.4)のとおり表される。ここでは詳細メッシュ中央で詳細メッシュ平均全中性子束の値をとるように座標を定義している。

$$\phi_{g,k}(x) = \phi_{g,k} + \left(x - \frac{\Delta x_k}{2}\right) \phi_{x,g,k}, \quad 0 \leq x \leq \Delta x_k \quad (\text{B.2.4})$$

ここで k は詳細メッシュのインデックス、 $\phi_{x,g,k}$ は全中性子束一次展開係数である。

このとき粗メッシュ内全中性子束分布を式(B.2.5)のとおり線形近似することを考える。

$$\phi_{g,i}(x) = \phi_{g,i} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}, \quad (\text{B.2.5})$$

そこで、粗メッシュ i 内の全中性子束分布に対して重み付き残差法を適用する。すなわち以下の式(B.2.6)および(B.2.7)が成立するとして、粗メッシュ内全中性子束分布 ($\phi_{g,i}^{homo}$ および $\phi_{x,g,i}^{homo}$ の値) を計算する。

$$\int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{homo}(x) dx = \int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{fine}(x) dx, \quad (\text{B.2.6})$$

$$\int_0^{\Delta x_i} w(x) \phi_{g,i}^{homo}(x) dx = \int_0^{\Delta x_i} w(x) \phi_{g,i}^{fine}(x) dx, \quad (\text{B.2.7})$$

ここで上付き文字 $fine$ は詳細計算で求まる値、 $homo$ は詳細計算の反復途中解を空間均質化して求まる値であることを表している。また $w(x)$ は重み関数であり、下式を用いる。

$$w_1(x) = \frac{x - \Delta x_i}{\Delta x_i}, \quad 0 \leq x \leq \Delta x_i. \quad (\text{B.2.8})$$

式(B.2.6)を整理すると式(B.2.9)のとおりとなる。この式は一般的に空間均質化で用いられる式と同様である。これにより空間均質化に基づく粗メッシュ平均全中性子束 $\phi_{g,i}^{homo}$ を計算できる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{homo} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}^{homo} dx &= \sum_{k \in i}^p \int_0^{\Delta x_k} \phi_{g,k}^{fine} + \left(x' - \frac{\Delta x_k}{2}\right) \phi_{x,g,k}^{fine} dx', \\ \phi_{g,i}^{homo} \Delta x_i &= \sum_{k \in i}^p \phi_{g,k}^{fine} \Delta x_k, \\ \phi_{g,i}^{homo} &= \frac{\sum_{k \in i}^p \phi_{g,k}^{fine} \Delta x_k}{\Delta x_i}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

式(B.2.7)を整理すると式(B.2.10)のとおりとなる。下式を用いることで、粗メッシュ内全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{homo}$ を計算することができる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x_i} \left(\frac{x - \Delta x_i}{\Delta x_i}\right) \left(\phi_{g,i}^{homo} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}^{homo}\right) dx \\ = \sum_{k \in i}^p \int_0^{\Delta x_k} \left(\frac{x + x_{k-1} - \Delta x_i}{\Delta x_i}\right) \left(\phi_{g,k}^{fine} + \left(x' - \frac{\Delta x_k}{2}\right) \phi_{x,g,k}^{fine}\right) dx', \\ -\frac{\Delta x_i}{2} \phi_{g,i}^{homo} + \frac{(\Delta x_i)^2}{12} \phi_{x,g,i}^{homo} \\ = \frac{1}{12 \Delta x_i} \sum_{k \in i}^p \Delta x_k (6 \phi_{g,k}^{fine} (2x_{k-1} - 2\Delta x_i + \Delta x_k) + (\Delta x_k)^2 \phi_{x,g,k}^{fine}), \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

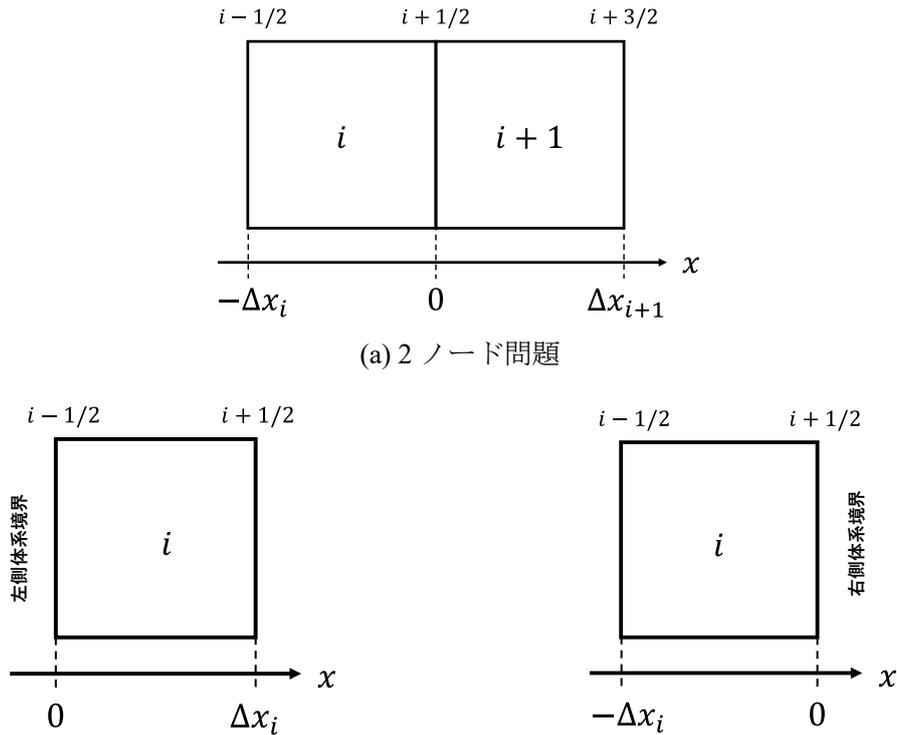
$$\phi_{x,g,i}^{homo} = \frac{6}{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{homo} + \frac{1}{(\Delta x_i)^3} \sum_{k \in i}^p \Delta x_k (6\phi_{g,k}^{fine} (2x_{k-1} - 2\Delta x_i + \Delta x_k) + (\Delta x_k)^2 \phi_{x,g,k}^{fine})$$

なお、 $p = 1$ のとき $\phi_{g,i}^{homo} = \phi_{g,k}^{fine}$ 、 $\phi_{x,g,i}^{homo} = \phi_{x,g,k}^{fine}$ となる。以上より、空間均質化および重み付き残差法により、空間均質化に基づく粗メッシュ内全中性子束分布 $\phi_{g,i}^{homo}$ を計算できる。

次に、空間均質化で求まる粗メッシュ内全中性子束分布 $\phi_{g,i}^{homo}$ から粗メッシュ内中性子源分布を計算する。このとき、中性子源は式(B.2.11)に示す関数形で表す。そのため、中性子束から中性子源を求める際に座標変換に注意すること。粗メッシュ内の座標は、2 ノード問題におけるノード位置や体系境界メッシュか否かによって異なる。

$$q_{g,i}(x) = q_{g,i} + q_{x,g,i}x. \quad (\text{B.2.11})$$

次に 2 ノードもしくは 1 ノード問題を考え、拡散方程式の解析解を求める。各ノード問題の模式図および座標系を以下に示す。



(b) x-側が体系境界のときの 1 ノード問題 (c) x+側が体系境界のときの 1 ノード問題

図 B.2.9 2 ノード問題および 1 ノード問題の座標系

2 ノード問題において、粗メッシュ i および $i+1$ における一次元拡散方程式の解析解 $\phi_{g,i}^{Ana}(x)$ 、 $\phi_{g,i+1}^{Ana}(x)$ は式(B.2.12)および(B.2.13)のとおりとなる。

$$\phi_{g,i}^{Ana}(x) = A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i}x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i}x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}}x, \quad (\text{B.2.12})$$

$$\phi_{g,i+1}^{Ana}(x) = A_{g,i+1} \exp(\kappa_{g,i+1}x) + B_{g,i+1} \exp(-\kappa_{g,i+1}x) + \frac{q_{g,i+1}}{\Sigma_{t,g,i+1}} + \frac{q_{x,g,i+1}}{\Sigma_{t,g,i+1}}x, \quad (\text{B.2.13})$$

ここで上付き文字 Ana は拡散方程式を解析的に解くことで求まる値であることを表している。他変数の定義は4.3.2項と同様である。ここで未定定数 $A_{g,i}, B_{g,i}, A_{g,i+1}, B_{g,i+1}$ を求めるために、式(B.2.14)–(B.2.17)の制約条件を考える。この制約条件は4.3.2項で述べたものと同様である。

$$\phi_{g,i}(0) = \phi_{g,i+1}(0), \quad (\text{B.2.14})$$

$$-D_{g,i} \left. \frac{d\phi_{g,i}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{g,i+1} \left. \frac{d\phi_{g,i+1}(x)}{dx} \right|_{x=0}, \quad (\text{B.2.15})$$

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{-\Delta x_i}^0 \phi_{g,i}(x) dx = \phi_{g,i}^{homo}, \quad (\text{B.2.16})$$

$$\frac{1}{\Delta x_{i+1}} \int_0^{\Delta x_{i+1}} \phi_{g,i+1}(x) dx = \phi_{g,i+1}^{homo}. \quad (\text{B.2.17})$$

式(B.2.12), (B.2.13)の解析解および式(B.2.14)–(B.2.17)の制約条件を用いて、各未定定数は図B.2.10 のとおり求めることができる。なお1ノード問題でも同様の考えで解析解を計算できる。本計算は複雑なため、*Mathematica*を用いて計算を実行した。これより、拡散方程式に基づく粗メッシュ内全中性子束の解析解を求めることができる。

```

(* 2-node problem *)
flux0[x_] := A0 * Sinh[tau0 * 2 / L0 * x] + B0 * Cosh[tau0 * 2 / L0 * x] + q10 * x + q00
flux1[x_] := A1 * Sinh[tau1 * 2 / L1 * x] + B1 * Cosh[tau1 * 2 / L1 * x] + q11 * x + q01
FullSimplify[Solve[{
  DF0 * flux0[0] == DF1 * flux1[0],
  (-D0 * D[flux0[x], x] /. x -> 0) == (-D1 * D[flux1[x], x] /. x -> 0),
  Integrate[flux0[x], {x, -L0, 0}] / L0 == FF0,
  Integrate[flux1[x], {x, 0, L1}] / L1 == FF1}, {A0, B0, A1, B1}]]
Out[ ] = {{A0 -> -((L0 (D1 DF0 (2 FF0 - 2 q00 + L0 q10) tau0 tau1 Sinh[2 tau1] +
  Sinh[2 tau0] (DF1 L1 (D0 q10 - D1 q11) Sinh[tau1]^2 +
  D1 tau1 (DF1 (-2 FF1 + 2 q01 + L1 q11) tau1 + (DF0 q00 - DF1 q01) Sinh[2 tau1])))) /
  (2 (D0 DF1 L1 tau0 Sinh[2 tau0] Sinh[tau1]^2 + D1 DF0 L0 tau1 Sinh[tau0]^2 Sinh[2 tau1]))),
  B0 -> (Csch[2 tau0] (D0 DF1 L1 (2 FF0 - 2 q00 + L0 q10) tau0^2 - L0 (DF1 L1 (D0 q10 - D1 q11) +
  D1 tau1 (2 (DF0 q00 - DF1 q01) Coth[tau1] + DF1 (-2 FF1 + 2 q01 + L1 q11) tau1 Csch[tau1]^2))
  Sinh[tau0]^2)) / (D0 DF1 L1 tau0 + D1 DF0 L0 tau1 Coth[tau1] * Tanh[tau0]),
  A1 -> -((DF0 L1 (D0 (2 FF0 - 2 q00 + L0 q10) tau0^2 + L0 (-D0 q10 + D1 q11) Sinh[tau0]^2) Sinh[2 tau1] +
  D0 L1 tau0 Sinh[2 tau0] (DF1 (-2 FF1 + 2 q01 + L1 q11) tau1 + (DF0 q00 - DF1 q01) Sinh[2 tau1])) /
  (2 (D0 DF1 L1 tau0 Sinh[2 tau0] Sinh[tau1]^2 + D1 DF0 L0 tau1 Sinh[tau0]^2 Sinh[2 tau1]))),
  B1 -> (D0 L1 tau0 (2 DF0 q00 - 2 DF1 q01 + DF0 (2 FF0 - 2 q00 + L0 q10) tau0 Csch[tau0] * Sech[tau0]) -
  DF0 L0 (L1 (D0 q10 - D1 q11) + D1 (-2 FF1 + 2 q01 + L1 q11) tau1^2 Csch[tau1]^2) Tanh[tau0]) /
  (2 (D0 DF1 L1 tau0 + D1 DF0 L0 tau1 Coth[tau1] * Tanh[tau0]))}}

```

(a) 2 ノード問題における未定定数の解

```

(* 1-node problem (x= boundary) *)
FullSimplify[Solve[{-D1 * (D[flux1[x], x] /. x -> 0) == -DAns * FF1 + S + DCCR * FF1, Integrate[flux1[x], {x, 0, L1}] / L1 == FF1}, {A1, B1}]]
(* 1-node problem (x= boundary) *)
FullSimplify[Solve[{-D0 * (D[flux0[x], x] /. x -> 0) == DAns * FF0 + S + DCCR * FF0, Integrate[flux0[x], {x, -L0, 0}] / L0 == FF0}, {A0, B0}]]
Out[ ] = {{A1 -> (L1 (DAns * FF1 - DCCR * FF1 - D1 q11 + S) - Csch[2 tau1] (D1 (2 FF1 - 2 q01 - L1 q11) tau1^2 + L1 (DAns * FF1 - DCCR * FF1 - D1 q11 + S) Sinh[tau1]^2)) /
  (2 D1 tau1), B1 -> (Csch[2 tau1] (D0 (2 FF0 - 2 q00 - L0 q10) tau0^2 - L0 (DAns - DCCR) * FF0 - D0 q10 + S) Sinh[tau0]^2) /
  (D0 tau0)},
  {A0 -> (L0 (DAns - DCCR) * FF0 - D0 q10 + S) - Csch[2 tau0] (D0 (2 FF0 - 2 q00 - L0 q10) tau0^2 - L0 (DAns - DCCR) * FF0 - D0 q10 + S) Sinh[tau0]^2) /
  (2 D0 tau0), B0 -> (Csch[2 tau0] (D0 (2 FF0 - 2 q00 - L0 q10) tau0^2 - L0 (DAns - DCCR) * FF0 - D0 q10 + S) Sinh[tau0]^2) /
  (D0 tau0)}}

```

(b) 1 ノード問題（体系左・右端境界）における未定定数の解

図 B.2.10 各ノード問題における未定定数の解析解

次に、拡散方程式から求まる粗メッシュ内全中性子束分布の解析解に対して重み付き残差法を適用し、粗メッシュ内全中性子束を1次関数 $\phi_{g,i}^{\ell=0}(x)$ で表す。このときメッシュ内の座標によって関数形を式(B.2.18)のとおり変化させる。いずれもメッシュ中央が領域平均全中性子束をとるように座標を設定している。

$$\phi_{g,i}^{\ell=0}(x) = \begin{cases} \phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0}, & 0 \leq x \leq \Delta x_i \\ \phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x + \frac{\Delta x_i}{2}\right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0}, & -\Delta x_i \leq x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.18})$$

ここで、 $\phi_{g,i}^{\ell=0}$ 、 $\phi_{x,g,i}^{\ell=0}$ は拡散方程式の解析解に対する重み付き残差法によって計算したい粗メッシュ平均全中性子束および全中性子束一次展開係数である。 ℓ はLS ACMFD-D 加速法の外部反復回数を表しており、加速計算前では $\ell = 0$ とする。粗メッシュ内の座標は、2 ノード問題におけるメッシュ位置（左側か右側）もしくは体系端の1 ノード問題によって異なる。

次に重み付き残差法を適用し、式(B.2.18)の展開係数をそれぞれ求める。このとき、メッシュ内座標によって計算式が変化するため、各座標系における計算式を以下に示す。

● $0 \leq x \leq \Delta x_i$ の場合 (2 ノード問題右側ノード、1 ノード問題 (体系右端境界))

ここでは以下の式(B.2.19)および(B.2.20)が成立するとして、粗メッシュ内全中性子束一次関数を計算する。

$$\int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{\ell=0}(x) dx = \int_0^{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{Ana}(x) dx, \quad (\text{B.2.19})$$

$$\int_0^{\Delta x_i} w(x) \phi_{g,i}^{\ell=0}(x) dx = \int_0^{\Delta x_i} w(x) \phi_{g,i}^{Ana}(x) dx, \quad (\text{B.2.20})$$

式(B.2.19)式を整理すると式(B.2.21)のとおりとなる。式(B.2.21)より、粗メッシュ平均全中性子束は空間均質化で得られた値に等しい。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta x_i} \left(\phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2} \right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0} \right) dx \\ &= \int_0^{\Delta x_i} \left(A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i} x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i} x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} x \right) dx, \quad (\text{B.2.21}) \\ & \phi_{g,i}^{\ell=0} = \phi_{g,i}^{homo} \end{aligned}$$

式(B.2.20)を整理すると式(B.2.22)のとおりとなる。これにより一次展開係数を計算できる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta x_i} \left(\frac{x - \Delta x_i}{\Delta x_i} \right) \left(\phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x - \frac{\Delta x_i}{2} \right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0} \right) dx \\ &= \int_0^{\Delta x_i} \left(\frac{x - \Delta x_i}{\Delta x_i} \right) \left(A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i} x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i} x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} x \right) dx, \quad (\text{B.2.22}) \\ \phi_{x,g,i}^{\ell=0} &= \frac{6}{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{homo} + \frac{12A_{g,i}}{(\kappa_{g,i})^2 (\Delta x_i)^3} (\exp(-\kappa_{g,i} \Delta x_i) + \kappa_{g,i} \Delta x_i \exp(-\kappa_{g,i} \Delta x_i) - 1) \\ & \quad + \frac{12B_{g,i}}{(\kappa_{g,i})^2 (\Delta x_i)^3} (\exp(\kappa_{g,i} \Delta x_i) - \kappa_{g,i} \Delta x_i \exp(\kappa_{g,i} \Delta x_i) - 1) \\ & \quad - \frac{6q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i} - \frac{2q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} \end{aligned}$$

● $-\Delta x_i \leq x \leq 0$ の場合 (2 ノード問題左側ノード、1 ノード問題 (体系左端境界))

ここでは以下の式(B.2.23)および(B.2.24)が成立するとして、粗メッシュ内全中性子束一次関数を計算する。

$$\int_{-\Delta x_i}^0 \phi_{g,i}^{\ell=0}(x) dx = \int_{-\Delta x_i}^0 \phi_{g,i}^{Ana}(x) dx, \quad (\text{B.2.23})$$

$$\int_{-\Delta x_i}^0 w(x) \phi_{g,i}^{\ell=0}(x) dx = \int_{-\Delta x_i}^0 w(x) \phi_{g,i}^{Ana}(x) dx, \quad (\text{B.2.24})$$

ここで重み関数 $w(x)$ は定義域の変化により式(B.2.25)のとおり表される。

$$w(x) = \frac{x}{\Delta x_i}, \quad -\Delta x_i \leq x \leq 0. \quad (\text{B.2.25})$$

式(B.2.23)を整理すると式(B.2.26)のとおりとなる。下式より、粗メッシュ平均全中性子束は空間均質化で得られた値に等しい。

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta x_i}^0 \left(\phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x + \frac{\Delta x_i}{2} \right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0} \right) dx \\ &= \int_{-\Delta x_i}^0 \left(A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i} x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i} x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} x \right) dx, \quad (\text{B.2.26}) \\ & \phi_{g,i}^{\ell=0} = \phi_{g,i}^{homo}. \end{aligned}$$

式(B.2.24)を成立すると式(B.2.27)のとおりとなる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta x_i}^0 \left(\frac{x}{\Delta x_i} \right) \left(\phi_{g,i}^{\ell=0} + \left(x + \frac{\Delta x_i}{2} \right) \phi_{x,g,i}^{\ell=0} \right) dx \\ &= \int_{-\Delta x_i}^0 \left(\frac{x}{\Delta x_i} \right) \left(A_{g,i} \exp(\kappa_{g,i} x) + B_{g,i} \exp(-\kappa_{g,i} x) + \frac{q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}} x \right) dx, \quad (\text{B.2.27}) \\ \phi_{x,g,i}^{\ell=0} &= \frac{6}{\Delta x_i} \phi_{g,i}^{homo} + \frac{12A_{g,i}}{(\kappa_{g,i})^2 (\Delta x_i)^3} (\exp(-\kappa_{g,i} \Delta x_i) + \kappa_{g,i} \Delta x_i \exp(-\kappa_{g,i} \Delta x_i) - 1) \\ & \quad + \frac{12B_{g,i}}{(\kappa_{g,i})^2 (\Delta x_i)^3} (\exp(\kappa_{g,i} \Delta x_i) - \kappa_{g,i} \Delta x_i \exp(\kappa_{g,i} \Delta x_i) - 1) \\ & \quad - \frac{6q_{g,i}}{\Sigma_{t,g,i} \Delta x_i} + \frac{4q_{x,g,i}}{\Sigma_{t,g,i}}. \end{aligned}$$

以上より、加速計算前における拡散方程式の解析解に重み付き残差法を適用して得られる粗メッシュ内全中性子束分布 $\phi_{g,i}^{\ell=0}(x)$ が求まる。このとき、計算される粗メッシュ全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{\ell=0}$ の値は、空間均質化によって求まる粗メッシュ全中性子束一次展開係数の値と一致しない。

$$\phi_{x,g,i}^{homo} \neq \phi_{x,g,i}^{\ell=0}. \quad (\text{B.2.28})$$

これは、輸送方程式から求まる全中性子束分布を重み付き残差法により線形近似したときの離散化誤差と、拡散方程式から求まる全中性子束分布を重み付き残差法により線形近似したときの離散化誤差が一致しないためである。そこで、これらの値の差異を全中性子束一次展開係数補正係数 $\hat{\phi}_{g,i}$ として、下式のとおり計算する。

$$\hat{\phi}_{g,i} = \phi_{x,g,i}^{homo} - \phi_{x,g,i}^{\ell=0} \quad (\text{B.2.29})$$

そして、LS ACMFD-D 加速計算中では、反復毎に重み付き残差法によって更新された全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{\ell,WR}$ に補正係数 $\hat{\phi}_{g,i}$ を加えた値を、LS ACMFD-D 加速計算における外部反復 ℓ 回後の粗メッシュ全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{\ell}$ として用いる。

$$\phi_{x,g,i}^{\ell} = \phi_{x,g,i}^{\ell,WR} + \hat{\phi}_{g,i} \quad (\text{B.2.30})$$

同様に中性子源も式(B.2.30)で表される値を用いて更新する。以上が、中性子束一次展開係数補正係数の計算方法である。なお本手法は中性子束を任意の次数で展開する場合にも適用可能である。その場合は、展開次数の数だけ補正係数を定義する必要がある。なお、詳細計算モデルと拡散計算 (LS ACMFD-D) モデルの系統的な差異に起因して、詳細計算が収束しても補正係数 $\hat{\phi}_{g,i}$ は 0 にはならない。また、 $\hat{\phi}_{g,i}$ とは別に、正味中性子流補正係数 \hat{D} は LS ACMFD 加速法同様に計算する必要がある。

また、本手法では「空間均質化および重み付き残差法により求まる中性子束一次展開係数」と「拡散方程式および重み付き残差法により求まる中性子束一次展開係数」が一致するように、補正係数を定義している。そのため、前者の展開係数が「詳細メッシュ全中性子束分布形状」と大きく異なる場合(粗メッシュ内全中性子束分布形状の非線形性が強く線形近似が妥当でない場合)、加速計算により詳細メッシュ全中性子束分布を正確に再現することは困難となる。

LS ACMFD-D 加速法における正味中性子流差分式および加速計算について述べる。正味中性子流差分式は、LS ACMFD 加速法と同様である。すなわち LS 近似を適用した拡散方程式を解析的に解くことで正味中性子流差分式を導出する。また、詳細計算で得られた正味中性子流との差から中性子流補正係数を計算する。得られた正味中性子流差分式を中性子バランス方程式に代入し、全中性子束に関する線形方程式を解くことで粗メッシュ平均全中性子束分布を更新する。

粗メッシュ平均全中性子束分布(内部反復)が収束したら、粗メッシュ平均中性子源分布、全中性子束一次展開係数の順に更新する。更新された粗メッシュ平均中性子源分布を用いて各メッシュについて拡散方程式の解析解を求める(式(B.2.12)–(B.2.17))。そして得られた解析解に対して重み付き残差法を適用し(式(B.2.18)–(B.2.27))、全中性子束一次展開係数 $\phi_{x,g,i}^{\ell}$ を更新する(式(B.2.30))。そして更新された $\phi_{x,g,i}^{\ell}$ を用いて中性子源一次展開係数を更新し、中性子バランス方程式を解いて粗メッシュ平均全中性子束分布を再度更新する。

粗メッシュ平均全中性子束分布が収束条件を満たすまで上記の計算を反復する。加速計算が収束したら、加速計算前後の粗メッシュ平均全中性子束を用いて rebalance factor を計算し、詳細メッシュ全中性子束分布を更新する(prolongation)。以上が、LS ACMFD-D 加速計算の計算手順である。

上述のとおり、LS ACMFD-D 加速法では中性子束 1 次展開係数補正係数を用いて、詳細計算と加速計算間で一次展開係数（粗メッシュ内の中性子の流れ）を保存する。そして、拡散方程式の解析解および重み付き残差法を用いて、一次展開係数の値を直接的に更新する。

最後に、LS ACMFD-D 加速法の計算フローを図 B.2.11 に示す。図 B.2.11 では、内部反復計算（粗メッシュ平均全中性子束分布の更新）では、あるエネルギー群について全中性子束空間分布を更新し、それを各エネルギー群について順次行っている。これは粗メッシュ平均全中性子束に関する行列演算をエネルギー群毎に実行するためである。対して一次展開係数の計算では、ある粗メッシュに着目して各エネルギー群における拡散方程式の解析解および一次展開係数を更新し、それを各粗メッシュについて順次行っている。これは、拡散方程式の解析解を求める際に用いる中性子源の計算および座標変換の回数を削減するためである。

なお拡散方程式の解析解の計算では、その前の反復で得られた中性子束および中性子源一次展開係数の値を用い、その反復中に更新された隣接メッシュの中性子束および中性子源一次展開係数を用いてはならない。これは、反復中に更新された一次展開係数を用いると、中性子バランスが崩れ反応率が保存されないためである。従って、一次展開係数の更新時は、常に 1 つ前の反復で得られた一次展開係数の値を用いて計算を行う。なお、粗メッシュ平均全中性子束および中性子源についてはその反復中に更新された値を用いてもよい。

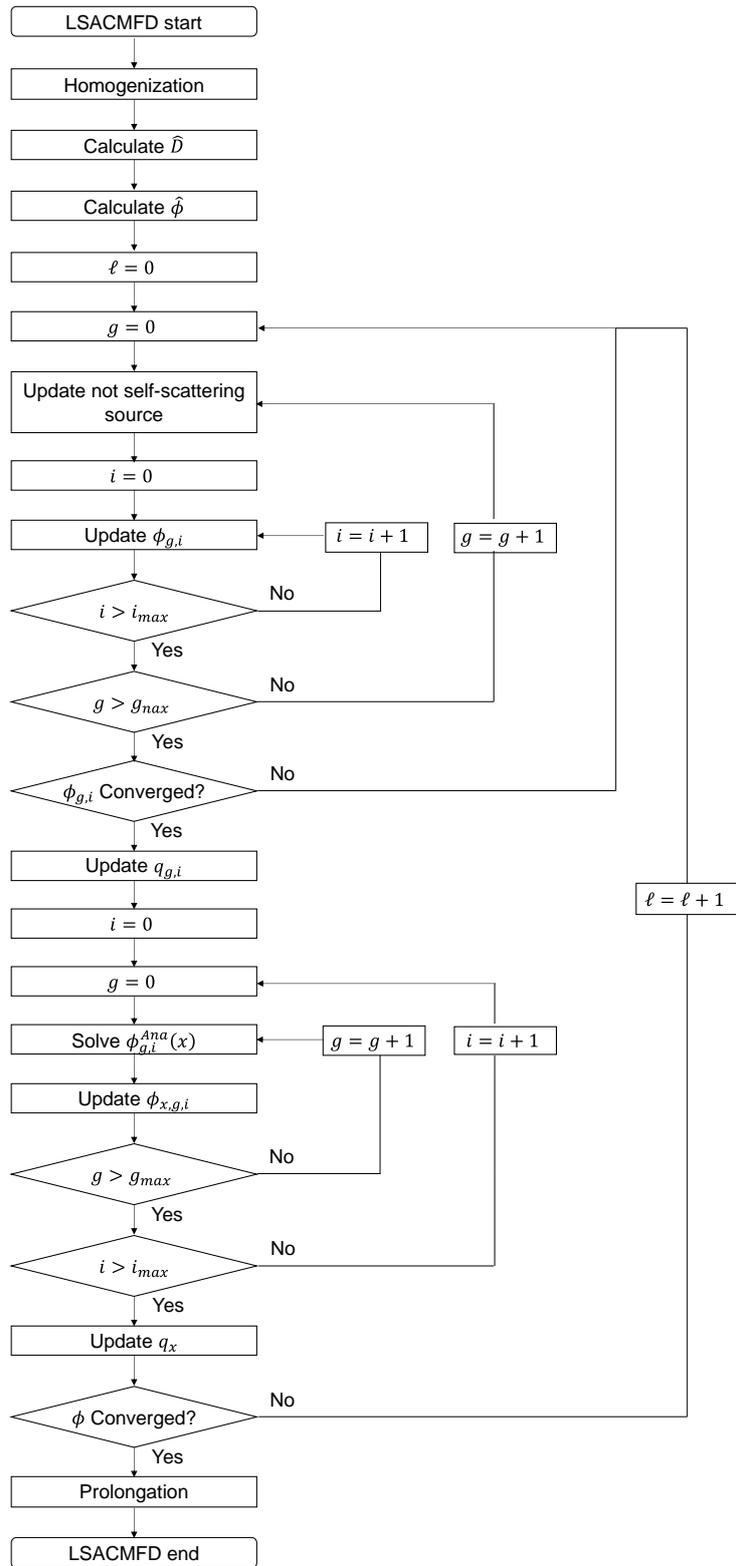


図 B.2.11 LSACMFD-D 加速法の計算フロー図（固定源計算）

$$\rho = (\varepsilon^{fine})^{1/L}, \quad (4.4.10)$$

(再掲)

ここで、 L は収束に要した詳細計算の外部反復回数である。

- 倍精度実数計算

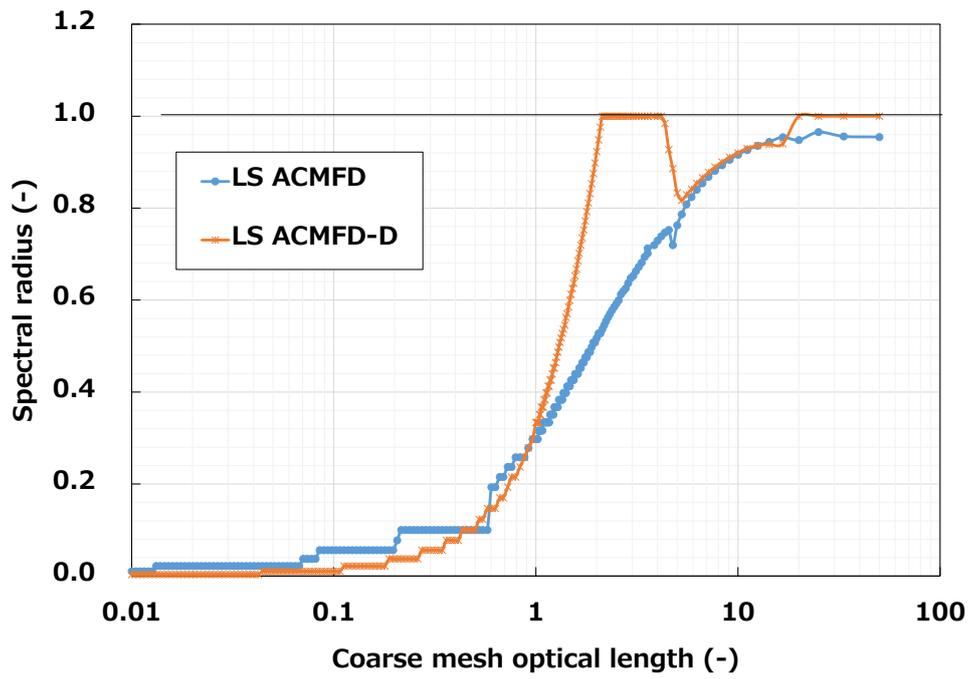
計算結果として、スペクトル半径の光学距離依存性を示す。図 B.3.1 には LS MOC の角度分割数 $m = 2$ における $p = 1, 4$ のスペクトル半径、図 B.3.2 には $m = 64$ における $p = 1, 4$ のスペクトル半径をそれぞれ示す。本図では収束しなかった計算ケースのスペクトル半径は 1.0 としている。各図では LS ACMFD-D 加速法と比較するため、LS ACMFD 加速法の収束性も示す。LS ACMFD 加速法の収束性は 4.4.2 項の結果と同様である。

まず図 B.3.1 より、LS ACMFD-D 加速法は LS ACMFD 加速法よりも収束性が悪化していることが分かる。LS ACMFD 加速法は光学距離や p に依らず安定して収束した。対して LS ACMFD-D 加速法では、 $p = 1, 4$ のいずれの場合においても光学距離が 3 付近もしくは 20 以上の値のとき計算が収束しなかった（スペクトル半径が 1.0 の値となった）。またその他の光学距離においては LS ACMFD 加速法と概ね同等の収束性を示した。

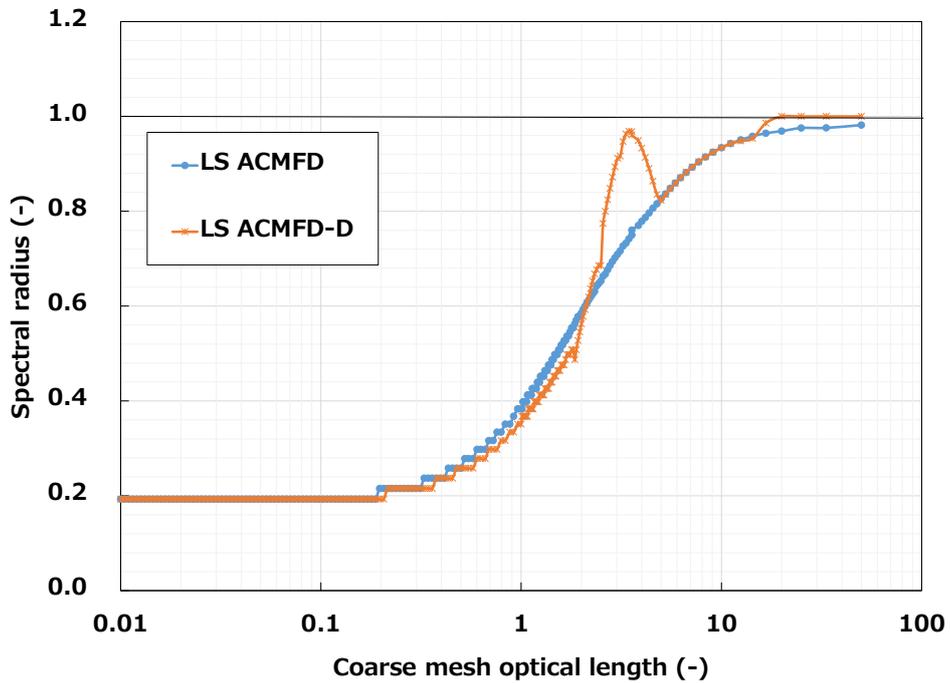
図 B.3.2 より、図 B.3.1 と同様に LS ACMFD 加速法は光学距離や p に依らず安定して収束した。ACMFD-D 加速法では $p = 1, 4$ において、光学距離が 20 以上だと計算が収束しなかった。また光学距離 20 以下では、 $p = 1$ のときは LS ACMFD 加速法と概ね同等の収束性を示したが、 $p = 4$ ではスペクトル半径は 1.0 未満となったものの LS ACMFD 加速法に比べて収束性は悪化した。以上より、いずれの計算条件でも、LS ACMFD 加速法に比べて LS ACMFD-D 加速法の収束性は悪化している。

ACMFD-D 加速法の収束性が LS ACMFD 加速法に比べて悪化した理由として、中性子束一次展開係数補正係数の収束性が悪いことが考えられる。LS ACMFD-D 加速法では LS MOC の反復計算で求まる詳細メッシュ全中性子束分布に基づいて一次展開係数補正係数を計算する。このとき LS MOC の全中性子束分布は収束途中である。一般に LS MOC において中性子束高次展開係数の収束性は、詳細メッシュ平均全中性子束に比べて悪いことが経験的に確認されている。メッシュ平均中性子束は正の値をとるが、高次展開係数は 0 近傍の値もしくは負の値も取りうる。そのため高次展開係数の計算は符号の反転や 0 近傍値の計算が生じるため、反復計算により振動しやすい。従って、加速計算で中性子束高次展開係数を扱っても詳細計算における中性子束高次展開係数の収束性が律速となり効率的な収束加速を達成できないと推測する。

以上の結果より、LS ACMFD-D 加速法は従来加速法に比べて収束性が向上しないことが確認された。実用的な観点でも LS ACMFD-D 加速法を利用する利点はなく、従来の中性子束高次展開係数を扱わない方法もしくは直接的に更新しない方法を用いるのがよい。

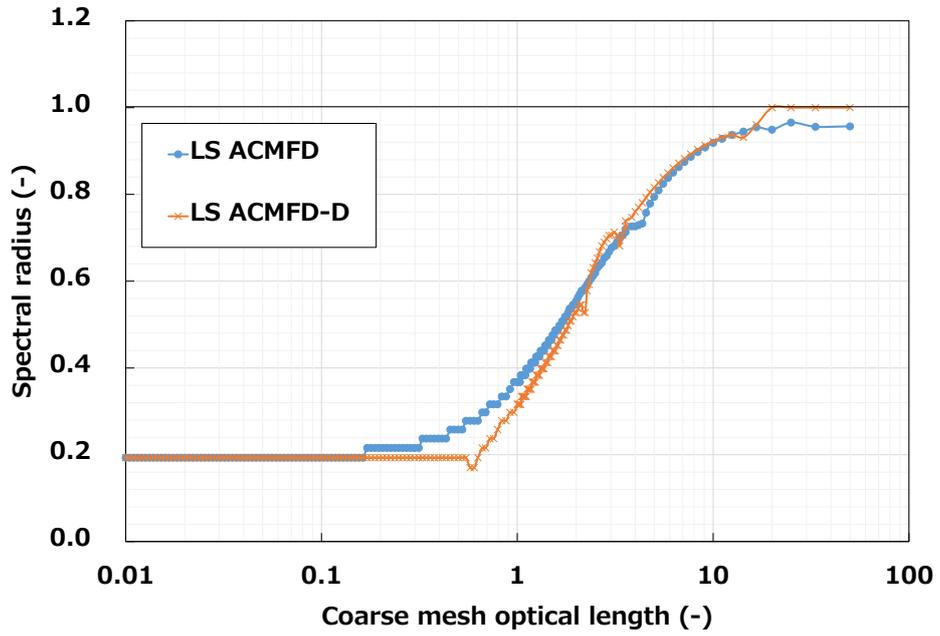


(a) $m = 2, p = 1$

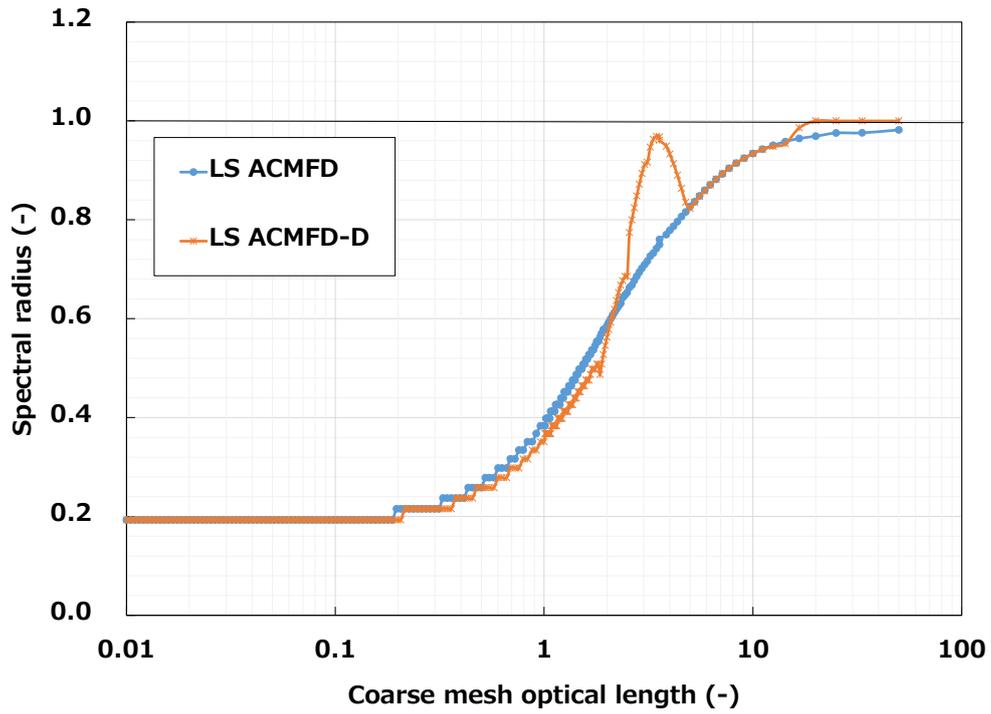


(b) $m = 2, p = 4$

図 B.3.1 $m=2$ における LS ACMFD-D 加速法のスペクトル半径



(a) $m = 64, p = 1$



(b) $m = 64, p = 4$

図 B.3.2 $m=64$ における LS ACMFD-D 加速法のスペクトル半径

B.4 本章のまとめ

本章では、LSACMD 加速法において粗メッシュ中性子束一次展開係数（傾き）を、加速計算中に直接的に更新する手法（LS ACMFD-D 加速法）を提案し、簡易体系における収束性評価を行った。LS ACMFD 加速法では、粗メッシュ平均全中性子束に基づいて中性子束一次展開係数を相対的に更新する。対して、LS ACMFD-D 加速法では加速計算中に中性子束一次展開係数を直接的に計算し値を更新する。

本方法では加速計算の外部反復毎に、一次元拡散方程式の解析解をメッシュ毎に計算し、重み付き残差法を適用して中性子束一次展開係数を計算する。このとき、単に一次展開係数を計算しても、詳細計算との離散化誤差の差異により反応率が保存されず、加速計算が詳細計算の解を再現できない。そこで LS ACMFD-D 加速法では、中性子束一次展開係数補正係数を新たに導入する。この補正係数は、詳細計算で得られた全中性子束分布を空間均質化し重み付き残差法を適用して得られる粗メッシュ中性子束一次展開係数と、加速計算中に計算される拡散方程式の解析解に重み付き残差法を適用して得られる粗メッシュ中性子束一次展開係数の差から計算される。加速計算の反復毎に更新された中性子束一次展開係数にこの補正係数を加えることで、詳細計算の粗メッシュ中性子束一次展開係数を保存することができ、反応率保存による収束加速を実施できる。

検証計算としてエネルギー1群1次元均質平板体系による収束性評価を実施した。計算体系および計算条件は第4章4.4.2項と同様とした。詳細計算にはLSMOCを用い、角度分割数2,64、均質化領域数 $p = 1,4$ の各組み合わせで、スペクトル半径の光学距離依存性を確認した。収束性評価の結果、LS ACMFD-D 加速法は幅広い光学距離においてLS ACMFD 加速法に比べて同等な、もしくは悪化した収束性を示した。この理由として、中性子束一次展開係数補正係数計算に必要な詳細計算の中性子束高次展開係数の収束性が律速となっていることが推測される。

以上より、非線形収束加速法において全中性子束高次展開係数を明示的に扱い加速計算中に更新しても、従来加速法に比べて収束性は向上しないことを確認した。

公刊論文

- [1]. Y. Oshima, T. Endo, and A. Yamamoto, Y. Kodama, Y. Ohoka, H. Nagano, "Impact of Various Parameters on Convergence Performance of CMFD Acceleration for MOC in Multigroup Heterogeneous Geometry," *Nucl. Sci. Eng.*, **194**, 477-491 (2020): <https://doi.org/10.1080/00295639.2020.1722512>.
- [2]. Y. Oshima, T. Endo, and A. Yamamoto, "Impact of Angular and Spatial Source Distribution Approximations on Convergence Performance of Nonlinear Acceleration Methods for MOC in Slab Geometry," *Nucl. Sci. Eng.* (2021): <https://doi.org/10.1080/00295639.2021.1982549>.
- [3]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫, “ACMFD 加速法における平坦中性子束近似と収束性の関係,” 日本原子力学会 2021 年春の年会, オンライン開催, 3 月 17 日–19 日 (2021).
- [4]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫, 相澤直人, “モンテカルロ法に対する領域毎 even-parity 不連続因子の適用,” 日本原子力学会 2021 年秋の大会, オンライン開催, 9 月 8 日–10 日 (2021).
- [5]. Y. Oshima, A. Yamamoto, and T. Endo, "S2 Consistent Analytic CMFD Acceleration for Method of Characteristics," *Proc. M&C 2021*, Online, October 3–7, 1840-1849 (2021).
- [6]. Y. Oshima, T. Endo, A. Yamamoto, and N. Aizawa, "Application of Regionwise Even-Parity Discontinuity Factor to the Multigroup Analog Monte-Carlo Method," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **125**, Online, November 30–December 3 (2021).
- [7]. 大島吉貴, 遠藤知弘, 山本章夫, 相澤直人, “モンテカルロ法に対する領域毎 even-parity 不連続因子の適用,” 日本原子力学会 2022 年春の年会, オンライン開催, 3 月 16 日–18 日 (2022). (submitted)