

修士論文

LEAF 法に基づく
三次元中性子輸送計算手法の開発

名古屋大学大学院
工学研究科博士課程 (前期課程)
マテリアル理工学専攻
量子エネルギー工学分野
量子エネルギーシステム工学講座
エネルギー量子制御工学グループ
加藤 祐生
平成 27 年 2 月

目次

第 1 章 序論	1
1.1. 背景	1
1.2. 本研究の目的	3
1.3. 本論文の構成	3
第 2 章 中性子輸送方程式とその数値解法.....	4
2.1. 本章の概要	4
2.2. 中性子輸送方程式.....	4
2.3. Characteristics 法による中性子輸送方程式の数値解法	6
2.3.1. 基礎理論	6
2.3.2. Ray tracing の方法	11
2.3.3. Ray tracing の適用体系及び境界面での CL の接続性	16
2.3.4. 計算フロー.....	18
2.4. 三次元大型体系への適用.....	31
2.4.1. 大規模並列計算の利用.....	31
2.4.2. Axially Simplified Method of Characteristics 3D (ASMOC3D).....	34
2.5. 本章のまとめ	39
第 3 章 Legendre Expansion of Angular Flux Method (LEAF 法)	40
3.1. 本章の概要	40
3.2. LEAF 法の概要	40
3.3. Characteristics Plane (CP) の作成方法	40
3.4. 中性子束の計算方法.....	42
3.4.1. CP 内角度中性子束.....	42
3.4.2. 全中性子束.....	48
3.5. 中性子源の計算方法.....	50
3.5.1. Flat Source 近似	50
3.5.2. メッシュ平均全中性子束を利用した 1 次展開.....	51
3.5.3. 面平均全中性子束を利用した 1 次展開.....	52
3.5.4. 重み付き残差法.....	55
3.6. 計算フロー	58
3.7. 本章のまとめ	63
第 4 章 検証計算	64
4.1. 本章の概要	64
4.2. 角度中性子束展開回数に関する検証.....	64

4.2.1. 概要	64
4.2.2. 計算体系	64
4.2.3. 計算条件	65
4.2.4. 結果	65
4.2.5. 考察	66
4.2.6. まとめ	69
4.3. 中性子源展開方法に関する検証.....	70
4.3.1. 概要	70
4.3.2. 計算体系	70
4.3.3. 計算条件	70
4.3.4. 結果	71
4.3.5. 考察	74
4.3.6. まとめ	77
4.4. 竹田ベンチマーク問題.....	78
4.4.1. 概要	78
4.4.2. 計算体系	78
4.4.3. 計算条件	79
4.4.4. 結果	80
4.4.5. 考察	81
4.4.6. まとめ	83
4.5. 本章のまとめ	83
第5章 結論	84
5.1. 結論	84
5.2. 今後の課題	85
参考文献	87
謝辞	89
公刊論文リスト	90

記号

- \vec{r} : 位置
 E : エネルギー
 $\bar{\Omega}$: 立体角
 θ : 極角
 φ : 方位角
 ψ : 角度中性子束
 ϕ : 全中性子束
 J : 中性子流
 S : 外部中性子源
 x, y, z : 位置
 s, t : Characteristics Line 上の位置
 V : 体積
 P_i : i 次のルジャンドル多項式
 Σ_t : 全断面積
 Σ_s : 散乱断面積
 $v\Sigma_f$: 生成断面積
 χ : 核分裂スペクトル
 D : 拡散係数

添え字

- g : エネルギー群
 m : 方向
 k : Characteristics Line の番号
 i : 領域
 $left, L$: 左側
 $right, R$: 右側
 $bottom, B$: 下側
 top, T : 上側
 in : 入射
 out : 放出
 CP : Characteristics Plane の
 a : 方位角
 p : 極角

第1章 序論

1.1. 背景

現在我が国においては、沸騰水型原子炉(Boiling Water Reactor :BWR)と、加圧水型原子炉(Pressurized Water Reactor :PWR)の2種類の商業用原子炉が存在する。これらの原子炉には、通常 BWR では約 800 体程度、PWR では約 200 体程度の燃料集合体が装荷されるが、燃焼度や種類の異なる様々な燃料集合体をどのように炉内に配置するかにより、構成される炉心の特性は大きく異なる。安全性、経済性の観点から優れた燃料装荷パターンを選定するためには、予め設計炉心の炉心特性を予測することが必要となる。

原子炉の炉心特性は、炉内を飛行する中性子の状態によって決定される。それゆえ、原子炉の解析は中性子の挙動を記述する中性子輸送方程式を用いて、炉内の中性子束分布を求めることにより行われる。この計算は炉心解析と呼ばれる。現在の炉心解析においては、現実的な計算コストの制約（原子炉炉心の幾何形状や、核反応を完全に再現することが困難であるため）から、様々な近似を導入して数値計算を実施することで得られる近似解を利用している。そのため、得られた計算結果に対して誤差を見込み、適切な安全余裕を考慮することで設計を行っている。

従来、炉心全体を対象とする炉心解析では、拡散理論に基づく近代ノード法が広く用いられてきた。近代ノード法では、非均質な計算体系をそのまま取り扱わず、空間均質化と呼ばれる操作を適用する。空間均質化とは、ある領域内の幾何形状を均質なものとして取扱い、領域内で反応断面積を一定とする操作である。空間均質化と組み合わせることにより、近代ノード法では比較的粗いメッシュ(10~20cm)を用いても詳細メッシュ(1~2cm)計算に相当する高い計算精度を与えることから、計算機資源の乏しい時代においては非常に重宝された。そのため、長い間研究者たちの関心は、近代ノード法適用のための優れた少数群均質化断面積の作成方法に向けられた。

しかしながら、空間均質化を適用することは、均質化した領域内における詳細な中性子束の評価を困難にするという問題がある。また、均質化後の体系で均質化前の計算を完全に再現することは難しく、均質化による近似誤差が新たに発生する。加えて、均質化の影響は適用される体系の非均質性が大きいほど大きくなる。原子力発電では今後高燃焼度化燃料や混合酸化物燃料 (Mixed Oxide :MOX) の導入、炉心内の構造の複雑化により非均質性の増大が見込まれるため、均質化による計算精度への影響は無視できないものとなる可能性が高い。したがって、炉心解析においては非均質性をそのまま取り扱うことができる計算手法が求められている。

近年の計算機技術の発達とともに、より厳密なシミュレーションモデルに基づく炉心解析手法として、Characteristics 法が注目を集めている。Characteristics 法(Method of Characteristics: MOC)は、決定論に基づく解析手法であり、中性子の飛行方向やエネルギー、

断面積の空間依存性等を離散化し、代表的な中性子の飛行パスに沿って中性子の生成・消滅を計算することで炉心特性を解析する手法である。MOC では、幾何形状の非均質性を直接考慮した計算が可能であり、空間均質化を必要としない。また、各種離散化の度合いを十分に大きく取ることで、離散化近似の影響を排した精度の高い解を計算することができるという利点を持つ。しかしながら、MOC の計算において必要な計算精度を達成するためには、多数の中性子パスを辿りながら計算を実施する必要があり、計算コストが問題となる。3次元全炉心を対象とした MOC を用いた解析は、現代のスーパーコンピュータを用いても達成されていない。そのため、MOC の計算コスト低減の為、様々な研究が実施されている。

計算の高速化のために、MOC の計算フローを並列化のために最適化し、大規模並列計算機を用いた計算を行う試みがなされている。MOC の計算において各中性子パス上における計算は独立に行われるため、それぞれの計算を 1 つの演算コアに割り当てることで並列に計算を実施することができる。並列化の際は多数コアを用いることによる重複書き込みのみに注意すればよく、並列化の導入は比較的容易なものである。すなわち、MOC は並列計算と相性が良いといえることができる。参考文献[1]では、多数の演算コアを用いた場合においても高い並列化効率が実現できることが示されている。

また、MOC の理論を一部改良し、計算手法を効率化する研究が数多く実施されている。先に述べたように、MOC における計算コストは、中性子パスの本数に大きく依存する。そこで中性子パスを設定する領域を特定の平面領域のみに限定し、他の空間をノード法による拡散計算(あるいは SPn 法、Sn 法等)により解析する MOC と他の解析手法の組み合わせによる解法が発展してきている[2,3,4]。この手法は、いくつかの平面領域においてのみ MOC による計算を実施することから、Planar MOC 法と呼ばれる。Planar MOC 法では、直接 MOC を適用した場合と比較して計算コストは劇的に低減され、現在の計算機資源においても実現可能な計算の規模となっている。ただし、中性子パスの設定された平面領域においては燃料棒単位の解析を実施することが可能であるが、計算の大部分はノード法等による均質化体系の計算であるため、体系全体に渡る燃料棒単位の解析を実施することは困難である。

MOC の計算理論改良の別のアプローチとして、SHIKOKU コードに実装されている ASMOC3D がある[6]。ASMOC3D では、MOC における中性子パスとして、直線ではなく平面を用いる。計算体系中に多数の平面領域を設定し、その平面領域内における中性子バランスを計算することで、原子炉内の中性子束分布を計算する。計算に必要な平面領域の数は直接 MOC を適用した場合に必要な中性子パス(直線)の数と比較して大幅に少なく、計算コストの低減が達成されている。さらに、取り扱い可能な体系に若干の制約があるものの、軽水炉炉心体系では直接 MOC を適用した場合と同様に燃料棒単位の解析が可能である。参考文献[6]では、実際に伊方 3 号機の解析に適用された例が示されており、実機測定値と比較して良好な計算精度が示されている。一方、ASMOC3D では依然として計算コスト(主に必要な計算時間)が問題となっており、更なる計算手法の効率化が求められている。

以上のように、次世代の炉心解析手法として様々な方向性から研究が行われているが、依然として 3 次元全炉心のような大型体型に対する厳密な炉心解析は達成されておらず、原子炉の安全性・経済性向上のための大きな課題となっている。

1.2. 本研究の目的

前述のように、次世代の炉心解析手法として様々な方向性から研究が行われている。本研究では、これら計算手法の内、ASMOC3D に着目した。ASMOC3D 法は燃料棒単位の計算が可能であり、効率的な計算が実施可能であることから、潜在的に優れた計算手法であるといえることができる。それ故、ASMOC3D の計算理論を改良することで、更なる効率的な炉心解析手法を開発することができると考えられる。具体的には、ASMOC3D の計算理論に関して、以下の点の改良を行う。

・角度中性子束の取扱い方法

ASMOC3D では、平面領域内の中性子バランスを計算する際、平面領域の境界において角度中性子束の空間依存性を 1 次多項式に関数展開する。この時、1 次の展開係数は隣接する平面領域における角度中性子束の値を用いた内挿により決定されている。この手法は工学的な手法であることから、数学的厳密な手法に改めることで計算精度を向上させられる可能性がある。また、2 次以上の展開係数を用いることも検討する。

・中性子源の取り扱い方法

ASMOC3D では、計算体系の中性子源分布を垂直方向にのみ 1 次の関数展開により表現している。そこで垂直方向に対しても同様に中性子源の関数展開を実施することにより、空間の離散化誤差低減を図る。また、関数展開の方法として、より効率的な手法を調査する。

1.3. 本論文の構成

本論文は 5 章構成である。本章では、本研究の背景として、原子炉炉心解析の現状と今後の展望について述べ、本研究の目的を示した。2 章では、炉心解析の基礎となる中性子輸送方程式について述べ、その代表的な数値解法として Characteristics 法について述べる。3 章では、Characteristics 法及び ASMOC3D を参考に開発された本研究における提案手法である LEAF 法について述べる。4 章では、LEAF 法の性能評価のために行った検証計算について示す。最後に、5 章において本論文の結論を示す。

第2章 中性子輸送方程式とその数値解法

2.1. 本章の概要

原子炉の核特性を支配する中性子の挙動は、Boltzmann 方程式によって予測することが可能である。ゆえに炉心特性を予測するためには Boltzmann 方程式を解き、炉内の中性子のエネルギー及び空間の分布を求めればよい。原子炉炉心解析の信頼性は中性子束の計算精度に大きく依存するため、この Boltzmann 方程式を如何に精度良く解くかが重要である。しかしながら、実機炉心のような複雑な幾何形状に対して Boltzmann 方程式を解析的に解くことは困難であるため、多くの近似を導入し、数値計算による解析を行っている。

本章では、炉心解析の基礎となる定常状態の Boltzmann 方程式とその数値解法について述べる。2.2 節では、中性子の挙動を記述する Boltzmann 方程式の理論的な導出の仮定を示す。次に 2.3 節では、Boltzmann 方程式に対する決定論的厳密解法であり、主に二次元体系で広く用いられている数値解法である Characteristics 法について述べる。Characteristics 法は高い計算精度を与える反面、他の計算手法と比較して長い計算時間を必要とすることが知られている。そこで 2.4 節では、計算の収束性を高めるために用いられる加速法について述べる。

Characteristics 法はこれまで二次元体系への適用が主流であったが、計算機性能の発達を背景に現在では三次元体系に対しての適用も検討されている。そこで 2.5 節では Characteristics 法が三次元の炉心解析に対して適用された例を紹介し、考察を行う。最後に、2.6 節において本章をまとめる。

2.2. 中性子輸送方程式

中性子は電氣的に中性であることと、炉内の中性子数密度は十分に小さく中性子同士の衝突は無視できるため、原子炉内の中性子は他の原子核との衝突によってのみ吸収または散乱されその状態を変化させるとモデル化できる。この様子を知るためには、角度中性子束の従う式を導き、その問題に応じて適当な初期条件及び境界条件のもとで解いて角度中性子束を求めればよい。

以上のような理由から、炉心解析では元来気体粒子の速度分布を記述するために導出された方程式である Boltzmann 方程式を基に計算を行っている。以下に、定常状態における Boltzmann 方程式を示す。

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.1)$$

ここで式(2.1)の左辺第一項は中性子の漏洩項、左辺第二項は中性子の吸収項である。また、右辺第一項は散乱、核分裂、外部中性子源に関する中性子源項であり、式(2.2)により表され

る。

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.2)$$

式(2.1)はエネルギー E で飛行方向 $\vec{\Omega}$ に飛んでくる中性子の生成と消滅に関する保存式である。ある領域に注目したとき、式(2.1)の物理的な意味は次の関係となる。

漏洩率+吸収率 = 核分裂による生成率+散乱による生成率+外部中性子源からの生成率
つまり定常状態の Boltzmann 方程式では中性子束の時間的変化はなく、中性子の生成と消滅が釣り合った状態を記述する。原理的には、この Boltzmann 方程式を解くことで炉内の中性子束の空間分布、エネルギー分布を厳密に予測することが可能である。しかし、式(2.1)は中性子の位置(3変数)、方向(2変数、エネルギー(1変数)の合計6個の未知変数を持つ方程式であり、これを解析的に解くことは困難である。そこで、一般の炉心解析においては式(2.1)に以下の様な近似を導入し、未知変数を減らすことで式を簡略化して取り扱う。

① エネルギーの離散化

核計算に使用されるパラメータはエネルギーに対し非常に複雑な依存性をもつ。そこでエネルギーを複数のエネルギー群に分け、それを平均化することでその群のエネルギーを代表させる多群近似を使用する。この方法では、 G 個のエネルギー群に分けられたうち、 $E_g \leq E \leq E_{g-1}$ のエネルギーに対する g 群の断面積 Σ_g は以下のように計算される。

$$\Sigma_g = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\vec{r}, E) dE}, \quad \phi(\vec{r}, E) = \int_0^{4\pi} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (2.3)$$

多群近似を適用することで式(2.1)のエネルギーの変数はなくなり、以下のような G 個の連立微分方程式の形に書き直すことができる。

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_{t,g}(\vec{r}) \psi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q_g(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (1 \leq g \leq G) \quad (2.4)$$

② 空間の離散化

計算体系をその領域内では中性子束などの各種パラメータが十分一定とみなせる多数の微小領域に分割し、空間に連続的に分布している物理量を離散点で近似する。

③ 中性子の飛行方向の離散化または関数展開

体系内をランダムに飛行している中性子をいくつかの代表的な方向に分けて取り扱う。この際より精度のよい近似を行うためにはより多くの飛行方向をとる必要があるが、これ

にはより多くのメモリ量が必要となる。以下に飛行方向の離散化の概念図を示す。

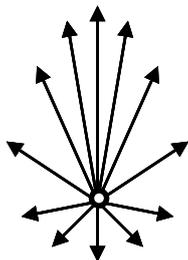


図 2.1 飛行方向離散化の概念図

図 2.1 において、矢印の向きは中性子の飛行方向を表し、矢印の長さはその方向へ飛行する中性子の数を示す。つまり、図 2.1 は矢印の始点から飛行する中性子は矢印の存在する方向のみに、矢印の長さの分だけ飛行していると近似している。

この近似を適用することで、式(2.4)における飛行方向に関する連続変数を排除することができ、角度分割数を M とすると以下のように変形される。

$$\nabla \psi_{g,m}(\vec{r}) + \Sigma_{t,g}(\vec{r})\psi_{g,m}(\vec{r}) = Q_{g,m}(\vec{r}), \quad (1 \leq m \leq M) \quad (2.5)$$

2.3. Characteristics 法による中性子輸送方程式の数値解法

Characteristics 法は 1972 年に J. R. Askew により中性子輸送計算に対する適用が提唱され、1980 年には商業用コード CACTUS に取り入れられた[5]。それ以降、現在では主に 2 次元体系の計算において広く用いられており、Characteristics 法を用いた商業用炉心解析コードが数多く存在する[6,7,8]。

本節では、中性子輸送方程式の数値解法の一つである Characteristics 法について述べる。

2.3.1. 基礎理論

原子炉内を飛行する中性子は他の原子核と衝突するまで直線上を移動すると考えられる。そこで Characteristics 法では、中性子の飛行パスを体系内に引かれた Characteristics Line (CL) と呼ばれる直線により代表し、全ての中性子がこの直線上を飛行するとみなす。

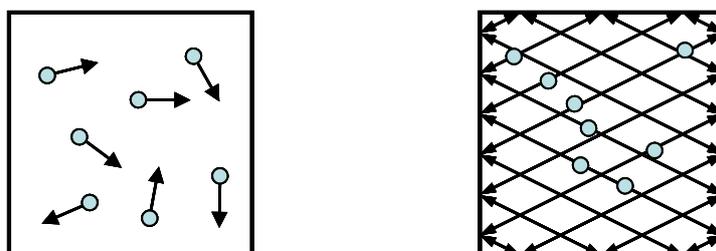


図 2.2 Characteristics 法における中性子の飛行方向

この仮定を導入することにより、3次元的な空間はCLに沿った直線状の領域に離散化することが可能となる。そして各直線状領域内において3次元輸送方程式はCLに沿った積分により解析解が得られる1次元の輸送方程式に置き換えられる。従って、最終的に求めるべき全中性子束は、各直線状領域内で計算される角度中性子束を角度、空間に関して積分することで得られる。本項ではCharacteristics法の基礎的な計算理論について述べる。

始めに、Characteristics法で用いる1次元の輸送方程式を導出する。式(2.6)に定常状態の中性子輸送方程式を示す。

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.6)$$

ここで、式(2.6)中右辺の中性子源項は以下のものを表す。

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.7)$$

式(2.6)をCharacteristics法で使用する1次元の輸送方程式に変形するため、図2.3に示す座標系を導入する。

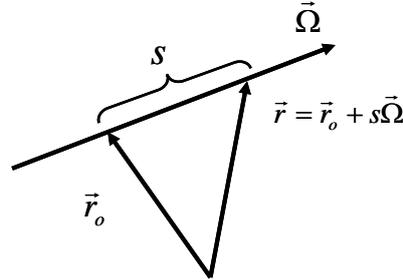


図 2.3 Characteristics法のための座標系

図2.3の座標系では、位置 \vec{r} の座標ベクトルは基準ベクトル \vec{r}_0 と、中性子の飛行方向、飛行パス上の位置を表す変数 s を用いて式(2.8)により表される。

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{\Omega} \quad (2.8)$$

式(2.8)をベクトル形式に改めると式(2.9)のように表せる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

そして式(2.9)を中性子の飛行方向に沿った位置を表す変数 s で微分することで式(2.10)を得

る。

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

次に、中性子の飛行方向に沿った線分 s について中性子束 $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を微分することで、式(2.11)を得る。

$$\frac{d\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{ds} = \frac{\partial\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (2.11)$$

従って式(2.6)に(2.11)を代入することで、ある CL 上における 1 次元の輸送方程式を得ることができる。

$$\frac{d\psi(s, E, \vec{\Omega})}{ds} + \Sigma_t(s, E)\psi(s, E, \vec{\Omega}) = Q(s, E, \vec{\Omega}) \quad (2.12)$$

以上のようにして得られた式(2.12)が、Characteristics 法で用いられる 1 次元の輸送方程式である。式(2.12)は 1 階線形微分方程式であり、適当な境界条件を与えることで解析解を計算することが可能となる。式(2.12)を解くために、境界条件として基準点 \vec{r}_0 (つまり $s=0$ のとき)

における角度中性子束の値 $\psi(0, E, \vec{\Omega})$ を与え、式(2.13)に示される積分因子を利用する。

$$e^{-\int_0^s \Sigma_t(s', E) ds'} \quad (2.13)$$

以上により、最終的な CL 上における角度中性子束の解は以下のように得られる。

$$\psi(s, E, \vec{\Omega}) = \psi(0, E, \vec{\Omega}) e^{-\int_0^s \Sigma_t(s', E) ds'} + \int_0^s Q(s'', E, \vec{\Omega}) e^{-\int_{s''}^s \Sigma_t(s', E) ds'} ds'' \quad (2.14)$$

ただし、今日用いられている Characteristics 法の計算コードでは、数値計算の負荷を軽減するために式(2.14)に対していくつかの近似を導入することが一般的である。多くの場合、適用される近似は前節で述べたものに、④等方散乱近似を加えたものとなる。

① エネルギーの多群化近似

連続的なエネルギーを G 個のエネルギー群に分割し、各群内ではエネルギーを一定として扱う。

② 空間の離散化近似

体系を I 個の十分細かい領域に分割し、個々の領域内では断面積、中性子束、中性子源等の物理量を一定として扱う。

③ 中性子の飛行方向の離散化近似

中性子の飛行方向を M 方向の代表的な方向のみに限定し取り扱う。

④ 等方散乱近似

散乱中性子源が等方であるとみなす。この近似により、中性子源項は単に全中性子束を用いて以下のように表すことが可能となる。

$$Q_{g,m,i} = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{g'}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{g',i} + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'}^G \nu \Sigma_{f,g',i} \phi_{g',i} \right) \quad (2.15)$$

①～④の近似を導入することで、式(2.14)は単純化され、式(2.16)を得ることができる。

$$\psi_{g,m,i}(s) = \psi(0) e^{-\Sigma_{t,g,i}s} + \frac{Q_{g,m,i}}{\Sigma_{t,g,i}} (1 - e^{-\Sigma_{t,g,i}s}) \quad (2.16)$$

Characteristics 法では、式(2.16)を利用して CL 上の角度中性子束を計算していくこととなる。

続いて、式(2.16)を用いて体系の全中性子束分布及び中性子源分布を計算する方法について述べる。Characteristics 法では、計算体系に対して後述する Ray tracing と呼ばれる操作を行い、事前にすべての領域に対して CL によって切り取られる長さを求めておく。したがって、着目領域 i を飛行方向 m 、 k 番目の CL が切り取る長さ $s_{m,k,i}$ が与えられているとする。また、式(2.16)において CL の入射位置を CL 上位置 s の原点とし、境界条件として入射角度中性子束が与えられているとすると、放出角度中性子束は以下のように計算される。

$$\psi_{g,m,k}(s_{m,k,i}) = \psi_{g,m,k,i}^{in} e^{-\Sigma_{t,g} s_{m,k,i}} + \frac{Q_{g,m,i}}{\Sigma_{t,g,i}} (1 - e^{-\Sigma_{t,g} s_{m,k,i}}) \quad (2.17)$$

また、着目する線分上における平均角度中性子束は式(2.17)を直接線分内で平均することで式(2.18)により求めることができる。

$$\bar{\psi}_{g,m,k,i}(s) = \frac{1}{s_{m,k,i}} \int_0^{s_{m,k,i}} \psi_{g,m,k,i}(s) ds \quad (2.18)$$

式(2.18)に式(2.17)を代入して整理すると、式(2.19)を得る。

$$\bar{\psi}_{g,m,k,i}(s) = \frac{1}{s_{m,k,i} \Sigma_{t,g}} (\psi_{g,m,k,i}^{in} - \psi_{g,m,k,i}^{out} + Q_{g,m,i} s_{m,k,i}) \quad (2.19)$$

式(2.19)はある CL 上における平均角度中性子束を与える式であり、断面積や中性子源が一定であると仮定した領域内において厳密な解を与える。従って、着目領域内の平均角度中性子束を計算するためには、着目領域内に隙間なく引かれた無数の CL に対して式(2.19)の計算を実施すればよい。しかしながら、この計算は数値計算的に困難である。それ故、各 CL 同士に適当な幅 $\delta A_{m,k}$ を設定し、有限本(ここでは K 本とする)の CL によってこれを代用す

る。そして各 CL 周辺の微小領域の物質量を、CL 上のもので代表する。

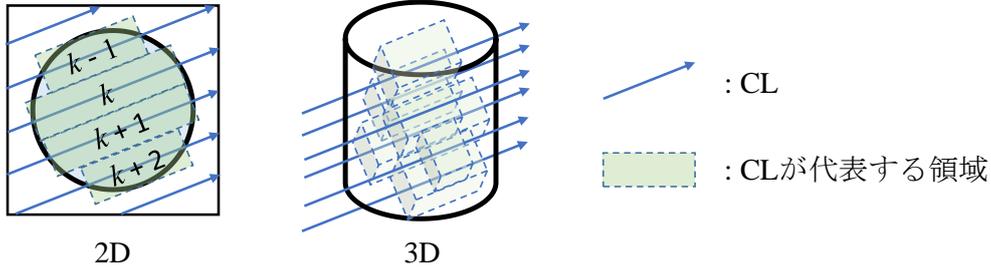


図 2.4 CL と CL の代表する領域の概念図

なお、各 CL が代表する微小領域はセグメントと呼ばれ、その長さをセグメント長と呼ぶ。図 2.4 には、セグメントの概念図を示した。2 次元体系に **Characteristics** 法を適用した場合、セグメントは微小平面領域となる。3 次元体系では、セグメントが表す領域は CL 周辺の微小体積領域となる。このようにすることで、領域平均角度中性子束は CL が代表する微小領域を重みとした、セグメント平均角度中性子束の重み付き積分として式(2.20)により計算することができる。

$$\bar{\psi}_{g,m,i} = \frac{\int_{s \in V} \psi_{g,m,i}(s) dV}{\int_{s \in V} dV} \approx \frac{\sum_k \bar{\psi}_{g,m,k,i} s_{m,k,i} \delta A_{m,k}}{\sum_k s_{m,k,i} \delta A_{m,k}} \quad (2.20)$$

式(2.23)は空間に関する積分計算の離散化形式である。従って式(2.20)が適切な解を与えるためには、CL の幅は十分に狭くしなければならない。しかしながら実際にはこれらの値は計算機資源の制約を受けることになる。そこで **Characteristics** 法では、空間の離散化誤差の低減のために式(2.21)を用いてセグメント長の規格化が行われる。

$$s'_{m,k,i} = s_{m,k,i} \frac{V_i}{\sum_k s_{m,k,i} \delta A_{m,k}} \quad (2.21)$$

つまり、新たに計算される $s'_{m,k,i}$ を用いることで領域の体積を正確に計算することができるようになり、空間の離散化誤差を低減することができる。

$$V_i = \sum_k s_{m,k,i} \delta A_{m,k} \quad (2.22)$$

ただし、式(2.22)中の V_i は着目領域の体積である。この規格化を実施するためには予め離散化した各領域の体積を可能な限り厳密に計算しておく必要がある。体積の計算には、角度中性子束の計算に用いるものよりも細かい **Ray tracing** を実施する方法、**Monte Carlo** 法を用いる方法、そして体系が単純な場合は解析的に求める方法などがある。

式(2.20)の計算を離散化された全ての角度方向に対して実施し、領域平均角度中性子束の計算が完了すると、これを全立体角に対して重み付き積分を実施することにより、炉心解析における重要な物理量である領域平均の全中性子束を求めることができる。

$$\bar{\phi}_{g,m,i} = \int_{4\pi} \bar{\psi}_{g,i}(\vec{\Omega}) d\Omega \approx \sum_m \omega_m \bar{\psi}_{g,m,i} = \sum_m \omega_m \frac{\sum_k \bar{\psi}_{g,m,k,i} s_{m,k,i} \delta A_{m,k}}{\sum_k s_{m,k,i} \delta A_{m,k}} \quad (2.23)$$

ここで式中の ω_m は角度に関する重みであり、式(2.24)の条件を満たすものである。

$$\sum_m \omega_m = 4\pi \quad (2.24)$$

式(2.23)は角度の積分に関する離散化形式の計算式である。すなわち式(2.23)が正確な解を与えるためには十分に多くの角度方向 m を考慮する必要がある。角度方向の離散化誤差を低減する試みとして、様々な角度の分割方法が考案されている。

以上の操作により、領域平均の全中性子束を求めることができた。この計算を体系内の全ての離散化された領域に対して実施することで、炉心計算において重要な体系の中性子束分布を求めることができる。核分裂中性子源及び散乱中性子源は、式(2.23)により与えられる全中性子束を用いて式(2.15)に従い計算すれば良い。

$$Q_{g,m,i} = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g,i} \phi_{g',i} + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g',i} \phi_{g',i} \right) \quad (\text{再掲}) \quad (2.15)$$

ただし、本節冒頭で用いた輸送方程式において中性子源項は未知関数である。そして全中性子束の計算には中性子源が既知である必要がある。さらに、核分裂中性子源の積分値が1に規格化されている場合、体系の実効増倍率は式(2.25)で定義され、この計算には全中性子束が既知である必要がある。

$$k_{eff} = \sum_i \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g',i} \bar{\phi}_{g',i} V_i \quad (2.25)$$

つまり、全中性子束、中性子源、実効増倍率のいずれかを計算するためには少なくともこれらの内1つないし2つが既知である必要がある。しかしながら計算の開始当初これらは全て未知であるため、直接計算することができない。そのため、一般的には反復計算を用いる。この計算方法については、詳細を2.3.4節で述べる。なお、Characteristics法以外の炉心解析手法においても、一般的に反復解法が用いられる。

2.3.2. Ray tracing の方法

体系内にCLを引き、その長さや角度を求める操作をRay tracingと言う。前節で述べたよ

うに、MOC では CL 上で中性子の消滅、生成の計算を行うことで体系の中性子束分布を計算するため、中性子束を精度よく計算するためにはどのように Ray tracing を行うかが重要となる。そこで、本節では Ray tracing の方法と、それに関連する境界条件の取り扱いについて述べる。

3次元体系の Ray tracing は、以下に示す2段階に分けて行われる。

- ① 水平方向方向(xy平面内)の Ray tracing
- ② 垂直方向方向(sz平面内)の Ray tracing

この概念を図 2.5 に示す

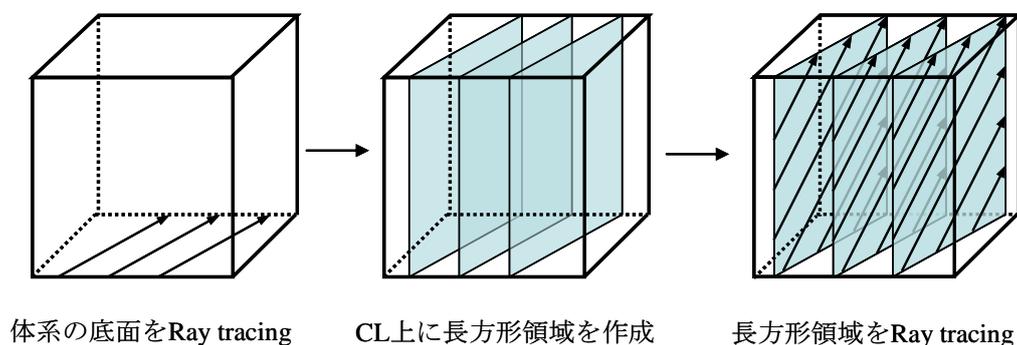


図 2.5 3次元体系の Ray tracing

つまり三次元体系の Ray tracing は、平面に対して行われる Ray tracing の組み合わせにより実現が可能となる。また3次元体系に直接 Characteristics 法を適用した例は依然として少なく、3次元体系特有の Ray tracing の方法はあまり報告されていない。そのため、以降では主に2次元体系における Ray tracing について述べる。

Ray tracing の方法は、主にパス幅の設定方法、角度の設定方法によりいくつかの方法が知られている。代表的な Ray tracing の手法としては、Equidistant 法、Macroband 法、Cyclic Tracking 法がある。

(1) Equidistant 法

Equidistant 法は、図 2.6 に示すようにある角度方向に対して CL を等間隔に引いていく手法である。

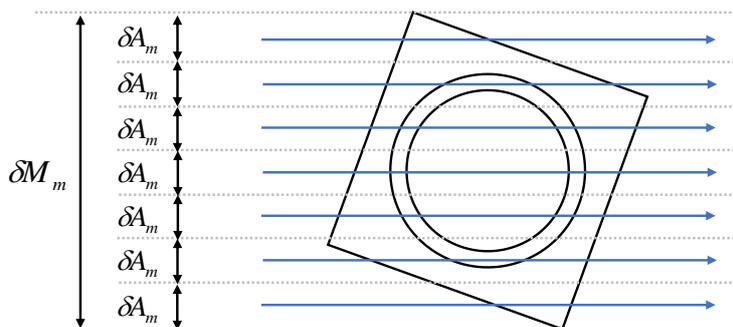


図 2.6 Equidistant 法 の 概念 図

Equidistant 法による Ray tracing を実施するためには、まず体系に引く CL の本数 N_{CL} を決定する。そしてある角度 m から見た体系の幅 δM_m を等分割するように、式(2.26)に基づいてパス幅 δA_m を決定すればよい。

$$\delta A_m = \frac{\delta M_m}{N_{CL}} \quad (2.26)$$

ただし、実際の計算において想定される複雑な計算体系においては、Ray tracing 開始以前に各方向に対して必要な CL の本数を見積もることは難しい。そこで、実際の計算においてはパス幅の上限値 δA_{Max} を入力値として与え、これを越えず、かつ式(2.26)を満たすようなパス幅を式(2.27)及び式(2.28)により計算する。

$$N'_{CL} = \left[\frac{\delta M_m}{\delta A_m} \right] + 1 \quad (2.27)$$

$$\delta A'_m = \frac{\delta M_m}{N'_{CL}} \quad (2.28)$$

ここで、式(2.27)中の $[\]$ はガウス記号を表す。このようにすることで、入力値として与えるデータはパス幅の上限値 δA_{Max} のみとなり、各方向に対して δA_{Max} に近いパス幅を用いた Equidistant 法が適用できる。Equidistant 法では、角度に関する制約は特にないため、自由な角度分割を使用できる。

(2) Macrobond 法

Macrobond 法は、数値積分の誤差を低減するようパス幅の設定方法に工夫を加えた手法である。Macrobond 法では、図 2.7 のように、あらかじめ体系を Macrobond と呼ばれる帯に分けておき、各 Macrobond 内において Equidistant 法による Ray tracing を行う方法である。Macrobond の作成はその境界に線分の端点、円環の中心点、および円環領域における接点を含むように行われる。

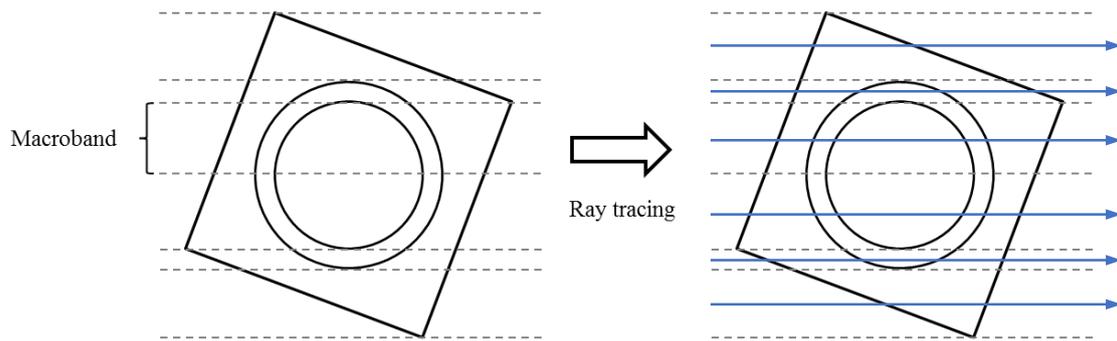


図 2.7 Macro band 法の実施方法

Macroband 内の CL の本数 N_j とパス幅 δA は各 Macroband に個別に設定する。CL の本数 N_{CL}

はあらかじめパス幅の最大値 δA_{Max} を決定しておき、すべての CL のパス幅がこれを超えな

いよう各 Macroband において以下の式によって計算される。

$$N_j = \left\lceil \frac{\delta M_{m,j}}{\delta A_{Max}} \right\rceil + 1 \quad (2.29)$$

ここで、 $\delta M_{m,j}$ はある方位角方向 m について、 j 番目の Macroband の幅を表す。CL の本数が式(2.3.22)によって決定されると、パス幅を次式で決定することができる。

$$\delta A'_m = \frac{\delta M_m}{N'_{CL}} \quad (2.30)$$

この方法では、セグメント内に複数の物質が存在することを避けることができる。また、各物質中に必ず一本以上の CL が引かれるために、各体系内の物質の影響をより計算結果に反映することができ、計算結果のレイトレース幅依存性を低減できる利点を持つ。

(3) Cyclic Tracking 法

パス幅と CL の角度に対してある条件を与えることで、図 2.8 に示すように体系内で CL が循環するような Ray tracing を実施することができる。このような Ray tracing の手法を Cyclic Tracking 法と呼ぶ。

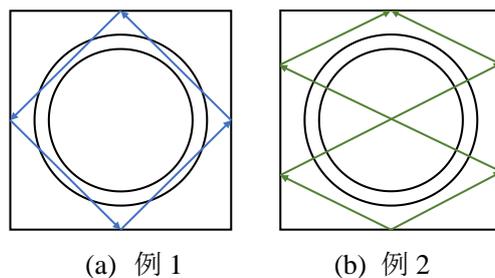


図 2.8 Cyclic Tracking 法 の 概 念 図

この手法では常に CL の始点と終点が一致するため、完全反射境界条件を仮定した場合、放出角度中性子束をそのまま次の入射角度中性子束として使用することができるという利点をもつ。したがって、境界面付近における角度中性子束の近似が不要であり、より厳密に計算を行うことができる。

Cyclic Tracking 法では、体系内のある方向の CL を一直線上に並べると、その特性によりこれを全て繋げることができる。そして、CL を繋げて得られる長い CL は x, y 方向に対しそれぞれ $N_{x,m}$ 、 $N_{y,m}$ 個のメッシュを通過する。

$$N_{x,m} = \frac{Y|\cos \varphi_m|}{\delta A_m} \quad (2.31)$$

$$N_{y,m} = \frac{X|\sin \varphi_m|}{\delta A_m} \quad (2.32)$$

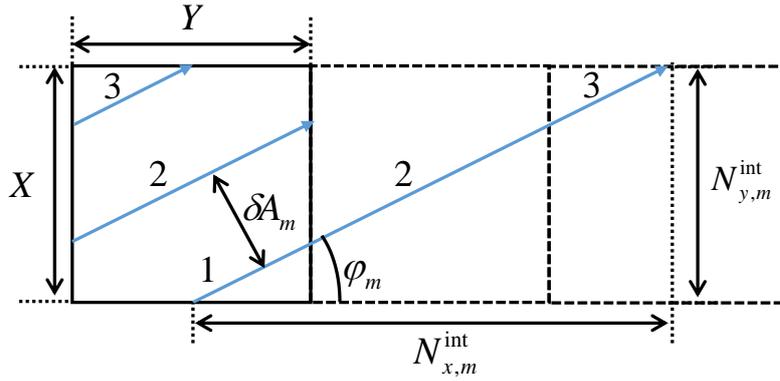


図 2.9 Cyclic Tracking 法の実施方法

式(2.31),(2.32)により表される通過メッシュの個数が整数比で表される場合、CL はそれぞれ x, y 方向に対しそれぞれ $N_{x,m}$ 、 $N_{y,m}$ 個のメッシュを通過した後、元の位置へ戻る。すなわち、Cyclic Tracking 法を実施するためには、 $N_{x,m}$ 、 $N_{y,m}$ がそれぞれ整数となるようなパス幅及び角度を選定すればよい。実際のコーディングに際しては、まず任意の角度分点及びパス幅を与えて式(2.31),(2.32)により $N_{x,m}$ 、 $N_{y,m}$ を計算し、これらが整数とならなかった場合は $N_{x,m}$ 、 $N_{y,m}$ を調節することで、それぞれに近い整数 $N_{x,m}^{int}$ 、 $N_{y,m}^{int}$ を生成する。

$$N_{x,m}^{int} = [N_{x,m}] \quad (2.33)$$

$$N_{y,m}^{int} = [N_{y,m}] \quad (2.34)$$

ここで、 $[]$ はガウス記号を表し、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

そして得られた $N_{x,m}^{int}$ 、 $N_{y,m}^{int}$ を使用して、方位角と Ray tracing の幅を以下の式により再計算する。

$$\phi'_m = \tan^{-1} \left(\frac{N_{y,m}^{\text{int}} Y}{N_{x,m}^{\text{int}} X} \right) \quad (2.35)$$

$$\delta A'_m = \frac{XY}{\sqrt{(N_{x,m}^{\text{int}} X)^2 + (N_{y,m}^{\text{int}} Y)^2}} \quad (2.36)$$

このようにして得られた方位角とパス幅は CL が循環するための条件を満たしたものであるため、これらを使用することで CL は全て循環するようになる。Cyclic Tracking 法による Ray tracing は、xy 平面に対する Ray tracing と、sz 平面に対する Ray tracing のどちらにも適用することができる。両方の平面に対し Cyclic Tracking 法を適用した場合は、後述する 3 次元的な Cyclic Tracking 法を実現ができる。

2.3.3. Ray tracing の適用体系及び境界面での CL の接続性

前項では、Equidistant 法、Macro band 法、Cyclic Tracking 法の 3 種類の Ray tracing の手法について述べた。本項では、Ray tracing を適用する体系の選定方法と、各種 Ray tracing 手法を適用する際の留意点である境界条件の取り扱いについて述べる。

Ray tracing を実施する体系としては、①着目する計算体系全体と、②着目する計算体系をいくつかの領域に分割した個々の領域の 2 種類がある。以下ではそのそれぞれについて述べる。

① 体系全体に Ray tracing を実施する場合

体系全体に Ray tracing を実施する場合では、体系の端から順に CL を設定していく。この手法では、体系の端から端まで CL は一本に繋がっている。

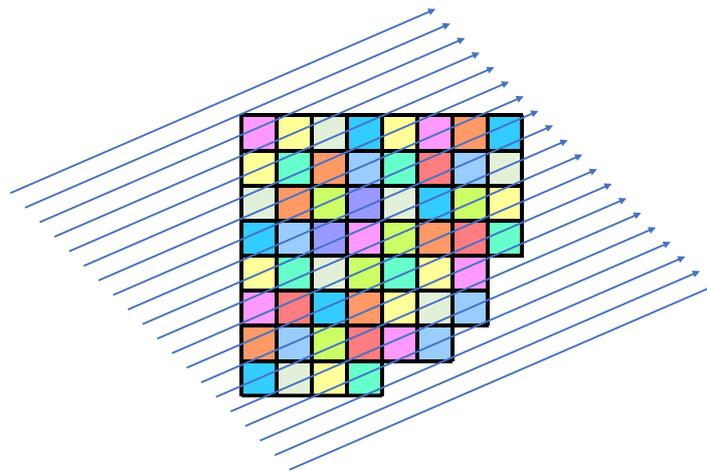


図 2.10 体系全体に対する Ray tracing(1/4 炉心)

従って、体系をメッシュ分割した場合でもメッシュ境界で CL が不連続となることはなく、後述する角度中性子束の近似誤差が発生しない利点がある。一方、計算体系が大きい場

合、CLの本数が膨大な数となり、CLの情報を記憶するために必要なメモリ量や、Ray tracingに必要な計算量が非現実的なものとなる場合がある。それ故、体系全体に Ray tracing を実施する手法は比較的小さな体系において用いられており、ピンセル計算、集合体計算などで主に用いられる。

② 計算体系をいくつかの領域に分割し、個々の領域に Ray tracing を実施する場合

原子炉炉心の体系は燃料ピンや燃料集合体を多数装荷した体系であるため、燃料ピン、燃料集合体単位で見た場合、同一幾何形状が多数存在する。

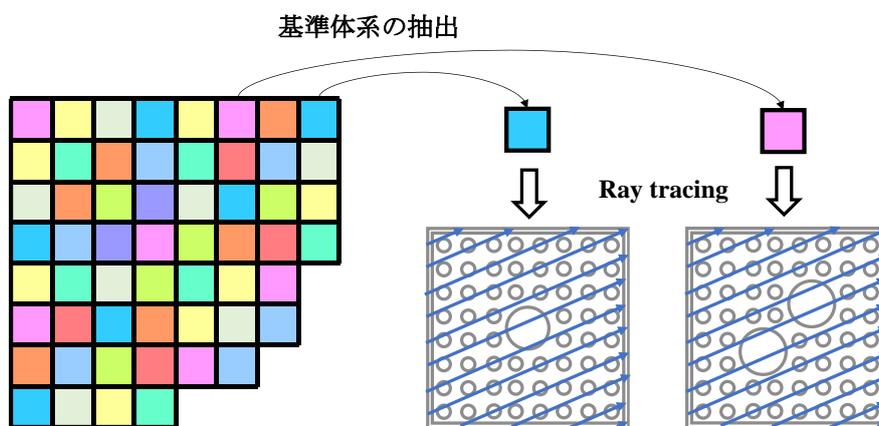


図 2.11 原子炉炉心内の繰り返し幾何形状

そこで、体系に存在する代表的な繰り返し幾何形状の単位についてのみ Ray tracing を実施し、これを対応する位置へ当てはめていくことを考える。この場合、CLの情報は各単位体系についてのみ保存すればよく、必要なメモリ量及び計算量は体系全体に実施する場合と比較して大幅に削減することができる。本手法は基準体系でのCLを1つの”モジュール”として使用し、体系の Ray tracing を実施することから Modular Ray Tracing を呼ばれる[]。

ただし、本手法では体系全体に Ray tracing を実施する場合と異なり、基準体系の境界において、CLが不連続となる事がある。

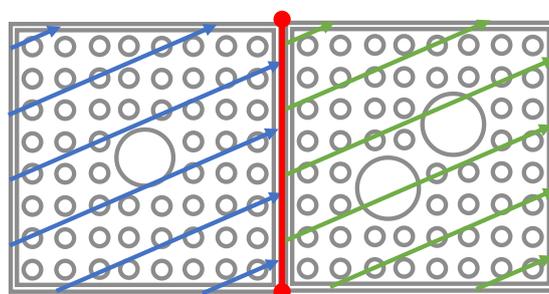


図 2.12 基準体系の境界における CL の不連続性

このときは、隣接メッシュにおける放出角度中性子束をそのまま入射角度中性子束とし

て用いることはできない。そこで、入射角度中性子束は次のいずれかの方法によって計算される。

(a) 角度中性子束を内挿する方法

入射角度中性子束を隣接する前の体系における放出角度中性子束の内挿によって求める。

図 2.3.10 の例では求めたい入射角度中性子束 ψ^{in} の入射点に近接する 2 つの放出角度中性

子束 ψ_1^{out} 及び ψ_2^{out} を選び、次の式により計算する。

$$\psi^{in} = \frac{y_2^{out} - y^{in}}{y_2^{out} - y_1^{out}} \psi_1^{out} + \frac{y^{in} - y_1^{out}}{y_2^{out} - y_1^{out}} \psi_2^{out} \quad (2.37)$$

ここで、 y^{in} , y_1^{out} , y_2^{out} はそれぞれ入射角度中性子束、放出角度中性子束の入射・放出点の位置を表す。

(b) 近接する角度中性子束を使用する方法

隣接する前のメッシュにおける放出角度中性子束のうち、放出点が最も近い角度中性子束をそのまま入射角度中性子束として利用する。

以上(a),(b)の方法は、Ray tracing の幅が十分に小さい場合はどちらも良好な計算結果を与えるが、Ray tracing の幅を狭めることは計算時間や必要計算機メモリの増大を招くために、計算の効率化を考えると(a)の方法が有効であると考えられる。また以上の方法は、体系の外周部における完全反射境界条件を再現する場合にも用いられる。体系外周部において直接接続される反射先の CL が存在しない場合、上述の方法で角度中性子束の内挿が行われる。

本研究では、後述する LEAF 法において 2 次元の Ray tracing を使用する。この時、CL が直接接続され角度中性子束の内挿が不要となる点、メモリ使用量が少なくなる点を重要視し、Cyclic Tracking 法を用いることとした。また、Ray tracing を実施する単位として、計算体系全体を対象とした。

2.3.4. 計算フロー

前項までにおいて、Characteristics 法の理論及び Ray tracing の方法について述べた。本項では、Characteristics 法の計算の具体的な流れについてフローチャートを用いて示す。Characteristics 法の計算は、図 2.13 に示すフローに従って行われる。

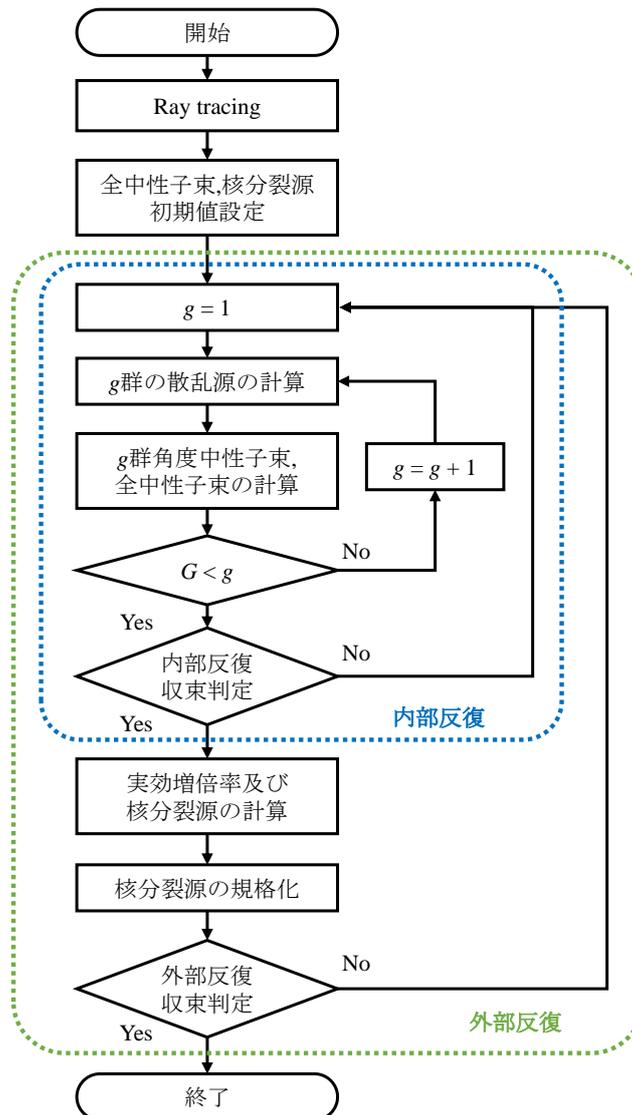


図 2.13 Characteristics 法の計算フロー

始めに、Characteristics 法を適用する準備として、体系に Ray tracing を実施し CL の情報を得る。次に、内部反復・外部反復と呼ばれる 2 種類の反復計算を組み合わせる計算を実施する。以下では、Characteristics 法の流れについて①Ray tracing, ②内部反復, ③外部反復の 3 段階に分けて述べる。

① Ray tracing

本研究では、後述する LEAF 法において Cyclic Tracking 法を用いる。そのため、ここでは Cyclic Tracking 法に基づく Ray tracing のフローについて述べる。また、本研究では簡単のため、計算体系として円及び直線のみから構成される図 2.14 に示すような体系のみを想定した。

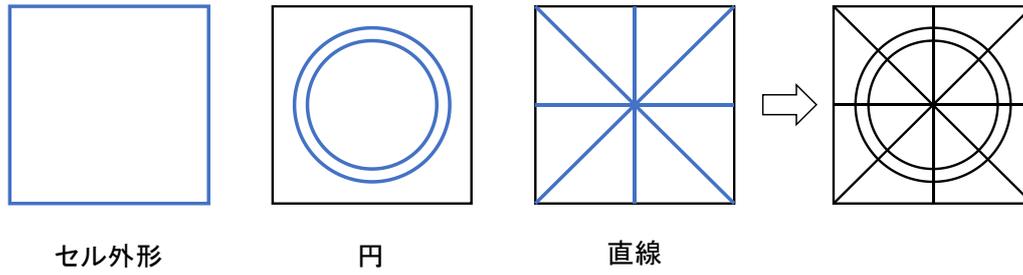


図 2.14 本研究で取り扱う幾何形状の種類

ただし、後述する領域判定を正しく実施するため、円の中心はセル中心と一致しなければならず、直線分割は全てセルの中心を通過しなければならない。

さて、Ray tracing に置いて、求めるべき CL の情報は、以下のものとなる。

- セグメント長 $s_{m,k,i}$
- セグメントがどの Flat Flux Region に属するか識別するための領域 ID
- CL の接続先に関する情報
- CL の始点と終点の情報、及び CL 中心の情報（LEAF 法で中性子源を展開する場合のみ）

これらの情報は、以下の手順に基づき求められる。始めに、Cyclic Tracking 法の条件を満たす方位角及びパス幅を式(2.35),(2.36)により計算する。

次に、得られた方位角 φ_m を用いて、体系中の各点を式(2.38)により回転する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi'_m & -\sin \varphi'_m \\ \sin \varphi'_m & \cos \varphi'_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

ここで、 x, y はそれぞれ回転前の座標、 x', y' は回転後の座標であり、 φ'_m は式(2.39)により定義される。

$$\varphi'_m = \frac{\pi}{2} - \varphi_m \quad (2.39)$$

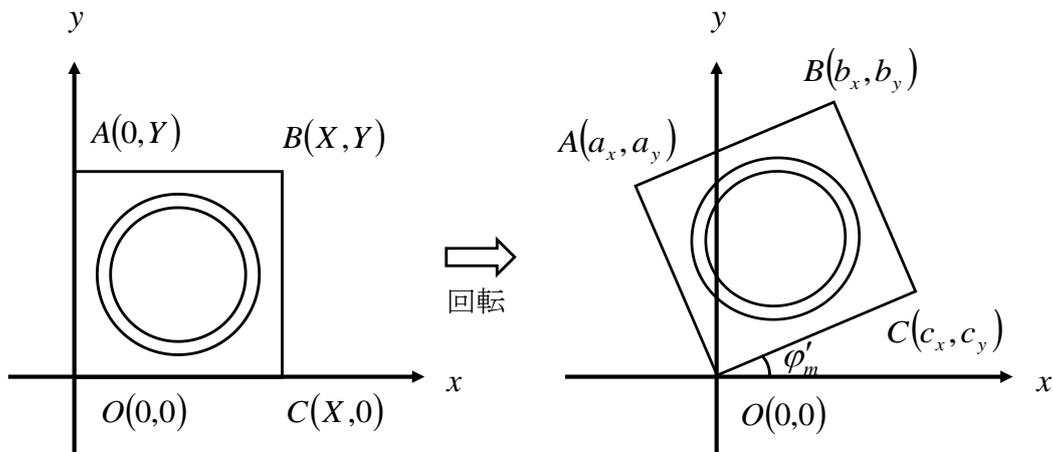


図 2.15 体系の回転

体系の回転を行うと、着目する方位角 φ_m 方向の CL が全て y 軸と平行になり各領域境界との交差判定が容易となる。この状態で、体系の左端から順に CL を設定していく。体系左端の点の x 座標が L_x であるとする、各 CL の x 座標 $x_{m,k}^{in}$ は次式により表される。

$$x_{m,k}^{in} = L_x + \left(k + \frac{1}{2}\right) \delta A_m \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.40)$$

例として図 2.15 に示されるような回転角 ($0 < \varphi_m < \pi/2$) の場合、 $L_x = a_x$ となる。

続いて、各 CL と幾何形状の構成要素との交点判定を行っていく。本研究では体系の構成要素として、(a)線分、(b)円の 2 種類が考えられるため、それぞれに対する交点判定について以下に示す。

(a) 線分に対する交点判定

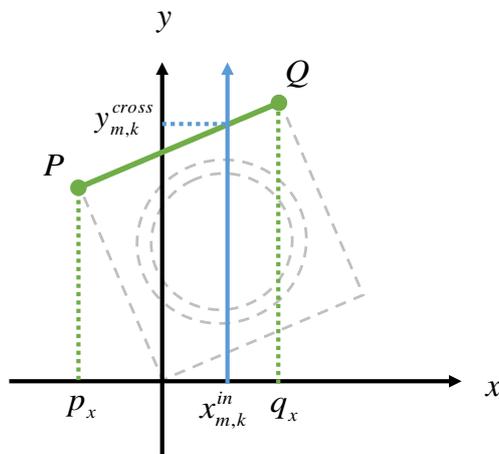


図 2.16 線分との交差判定

着目する線分の両端の点をそれぞれ $P(p_x, p_y), Q(q_x, q_y)$ とし、 $p_x < q_x$ とすると、式(2.41)の条件を満たす時、 m 方向 k 番目の CL と線分は交差する。

$$p_x < x_{m,k}^{in} < q_x \quad (2.41)$$

このとき、交点の y 座標 $y_{m,k}^{cross}$ は、線分 PQ の方程式に CL の x 座標 $x_{m,k}^{in}$ を代入することで求められる。従って、 $y_{m,k}^{cross}$ は式(2.42)により表される。

$$y_{m,k}^{cross} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} (x_{m,k}^{in} - p_x) + p_y \quad (2.42)$$

(b) 円に対する交点判定

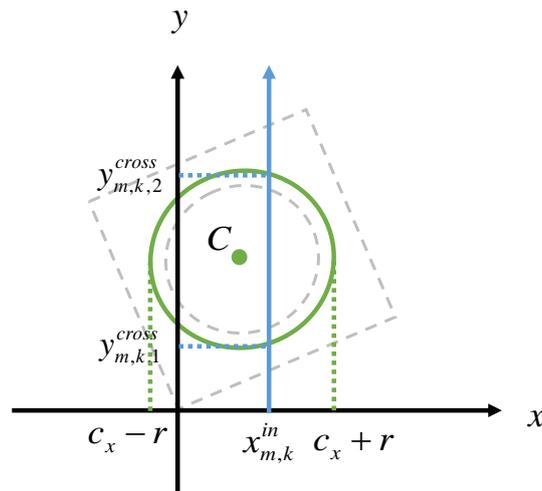


図 2.17 円との交差判定

着目する円の中心を $C(c_x, c_y)$ 、半径を r とすると、式(2.43)の条件を満たすとき、 m 方向 k 番目の CL と円は交差する。

$$c_x - r < x_{m,k}^{in} < c_x + r \quad (2.43)$$

この時、CL と円は 2 交点で交わり、その交点の y 座標 $y_{m,k,1}^{cross}, y_{m,k,2}^{cross}$ はそれぞれ式(2.44),(2.45)により表される。

$$y_{m,k,1}^{cross} = c_y - \sqrt{r^2 - (x_{m,k}^{in} - c_x)^2} \quad (2.44)$$

$$y_{m,k,2}^{cross} = c_y + \sqrt{r^2 - (x_{m,k}^{in} - c_x)^2} \quad (2.45)$$

以上の処理を全ての線分及び円に対して実施することで、CL と各構成要素との交点の y 座標 $y_{m,k,i}^{cross}$ ($i=1 \sim I$) を全て求めることができる。こうして得られた $y_{m,k,i}^{cross}$ をソートし、値の小さいものから順に並び替えると、 m 番目の飛行方向、 k 番目の CL における i 番目のセグメントのセグメント長 $s_{m,k,i}$ は CL の入射位置から順に式(2.46)で求められる。

$$s_{m,k,i} = y_{m,k,i}^{cross} - y_{m,k,i-1}^{cross} \quad (i=1 \sim I) \quad (2.46)$$

ただし、図 2.18 に示す各構成要素の境界の交点を通るような CL では、数値計算上の誤差から長さが非常に短いセグメントが計算される場合がある。

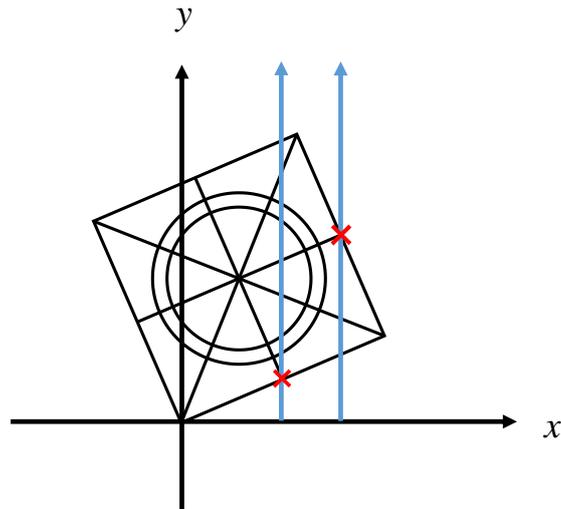


図 2.18 構成要素同士の交点を通る CL

このようなセグメントを考慮することに意味はなく、また計算コスト増大の原因となるため、式(2.46)の計算を実施する際は式(2.47)に示すセグメントの有効判定条件を設定し、条件をみたまつ場合のみ有効なセグメントとして採用する。

$$s_{m,k,i} > \epsilon_{segment} \quad (i=1 \sim I) \quad (2.47)$$

そして、得られた交点の座標を再び逆方向に回転することで、元の直交座標系における交点の座標を得る。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi'_m) & -\sin(-\phi'_m) \\ \sin(-\phi'_m) & \cos(-\phi'_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

以上の操作を全ての CL に対して実施していくことにより、全ての CL のセグメント及び始点・終点の座標の情報を得ることができる。

続いて、得られた CL の情報から、各セグメントの存在する領域の情報と、CL の接続先に関する情報を計算する。Flat flux region を識別するための領域番号の付け方については、本研究では取り扱い可能な幾何形状が簡易なものに限られているため、参考文献[15]の手法を採用した。以下にその手法について示す。

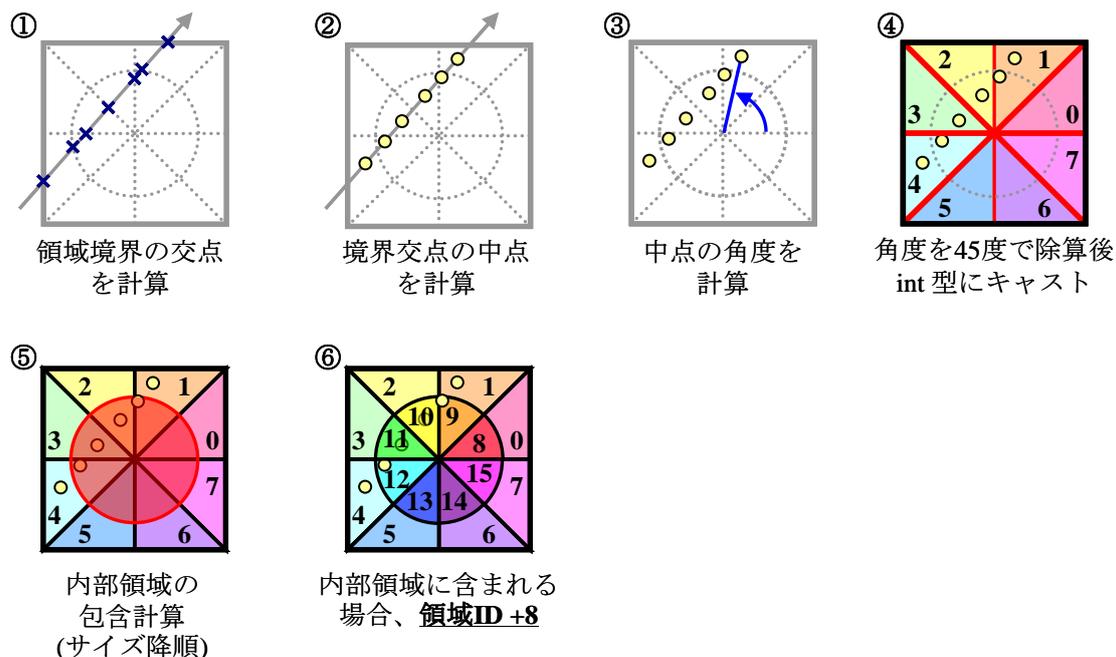


図 2.19 領域判定方法[15]

始めに、上述の手順により各領域境界と CL の交点の座標を計算する。次に、各セグメントの中点の座標を計算し、求めた中点とセル中心を結ぶ線分が x 軸正方向となす角を計算する。そして、得られた角度を $2\pi / (\text{直線分割数} \times 2)$ で除算後、int 型にキャストすることで整数に変換する。得られた整数は分割領域に対応する番号を与えるため、これを直線分割の判別に用いることができる。このようにして、まずセル中心を通る直線分割による領域の判定を行うことができる。次に、円との領域判定を行う。円との領域判定は、円の内部か外側かの2種類となる。よって、円の中心とセグメントの中点までの距離を計算し、これが円の半径より小さい場合は円の内部であると判定する。図 2.19 には、直線数 4、円 1 個の場合の例が示されている。この場合、円の外側の領域に対し 0~7 の領域番号が与えられ、円の内部の領域に 8~15 の領域番号が与えられる。以上のプロセスは Ray tracing 中にセグメントの情報を計算する処理と同時に実施することができる。

各セグメントの領域判定が完了したら、最後に CL の接続に関する情報を計算する。この計算は、体系の外周部において完全反射境界条件が設定されている場合に必要となる。Cyclic Tracking 法では、全ての CL が領域境界において直接接続される。接続先の CL の角度番号及びパス番号は、次のようにして決定することができる。

まず方位角方向について、図 2.20 に示すように第 1 象限から順に番号を設定する。

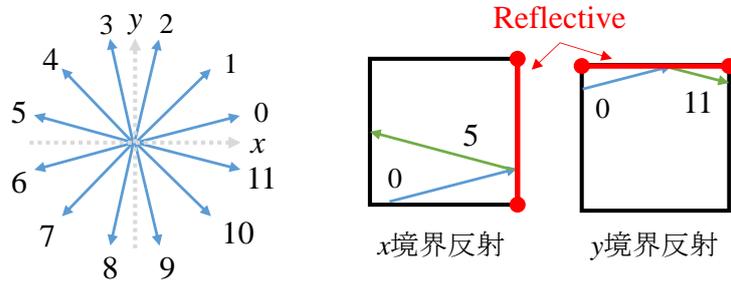


図 2.20 角度方向と反射境界面

この時、方向 m の方位角が反射され、 m' の方向へ変化したとすると、 m' は次のように求めることができる。

x 方向の境界面での反射された場合：

$$m' = \begin{cases} \frac{N_a}{2} - (m+1) & (m < N_a / 2) \\ \frac{3}{2} N_a - (m+1) & (m \geq N_a / 2) \end{cases} \quad (i = 1 \sim I) \quad (2.49)$$

y 方向の境界面での反射された場合：

$$m' = N_a - (m+1) \quad (i = 1 \sim I) \quad (2.50)$$

ここで、式(2.49),(2.50)中の N_a は方位角分割数を表す。また、対応する CL の番号 k' は、 m' 方向の CL のうち、次式を満たすものを選びだせば良い。

x 方向の境界面での反射された場合：

$$y_{m,k}^{out} = y_{m',k'}^{in} \quad (2.51)$$

y 方向の境界面での反射された場合：

$$x_{m,k}^{out} = x_{m',k'}^{in} \quad (2.52)$$

すなわち、反射先の角度の CL 中から、入射位置と反射位置の座標が一致するものを選び出すこととなる。ただし、このとき数値計算上の誤差から対応する CL であったとしても式(2.51),(2.52)を満たさない場合がある。そこで、接続の判定には数値誤差を加味した若干の猶予 ε_c を与え、式(2.53),(2.54)の条件を満たす CL の番号を選び出すこととする。

x 方向の境界面での反射された場合 :

$$\left| y_{m,k}^{out} - y_{m',k'}^{in} \right| < \varepsilon_c \quad (2.53)$$

y 方向の境界面での反射された場合 :

$$\left| x_{m,k}^{out} - x_{m',k'}^{in} \right| < \varepsilon_c \quad (2.54)$$

以上により、Ray tracing に必要な情報を全て求めることができる。この操作を全ての方位角方向、すべての CL に対して実施することで、Ray tracing を完了する。
最後に、Ray tracing の手順を図 2.21 にまとめる。

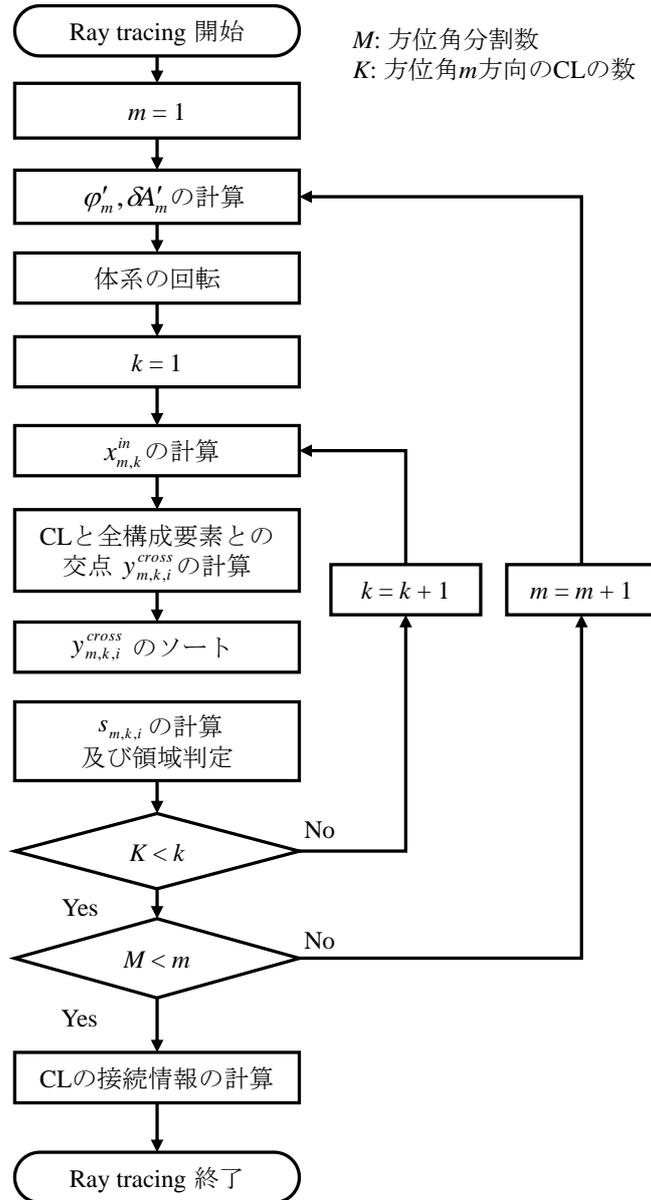


図 2.21 Ray tracing の計算フロー

② 内部反復

内部反復は図 2.13 における青枠の部分である。内部反復では、核分裂中性子源が一定であると仮定し、全中性子束を求める。この計算は n 次元の連立一次方程式 $A\bar{x} = \bar{b}$ を解く計算に相当し、ヤコビ法やSOR法等の反復計算手法が用いられる。

始めに、 g 群の散乱中性子源を計算し、各メッシュの全中性子源を既知とする。次に、得られた中性子源を用い図 2.22 に示す計算フローに従い g 群の角度中性子束の計算を実施する。なお、 g 群の角度中性子束の計算は、全ての CL を辿りながら行われるため、Transport sweep と呼ばれる。

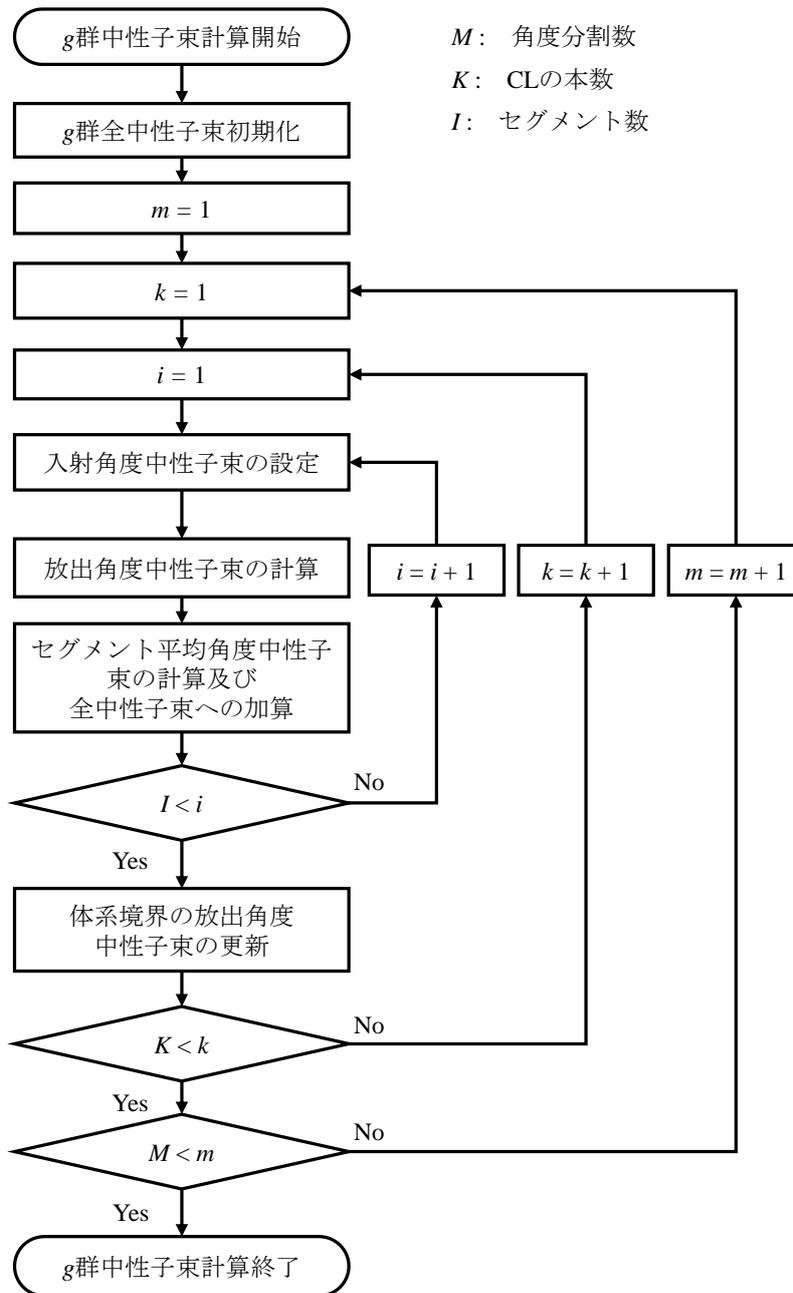


図 2.22 g 群中性子束の計算フロー (Transport sweep)

g 群の角度中性子束の計算では、始めに g 群全中性子束を初期化(0)にする。次に、ある CL に着目し、CL の始点から角度中性子束の計算を開始する。境界条件から入射角度中性子束を設定し、1 番目のセグメントに関して放出角度中性子束を計算する。そして入射・放出角度中性子束からセグメント平均角度中性子束を計算し、全中性子束に累積加算する。セグメント平均角度中性子束及び累積加算の操作はそれぞれ式(2.55),(2.56)により表される。

$$\delta\phi_{g,m,k,i} = \frac{\delta A_{m,k} (\psi_{g,m,k,i}^{in} - \psi_{g,m,k,i}^{out} + Q_{g,m} S_{m,k,i})}{V_r \Sigma_{t,g}} \omega_m \quad (2.55)$$

$$\phi_{g,r}^{(n)} + \delta\phi_{g,m,k,i} \rightarrow \phi_{g,r}^{(n)}, \text{segment}(m,k,i) \in r \quad (2.56)$$

最後に、放出角度中性子束を次のセグメントにおける入射角度中性子束として与え、以降同様の計算を CL の終点まで行う。このとき、コーディングの注意点として、体系の境界部分を除いて各セグメントにおける入射・放出角度中性子束及びセグメント平均角度中性子束は配列等に保存せず、全中性子束への加算と次セグメントへのデータの受け渡しが完了後廃棄することが望ましい。これは、計算の進行に必要なデータのみを保存することで、必要なメモリ量を低減させるためである。

Transport sweep が完了したら、内部反復を抜けるか否かの収束判定を行う。Characteristics 法では一般的に、内部反復の収束判定条件として $n-1$ 反復時に求められた全中性子束との誤差の 1 次ノルムが用いられる。つまり、式(2.57)が収束判定条件となる ε_ϕ よりも小さければ内部反復が収束したとみなし、反復を抜けることとした。

$$\frac{|\vec{\phi}_g^{(n)} - \vec{\phi}_g^{(n-1)}|}{|\vec{\phi}_g^{(n)}|} = \sqrt{\frac{\sum_r (\phi_{g,r}^{(n)} - \phi_{g,r}^{(n-1)})^2}{\sum_r (\phi_{g,r}^{(n)})^2}} < \varepsilon_\phi \quad (\varepsilon_\phi: \text{収束判定条件}) \quad (2.57)$$

ただし、核分裂源が十分に収束していない状況で多くの内部反復計算を実施することは計算時間の増加につながるため、通常内部反復には上限回数 (2~5 回程度) を設定し、解が収束していない場合でも上限回数を超えると内部反復を抜けるよう設定する。

以上により、Characteristics 法の内部反復が完了する。これに加えて外部反復による核分裂中性子源の計算、実効増倍率の計算を組み合わせることにより、LEAF 法の計算を実施することができる。

③ 外部反復

外部反復は、図 2.13 における緑枠に部分である。外部反復では、内部反復及び核分裂源の計算を繰り返し実施することで、核分裂源を収束させ全中性子束及び実効増倍率を求める計算である。この計算は、“べき乗法”を用いて連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \lambda F\vec{x}$ に対する固有値及び固有ベクトルを求める計算に相当する。この固有値、固有ベクトルがそれぞれ実効増倍率、全中性子束である。

以下に、べき乗法の理論について簡単に示す。まず、中性子輸送方程式を行列形式で示すと式(2.58)のようになる。

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\vec{\phi} \quad (2.58)$$

ここで、式(2.58)中の \mathbf{A} は中性子の吸収・漏洩を表す演算子、 \mathbf{F} は核分裂による中性子の発生を表す演算子、 $\vec{\phi}$ は全エネルギー群、全メッシュ点における中性子束からなるベクトルである。このとき、式(2.58)を満たす固有値と固有関数は式(2.59)を満たす。

$$\lambda_n \vec{\phi}_n = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}_n \quad (2.59)$$

ここで式(2.59)中の λ_n は n 次の固有値を表し、 $\vec{\phi}_n$ は n 次の固有関数ベクトルを表す。

また、式(2.58)を変形すると式(2.60)に示される固有値方程式の形式になり、実効増倍率は行列の固有値、中性子束は固有ベクトルに対応していることが分かる。

$$k_{eff}\vec{\phi} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi} \quad (2.60)$$

次に、反復計算の初期値を式(2.61)の固有関数を用いて以下のように展開できると仮定する。

$$\vec{\phi}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n \quad (2.61)$$

ここで、式(2.61)中の a_n は n 次の固有関数に対する展開係数を表す。

式(2.61)を式(2.58)へ代入し、式(2.59)の関係を用いることで、式(2.62)を得る。

$$\vec{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}^{(0)} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n = \frac{1}{k_{eff}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\lambda_n}{k_{eff}} \right) \vec{\phi}_n \quad (2.62)$$

式(2.62)の操作は、初期値から反復第1回目の固有ベクトルを求める計算に対応する。すなわち、外部反復一回分の操作となる。この操作を繰り返し行った場合、以下の式が得られる。

$$\vec{\phi}^{(i)} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}^{(i-1)} = \left(\frac{1}{k_{eff}} \right)^2 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}^{(i-2)} = \dots = \left(\frac{1}{k_{eff}} \right)^i (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F})^i \vec{\phi}^{(0)} \quad (2.63)$$

従って、 i 回の反復を実施した場合、最終的に式(2.64)が得られる。

$$\vec{\phi}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\lambda_n}{k_{eff}} \right)^i \vec{\phi}_n \quad (2.64)$$

ただし、 $\lambda_0 = k_{eff}$ である。式(2.64)は、 $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \dots$ という関係から、反復を行うごとに最大固有値に対応する成分以外が減衰していき、最大固有値に対応する固有ベクトル $a_0\vec{\phi}_0$ のみ

が残る。すなわち、反復回数 i が十分に大きい場合、式(2.64)は $a_0 \vec{\phi}_0$ に収束する。さらに、実効増倍率は以下の式により推定することができる。

$$k_{eff}^{(n)} = \frac{|\mathbf{F}\vec{\psi}^{(n)}|}{|\mathbf{A}\vec{\psi}^{(n)}|} = \frac{|\mathbf{F}\vec{\psi}^{(n)}|}{\left| \frac{1}{\lambda_0^{(n-1)}} \mathbf{F}\vec{\psi}^{(n-1)} \right|} = \frac{\sum_g \sum_r \nu \Sigma_{f,g,r} \phi_{g,r}^{(n)} V_r}{\frac{1}{\lambda_0^{(n-1)}} \sum_g \sum_r \nu \Sigma_{f,g,r} \phi_{g,r}^{(n-1)} V_r} \quad (2.65)$$

式(2.65)は、 $n-1$ 回目の反復から n 回目の反復においてどれだけ核分裂中性子が発生したかの比を表している。すなわち、外部反復 1 回の計算は中性子 1 世代文の計算に相当すると考えることができる。なお実効増倍率が 1.0 と異なる場合、世代が進むと中性子数は無限大に発散するか 0 に収束する。そこで数値計算の計算精度低下を避けるため、外部反復の最中では反復ごとに核分裂源の総和を 1.0 に規格化する。

$$\frac{1}{\lambda_0^{(n)}} \sum_g \sum_r \nu \Sigma_{f,g,r} \phi_{g,r}^{(n)} V_r = 1 \quad (2.66)$$

以上により、実効増倍率の計算が可能となる。以上の計算を式(2.67)に示す外部反復収束判定条件を満たすまで繰り返し、計算を完了する。

$$\left| \frac{k_{eff}^{(n)} - k_{eff}^{(n-1)}}{k_{eff}^{(n)}} \right| < \epsilon_{keff} \quad (\epsilon_{keff} : \text{収束判定条件}) \quad (2.67)$$

2.4. 三次元大型体系への適用

Characteristics 法では、計算体系が大型化するにつれて必要な計算時間及びメモリが大幅に増大するため、現在の計算機性能において直接 3 次元大型体系に対して Characteristics 法を適用することは困難である。そのため、実際の計算においては様々な計算コスト低減のための手法が取り入れられている。

本節では、Characteristics 法を 3 次元大型体系へ適用した例と、その際導入された工夫点について示す。

2.4.1. 大規模並列計算の利用

3 次元体系に対する Characteristics 法には、大きく分けて 2 つの問題がある。

① 3 次元空間中の CL のデータの計算及び保持

② 膨大な数の CL を辿る Transport sweep の計算負担

つまり、直接 3 次元の Characteristics 法を適用とした場合、必要となるメモリ量と計算量がそれぞれ非現実的な規模となることが問題である。そこで、それぞれの問題に対して以下の手法を取り入れることで計算コストの低減を図る試みが行われている。

① 3次元の Modular Ray tracing + Cyclic Tracking 法

原子炉は燃料ピン、燃料集合体などの組み合わせから成り、体系内に多くの繰り返し幾何形状が存在する。そのため、3次元的な Modular Ray tracing 及び Cyclic Tracking 法を採用することが可能であり、必要な CL のデータ保持量を低減することができる[12]。本手法は、2次元の Cyclic Tracking 法を次のように応用することで達成することができる。

始めに、基準体系の底面に対して2次元の Cyclic Tracking 法による Ray tracing を実施し、得られた Tracking パターンをモジュールとして保存する。Cyclic Tracking 法により作成された Tracking パターンは CL が周期性を持つことから、モジュールとして使用した場合全ての CL が直接接続される。この概念図を図 2.23 に示す。

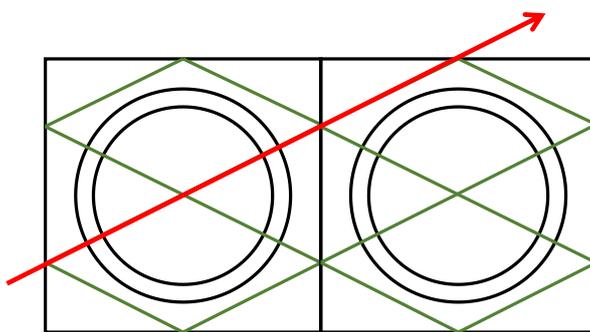


図 2.23 CL の接続

次に、CL 上に底面に垂直な長方形領域を作成する。体系底面の CL が直接接続されるため、作成された長方形領域も同様に直接接続することができる。CL が元の位置に戻るまでをひと纏まりとすると、図 2.24 に示す軸方向平面を作成することができる。

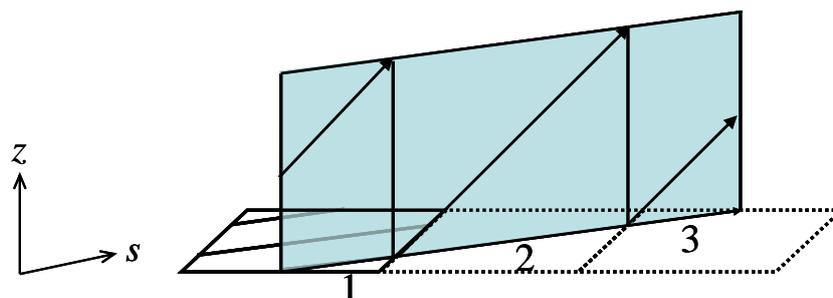


図 2.24 軸方向平面の概念図

このようにして作成された軸方向平面に対して、再び Cyclic Tracking 法による Ray tracing を実施する。以上の手順により、CL は方位角方向平面(xy 平面)と軸方向平面(sz 平面)の両方で周期性を持つようになり、3次元的に循環するようになる。従って、得られた3次元の Module を配置していくことで、体系全体に直接 Ray tracing を実施することなく、3次元的に全て直接接続された CL を得ることができる。さらに、Cyclic Tracking 法の特長上、対応する角度に対して必ず入射・放出点の一致した反射先の CL が存在するため、完全反射境界

条件との親和性が非常に高い。

本手法を用いることで、CL のデータ保持に必要なメモリ量は代表的な幾何形状分のみとなり、体系全体に Ray tracing を実施する場合と比較して劇的に低減される。そのため、直接 Characteristics 法を適用するためには、現状必要不可欠の手法となっている。

なお、更なるメモリ使用量低減のため、軸方向平面を更に細かい Module に分割する手法も考案されている[11]。軸方向平面の長さ（接続した CL 全体の長さ）は、最も短いセグメントの整数倍となる。そこで、最も短いセグメント上に作成される長方形領域にのみ Cyclic Tracking 法による Ray tracing を実施し、これを軸方向平面に当てはめていくことで軸方向平面の Ray tracing を行う。

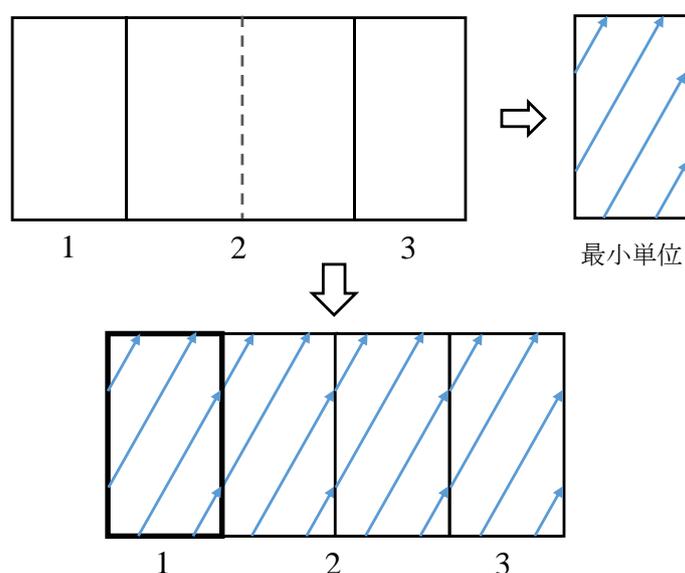


図 2.25 軸方向平面の分割

このようにすることで、必要な軸方向平面内の CL のデータ量を削減することができる。一方、Cyclic Tracking 法の適用単位が小さくなり、パス幅や極角が Cyclic Tracking 法の条件により制限されることが考えられる。つまり、非常に詳細なパス幅の使用を強いられる可能性がある。

② 大規模並列計算の使用

Characteristics 法の計算は、全ての CL を辿りながら中性子バランスを計算することにより行われる。この時、それぞれの CL における中性子バランスの計算は独立しており、並列実行が可能である。そこで、多数の演算コアを用い、Transport sweep を並列実行する試みがなされている。並列化の段階としては各演算コアに計算を実施する①空間を割り当てる段階、②角度を割り当てる段階、③CL を割り当てる段階の 3 段階がある。このようにすることで、全ての CL のセグメントにおける計算が並列に実行されるようになる。なお、この時全中性子束の加算計算等、多数の演算コアが同じデータを書き換える操作を行う場合は、デ

ータの重複書き込みが発生しないクリティカル演算を用いるか、別領域にデータを保持しておき、全てのコアの計算が終了後順次加算していくリダクション処理を実施する必要がある。また、異なるコアに割り当てられた空間の境界では、接続される CL の計算が終了していることが保証されないため、入射角度中性子束として前反復時の値で代用しなければならない場合がある。Characteristics 法の計算では、クリティカル演算やリダクション処理、コア間のデータの受け渡しが頻繁に発生するため、並列化効率を高く保つためには以上の操作を効率よく実施する必要がある。

並列計算は各コアの計算が同程度の規模となる程計算効率が高まるため、各メッシュに同一の CL を設定する 3 次元の Modular Ray tracing 法と非常に相性が良い。そのため、これらの手法は同時に用いられることが多い。

参考文献[11]では、Modular Ray tracing と大規模並列計算を組み合わせることで直接 3 次元 Characteristics 法の計算を実施した例が示されている。計算機としてはスーパーコンピュータ「Titan」[13]を使用し、Takeda ベンチマーク問題を用いて検証が行われた。その結果、Titan の演算コア 15,625 個を使用した計算により並列化効率 60%程度の計算が実現されている。また、演算コアを 500 コア程度までとした場合では 90%以上の並列化効率を保持しており、Characteristics 法の計算は並列化により効率的に計算できることが示されている。以上により、高速な三次元 MOC 計算が達成できる可能性がある。

一方、大規模な並列計算機を用意することが困難である点が問題であり、市販の一般的なワークステーション(12 コア 24 スレッド程度)では上述した計算を実行することはできない。

2.4.2. Axially Simplified Method of Characteristics 3D (ASMOC3D)

本項では、Axially Simplified Method of Characteristics 3D について示す。ASMOC3D は、四国電力社により開発された計算手法であり、SHIKOKU2 コードに実装されている[15]。3 次元大型体系への Characteristics 法の適用が困難となる原因は、CL 数が膨大となり、それに伴い CL の情報を記録するメモリ量や、各セグメントにおける中性子束の計算量が膨大となるためである。そこで、ASMOC3D では炉心軸方向に対して直接 Ray tracing は実施せず、単純化(Simplify)して取り扱うことで、必要となるメモリ量や計算時間を低減させた手法である。ASMOC3D において、3 次元問題は体系内に多数作成された 2 次元平面によって離散化して取り扱われる。

始めに、体系の底面に対して Ray tracing を実施し、CL の情報を得る。次に、CL の情報を基に、図 2.26 に示すような長方形領域を作成する。

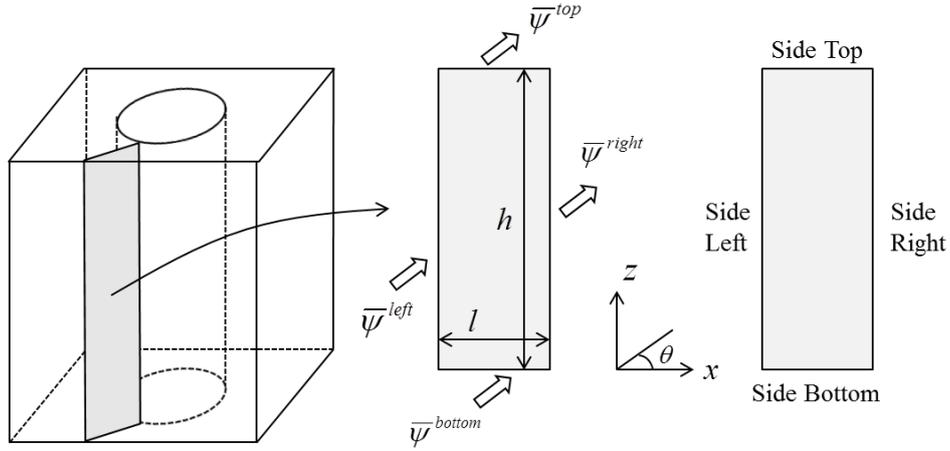


図 2.26 体系内に作成される長方形領域

図中の長方形領域はそれぞれ底辺 l が CL の長さ、高さ h が体系の高さに等しくなるように作成される。この操作をすべての CL に対して行い、体系内に多数の長方形領域を作成する。ただし、作成される各長方形領域内では軸方向に均質となるようにしなければならない。ASMOC3D では、このようにして作成される長方形領域に対して中性子バランスの方程式を解き、長方形領域内の平均角度中性子束を求める。そして得られた角度中性子束を角度及び体積に関して積分することで、体系の全中性子束の計算を行う。すなわち、直接 Characteristics 法を適用した場合の各セグメント（直線）を、2次元の平面に置き換えて実施するというものである。3次元空間に直接引かれた CL の本数よりも長方形領域の枚数は大幅に少ないため、必要なメモリや計算時間を低減することができる。

続いて、長方形領域内の角度中性子束の計算方法について述べる。 (i, j) 番目の長方形領域 (i は 2次元領域番号、 j は軸方向領域番号) について考える。長方形領域における中性子のバランス式は式(2.68)のようになる。

$$\begin{aligned}
 & -(\bar{\psi}_{i,j}^{left} - \bar{\psi}_{i,j}^{right})h_j \cos \theta - (\bar{\psi}_{i,j}^{bottom} - \bar{\psi}_{i,j}^{top})l_i \sin \theta + \sum_{i,j} \bar{\psi}_{i,j} h_j l_i \\
 & = \frac{Q_{i,j}}{4\pi} h_j l_i
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

式(2.68)を変形すると、領域平均の角度中性子束 $\bar{\psi}_{i,j}$ は以下のように表すことができる。

$$\bar{\psi}_{i,j} = \frac{\bar{\psi}_{i,j}^{left} - \bar{\psi}_{i,j}^{right}}{L_{i,j}} + \frac{\bar{\psi}_{i,j}^{bottom} - \bar{\psi}_{i,j}^{top}}{H_{i,j}} + Q'_{i,j} \tag{2.69}$$

ここで式(2.69)中の各変数は以下のものを表す。

$$Q'_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{4\pi \sum_{i,j}}, \quad L_{i,j} = \frac{\sum_{i,j} l_i}{\cos \theta}, \quad H_{i,j} = \frac{\sum_{i,j} h_j}{\sin \theta} \tag{2.70}$$

式(2.69)より、長方形領域平均の角度中性子束は領域境界における角度中性子束の平均値を

用いて計算できることが分かる。そこで、次の手順により領域境界における角度中性子束を計算する。右側または上部からの放出角度中性子束はそれぞれ軸方向位置の変数 z , CL 方向位置の変数 s を用いて $\bar{\psi}_{i,j}^{right}(z), \bar{\psi}_{i,j}^{top}(s)$ によって表せると仮定すると、それぞれの平均値は以下のように表される。

$$\bar{\psi}_{i,j}^{right} = \frac{1}{h_j} \int_{-\frac{h_j}{2}}^{\frac{h_j}{2}} \psi_{i,j}^{right}(z) dz \quad (2.71)$$

$$\bar{\psi}_{i,j}^{top} = \frac{1}{l_i} \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \psi_{i,j}^{top}(s) ds \quad (2.72)$$

$\psi_{i,j}^{right}(z)$ と $\psi_{i,j}^{top}(s)$ は MOC の基礎式に基づきあらかじめ 2 つの入射中性子束 $\psi_{i,j}^{left}(z)$ と $\psi_{i,j}^{bottom}(s)$ から計算しておく。このとき、入射角度中性子束の角度により各領域境界における放出角度中性子束を構成する成分が変わるため、式(2.71),(2.72)の計算は図 2.27 に示される 2 つの場合に分けて計算を行う。

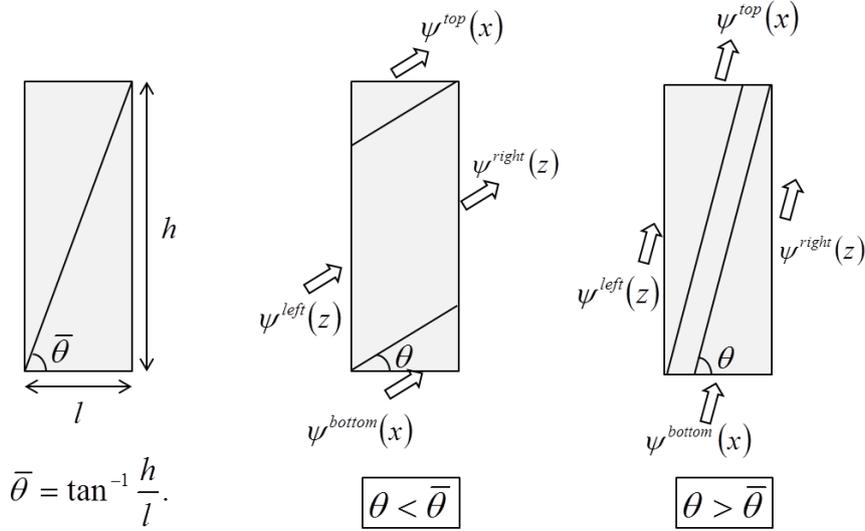


図 2.27 角度による場合分けの概念図

• $\theta < \bar{\theta}$ の場合

$$\bar{\psi}_{i,j}^{right} = \frac{1}{h_j} \left[\int_{-\frac{h_j}{2}}^{\frac{h_j}{2} + l_i \tan \theta} \left\{ \psi_{i,j}^{bottom} \left(\frac{l_i}{2} - \frac{z + \frac{h_j}{2}}{\tan \theta} \right) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{z + \frac{h_j}{2}}{\sin \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{z + \frac{h_j}{2}}{\sin \theta}} \right) \right\} dz \right. \\ \left. + \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \left\{ \psi_{i,j}^{left} (z - l_i \tan \theta) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{l_i}{\cos \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{l_i}{\cos \theta}} \right) \right\} dz \right] \quad (2.73)$$

$$\bar{\psi}_{i,j}^{top} = \frac{1}{l_i} \left[\int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \left\{ \psi_{i,j}^{left} \left(\frac{h_j}{2} - \left(s + \frac{l_i}{2} \right) \tan \theta \right) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} \right) \right\} ds \right] \quad (2.74)$$

・ $\theta > \bar{\theta}$ の場合

$$\bar{\psi}_{i,j}^{right} = \frac{1}{h_j} \left[\int_{-\frac{h_j}{2}}^{-\frac{h_j}{2} + l_i \tan \theta} \left\{ \psi_{i,j}^{bottom} \left(\frac{l_i}{2} - \frac{z + \frac{h_j}{2}}{\tan \theta} \right) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{z+\frac{h_j}{2}}{\sin \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{z+\frac{h_j}{2}}{\sin \theta}} \right) \right\} dz \right] \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{i,j}^{top} &= \frac{1}{l_i} \left[\int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2} + \frac{h_j}{\tan \theta}} \left\{ \psi_{i,j}^{left} \left(\frac{h_j}{2} - \left(s + \frac{l_i}{2} \right) \tan \theta \right) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} \right) \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{l_i}{2} + \frac{h_j}{\tan \theta}}^{\frac{l_i}{2}} \left\{ \psi_{i,j}^{bottom} \left(s - \frac{h_j}{\tan \theta} \right) \cdot e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} + Q'_{i,j} \cdot \left(1 - e^{-\Sigma_{i,j} \frac{s+\frac{l_i}{2}}{\cos \theta}} \right) \right\} ds \right] \quad (2.76) \end{aligned}$$

このようにして計算される平均放出角度中性子束は、隣接する領域 $(i+1, j)$ 及び $(i, j+1)$ において入射角度中性子束として使用され、その領域における放出角度中性子束の計算が可能になる。つまり、次のようにして、すべての領域における入射・放出角度中性子束の計算が行われる。

- (a). 境界条件より入射角度中性子束を決定する。
- (b). 式(2.73)~(2.75)を用いて入射角度中性子束から、平均放出角度中性子束を計算する。
- (c). 平均放出角度中性子束を隣接メッシュの入射角度中性子束とする。
- (d). 隣接メッシュに移動する。
- (e). (b)~(d)を繰り返す。

以上の手順によりすべての領域における入射・放出角度中性子束が求められると、それぞれにおいて式(2.69)の領域平均角度中性子束を計算することができ、これを体積分することでその領域における平均角度中性子束を求めることができるようになる。ただし、領域境界における平均の角度中性子束のみを使用して計算を行う場合（つまり、入射角度中性子束が常に定数値であると仮定する場合）、空間の離散化誤差が無視できないものとなる場合がある。特に、異なる物質の境界面や、体系の外周部等の中性子束の空間的変化の大きい領域において、その変化を正確に捉えることが困難となる。そこで、ASMOC3Dでは隣接する長方形領域の角度中性子束を用いて、入射角度中性子束を1次多項式に展開する。

$$\psi_{i,j}^{left}(z) = \bar{\psi}_{i,j}^{left} + a_{i,j}^1 \cdot z \quad \left(-\frac{h_j}{2} \leq z \leq \frac{h_j}{2} \right) \quad (2.77)$$

$$\psi_{i,j}^{bottom}(z) = \bar{\psi}_{i,j}^{bottom} + b_{i,j}^1 \cdot x \quad \left(-\frac{l_i}{2} \leq x \leq \frac{l_i}{2} \right) \quad (2.78)$$

ここで、 $a_{i,j}^1$ と $b_{i,j}^1$ は式(2.79),(2.80)により計算される。

$$a_{i,j}^1 = \frac{\bar{\psi}_{i-1,j}^{top} - \bar{\psi}_{i-1,j}^{bottom}}{h_j} \quad (2.79)$$

$$b_{i,j}^1 = \frac{\bar{\psi}_{i,j-1}^{right} - \bar{\psi}_{i,j-1}^{left}}{l_i} \quad (2.80)$$

これに加え、長方形領域内の中性子源分布に対しても式(2.81)に示すように関数展開を実施する。

$$\begin{aligned} Q'_{i,j}(z) &= \frac{1}{4\pi\Sigma_{i,j}} (c_{i,j} \cdot z + \bar{Q}_{i,j}) \\ &= c'_{i,j} \cdot z + \bar{Q}'_{i,j} \end{aligned} \quad (2.81)$$

ここで、

$$\bar{Q}'_{i,j} = \frac{\bar{Q}_{i,j}}{4\pi\Sigma_{i,j}}, \quad c'_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{4\pi\Sigma_{i,j}} \quad (2.82)$$

であり、中性子源の傾きとして導入される $c_{i,j}$ は軸方向に隣接するメッシュにおける中性子源から、式(2.83)のように計算される。

$$c_{i,j} = \frac{\bar{Q}_{i,j+1} - \bar{Q}_{i,j-1}}{\frac{h_{j+1}}{2} + h_j + \frac{h_{j-1}}{2}} \quad (2.83)$$

すなわち、中性子源の傾きは隣接する長方形領域の中性子源を内挿することで与えられる。このようにして関数展開を行った入射角度中性子束と中性子源を用いて式(2.83)による中性子収支の式を解くことにより、より精度の高い領域平均角度中性子束を求めることができる。

以上をまとめると、ASMOC3D による計算は以下の手順によって行われる。

- (a). 体系の底面に2次元で Ray tracing を行う。
- (b). 式(2.83)により中性子源の分布から中性子源の多項式の係数を決定する。
- (c). 式(2.73)-(2.76)により平均放出角度中性子束 $\bar{\psi}_{i,j}^{right}$ 及び $\bar{\psi}_{i,j}^{top}$ を計算し、放出角度中性子束の多項式 $\psi_{i,j}^{right}(z)$ 及び $\psi_{i,j}^{top}(z)$ を決定する。
- (d). 式(2.69)により長方形領域の平均角度中性子束 $\bar{\psi}_{i,j}$ を計算する。

- (e). $\psi_{i,j}^{right}(z)$ を隣接領域 $(i, j+1)$ の入射中性子束 $\psi_{i,j+1}^{left}(z)$ とする。 $\psi_{i,j}^{top}(s)$ を隣接領域 $(i, j+1)$ の入射中性子束 $\psi_{i,j+1}^{bottom}(s)$ とする。
- (f). $\bar{\psi}_{i,j}$ を領域 (i, j) の体積で積分することでその領域における平均角度中性子束を計算する。

2.5. 本章のまとめ

本節では、炉心解析の基礎となる中性子輸送方程式とその数値解法について述べた。2.2 節では中性子輸送方程式と実際の計算において適用される近似について述べた。2.3 節では中性子輸送方程式の代表的な数値解法として Characteristics 法を取り上げ、その基礎的な理論や Ray tracing の方法、そして実際の計算における計算フローについて示した。2.4 節では、Characteristics 法を三次元大型体系に適用する際の工夫として、大規模並列計算の適用及び、Characteristics 法の理論を改良して考案された ASMOC3D について述べた。

第3章 Legendre Expansion of Angular Flux Method (LEAF 法)

3.1. 本章の概要

本章では、本研究の提案手法である Legendre Expansion of Angular Flux 法(LEAF 法)について述べる。3.2 節で LEAF 法の概要について述べ、3.3 節で LEAF 法における基本的な体系の取り扱い方法である Characteristics Plane(CP)について述べる。3.4 節では LEAF 法における中性子束の計算方法について、CP 内での角度中性子束の取り扱い方法と 3 次元メッシュにおける全中性子束の計算方法についてそれぞれ説明を行い、3.5 節では、計算された中性子束から体系の中性子源について計算する方法について述べる。このとき LEAF 法では様々な中性子源の取り扱い方法を考慮しているため、各手法について詳細に説明を行う。3.6 節において LEAF 法による計算の流れを説明し、最後に 3.7 節において本章をまとめる。

3.2. LEAF 法の概要

LEAF 法は、ASMOC3D[6]の計算理論を参考に開発された輸送計算手法である。ASMOC3D 法では中性子束の空間的変化の大きな領域において、その変化を正確に捉えるために詳細な領域分割が必要とされる。しかし、多くの領域分割を実施することで計算コストが増大し、主に計算時間が非実用的な規模となる可能性がある。そこで LEAF 法では、角度中性子束及び中性子源に対して関数展開を実施し、効率的に計算を行うことで計算コストの削減を試みた。

LEAF 法の全体的な計算の流れは ASMOC3D と同様となる。以下に、LEAF 法における計算の流れを示す。

1. 計算体系に 2 次元のレイトレースを実施し、CL の情報を得る。
2. 2 次元 CL を通り、体系底面に垂直な長方形領域(CP)を設定する。
3. 全ての CP に対し輸送方程式を用いて角度中性子束の計算を実施する。
4. 着目領域内に存在する CP の CP 平均角度中性子束を数値積分することで、領域平均全中性子束を計算する。
5. 角度中性子束及び全中性子束から中性子源分布を計算する。

次節以降では、LEAF 法の計算の各ステップについて、詳細に記述する。

3.3. Characteristics Plane (CP) の作成方法

本節では、CP の概念及びその作成方法について述べる。CP は計算体系中に作成される長方形領域であり、LEAF 法の計算における基礎的な計算体系である。図 3.1 に CP の概念図を

示す。

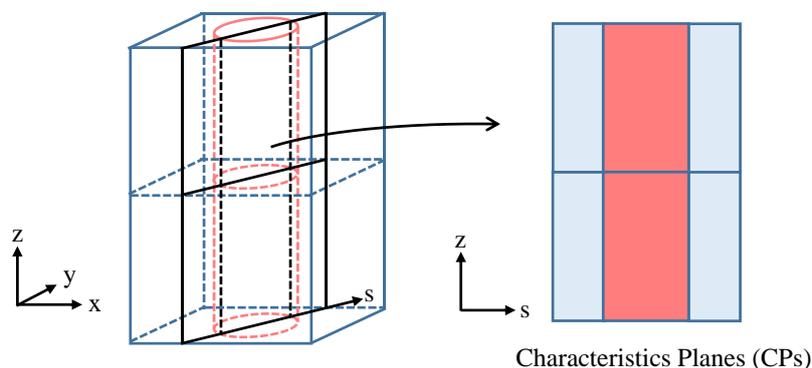


図 3.1 CP の概念図

図 3.1 では、図中左側の燃料ピンセル体系に対し CP を作成した例が示されている。図中では体系に対し 6 枚の CP が設定されている。4 枚の青色の領域はそれぞれ減速材領域に対応し、2 枚の赤色の領域はそれぞれ燃料領域に対応している。これらの長方形領域がそれぞれ CP となる。LEAF 法では、計算体系中に CP を無数に設定することで体系を離散化し、個々の CP 内において中性子輸送計算を実施することで中性子束の計算を行う。

続いて CP の作成方法について述べる。始めに、図 3.2 に示すように、計算体系を軸方向に均質な領域に離散化する。

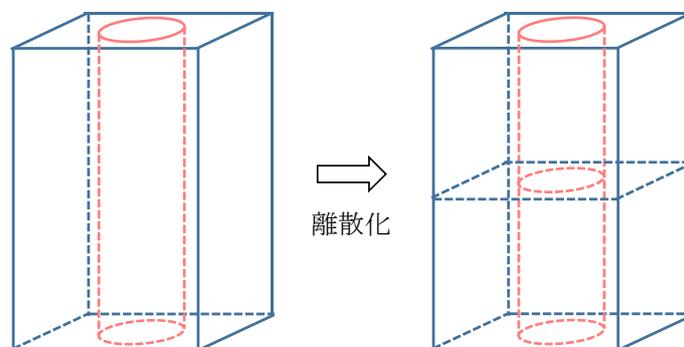


図 3.2 軸方向の離散化

CP を作成するためには、軸方向の離散化が必ず必要となる。つまり、LEAF 法は適用する計算体系が軸方向に均質な領域に離散化できることを前提としている。従って、この離散化が実施できない体系、例えば高温ガス炉の被覆粒子状燃料体系に対しては、LEAF 法を直接適用することができない。なお、LEAF 法の主な適用対象は軽水炉炉心であるが、多くのピンセル、集合体、炉心計算モデルは軸方向に均質な領域に離散化することが可能であり、LEAF 法は適用可能である。

次に、体系の底面に対し 2 次元の Ray tracing を実施し CL の情報を得る。この手順は、従

来の2次元MOCと同様となる。

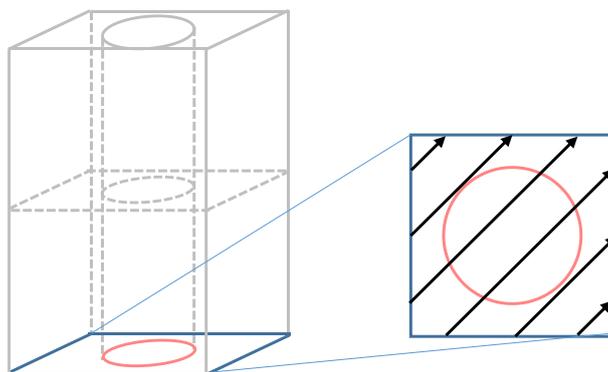


図 3.3 体系底面の Ray tracing

このとき、Ray tracing の手法として Cyclic tracking 法を用い、全ての CL が体系内で循環し、かつ CL 同士が直接接続されるようにする。ただし、離散化された各軸方向領域において異なる幾何形状が設定されている場合、全ての物質境界を体系底面に射影し、これらを含めた状態で Ray tracing を実施する必要がある。ここでは、簡単のため全ての軸方向領域が同一の幾何形状であるとする。

最後に、得られた CL を通り体系全体に渡る底面に垂直な長方形領域を設定する。長方形領域は CL のセグメント及び軸方向領域の高さの境界を用いて分割され、複数の長方形領域をなす。図 3.1 にも示した通り、これらそれぞれが CP となる。LEAF 法では、従来の MOC における CL の代わりに、CP を用いて輸送計算を実施する。体系内に無数に作成された CP により体系を離散化し、CP 上における中性子輸送を計算することで体系の中性子束の計算を実施する。

3.4. 中性子束の計算方法

本節では、LEAF 法における中性子束の計算方法について述べる。LEAF 法において中性子束の計算は、大別すると(ア) CP 内の角度中性子束の計算、(イ) 3次元メッシュの全中性子束の計算に分ける事ができる。以下ではこのそれぞれについて述べる。

3.4.1. CP 内角度中性子束

ある中性子パス上における角度中性子束は、1次元の輸送方程式に対しエネルギー群や飛行方向、空間の離散化近似を適用してこれを解くことで、式(3.1)により与えられる。

$$\psi(s) = \psi(0)e^{-\Sigma s} + \int_0^s Q(s')e^{-\Sigma(s-s')} ds' \quad (3.1)$$

式(3.1)は、体系に入射する角度中性子束 $\psi(0)$ とセグメント長 s が与えられれば、体系内の任意の位置における角度中性子束が解析的に求められることを示している。本節では、式(3.1)を基に CP 境界及び CP 内部の角度中性子束分布の導出を行う。

始めに、計算体系中に作成されたある CP について考える。図 3.4 に示すように、CP の中心を原点とする s - z 座標系を設定し、極角 θ 方向の角度中性子束について考える。角度中性子束は CP の左側境界及び下側境界から入射し、CP を通過して CP 右側境界及び上側境界から放出される。なお、ここでは極角は s 軸とのなす角として定義する。

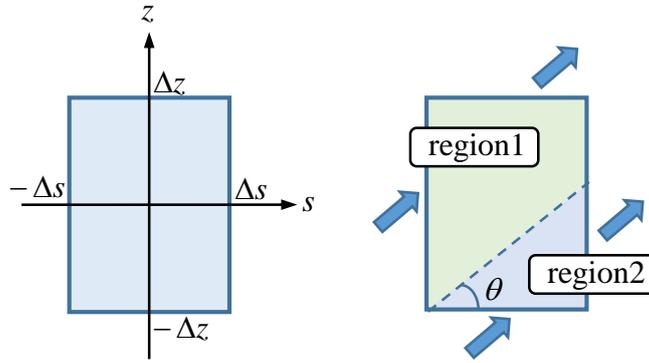


図 3.4 CP の座標系

直接 Characteristics 法を適用する場合は、CP に対して Ray tracing を実施し、代表的な CL に対し、入射位置やその長さを予め記憶しておく。これは、複雑な幾何形状に対して想定される全ての CL (つまり Ray tracing の幅を 0 とした場合の CL) を考慮することが困難であるためである。一方 LEAF 法では、均質な長方形領域のみを基礎的な計算体系として用いる。そのため、CP 内の CL の情報はすべて解析的に計算が可能であり、CP 内において z 軸方向の Ray tracing の幅を 0 とした場合に相当する計算を実施することができる。

今、CP 内の点 (s, z) へ到達するある中性子パスに着目する。中性子パスが CP のどの境界から入射するか、つまり図 3.4 において点 (s, z) が region1 または 2 のどちらに属するかにより場合分けすることで、この中性子パスの長さ $t(s, z)$ は解析的に計算することができる。

それぞれの場合について、中性子パスの長さは式(3.2),(3.3)のように計算できる。

点 (s, z) が region1 に属する場合 (中性子パスが左側境界から入射する場合)

$$t_1(s, z) = \frac{z + \Delta z}{\sin \theta} \quad (3.2)$$

点 (s, z) が region2 に属する場合 (中性子パスが下側境界から入射する場合)

$$t_2(s, z) = \frac{s + \Delta s}{\cos \theta} \quad (3.3)$$

この時、点 (s, z) へ到達する中性子パスの CP への入射位置 (s^{in}, z^{in}) は式(3.4),(3.5)のように計算できる。

点 (s, z) が region1 に属する場合 (中性子パスが左側境界から入射する場合)

$$\begin{cases} s_1^{in} = -\Delta s, \\ z_1^{in} = z - (s + \Delta s)\tan\theta. \end{cases} \quad (3.4)$$

点 (s, z) が region2 に属する場合（中性子パスが下側境界から入射する場合）

$$\begin{cases} s_2^{in} = s - \frac{z + \Delta z}{\tan\theta}, \\ z_2^{in} = -\Delta z. \end{cases} \quad (3.5)$$

式(3.2)~(3.5)は、CP 内の任意の位置へ到達する中性子パスに関して、その入射位置及びパスの長さを与える。従って、式(3.1)に中性子パスの情報と、境界条件として入射角度中性子束の値を与えることで、CP 内の任意の位置における角度中性子束の値を計算することができる。

ここで、CP の左側境界から入射する角度中性子束 $\psi_m^{in,L}(z^{in})$ 及び下側境界から入射する角度中性子束 $\psi_m^{in,B}(s^{in})$ がそれぞれ式(3.6),(3.7)により表されているとする。

$$\psi_m^{in,L}(z^{in}) = \sum_i a_i P_i(z^{in}) \quad (3.6)$$

$$\psi_m^{in,B}(s^{in}) = \sum_i b_i P_i(s^{in}) \quad (3.7)$$

ここで $P_i(x)$ は CP の幅及び高さを用いて[-1, 1]に規格化された i 次のルジャンドル多項式を表し、 a_i と b_i はルジャンドル多項式の係数を表す。例として、 $i=0\sim 2$ 次までのルジャンドル多項式を以下に示す。

$$P_0(x) = 1, \quad (3.8)$$

$$P_1(x) = \frac{x}{\Delta s}, \quad (3.9)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3x^2}{\Delta s^2} - 1 \right). \quad (3.10)$$

つまり、CP 境界からの入射角度中性子束が入射位置の連続関数としてルジャンドル多項式展開された形式で与えられているとする。CP 内の位置 (s, z) における角度中性子束 $\psi_m(s, z)$ は、式(3.1)に式(3.2),(3.3),(3.6),(3.7)を代入することで以下のように表される。

点 (s, z) が region1 に属する場合

$$\psi_{m,1}(s, z) = \psi_m^{in,L}(z^{in}) e^{-\Sigma_s t_1(s,z)} + \int_0^{t_1(s,z)} Q(t') e^{-\Sigma_s \{t_1(s,z)-t'\}} dt' \quad (3.11)$$

点 (s, z) が region2 に属する場合

$$\psi_{m,2}(s, z) = \psi_m^{in,B}(s^{in}) e^{-\Sigma_s t_2(s,z)} + \int_0^{t_2(s,z)} Q(t') e^{-\Sigma_s \{t_2(s,z)-t'\}} dt' \quad (3.12)$$

CP 境界から放出される角度中性子束は、式(3.11)及び(3.12)に対し放出位置の座標を代入することで計算できる。この時、放出位置となる CP 右側境界及び上側境界が region1 または 2 のどちらに属するかは、取り扱う極角方向により異なる。

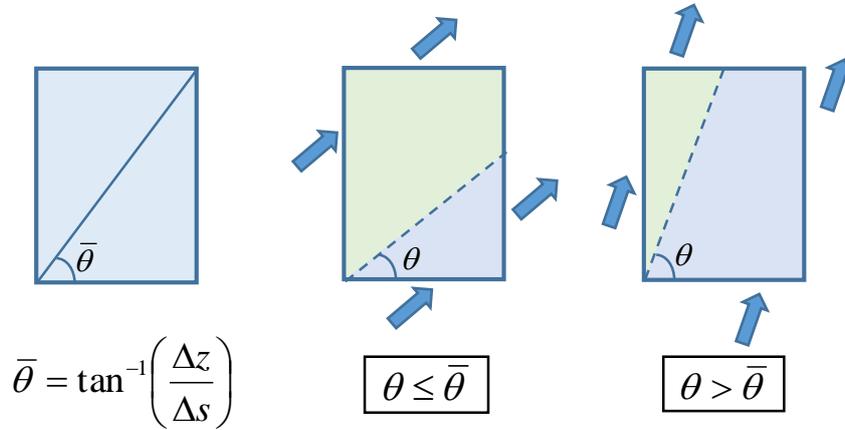


図 3.5 極角 θ による region 設定の場合分け概念図

そこで図 3.5 に示す基準角 $\bar{\theta}$ を定義し、これにより場合分けして取り扱う。すなわち、 $\theta \leq \bar{\theta}$ のとき右側境界は region1 及び 2 の両方に属し、上側境界は region1 のみに属する。また $\theta > \bar{\theta}$ のとき右側境界は region1 のみに属し、上側境界は region1 及び 2 の両方に属することとなる。それぞれの場合について、放出角度中性子束は以下ようになる。

$\theta \leq \bar{\theta}$ の場合

$$\psi_m^{out,R}(z) = \begin{cases} \psi_{m,2}(\Delta s, z) & [-\Delta z \leq z \leq \alpha] \\ \psi_{m,1}(\Delta s, z) & [\alpha \leq z \leq \Delta z] \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\psi_m^{out,T}(s) = \psi_{m,1}(s, \Delta z) \quad [-\Delta s < s < \Delta s] \quad (3.14)$$

$\theta > \bar{\theta}$ の場合

$$\psi_m^{out,R}(z) = \psi_{m,2}(\Delta s, z) \quad [-\Delta z \leq z \leq \Delta z] \quad (3.15)$$

$$\psi_m^{out,T}(s) = \begin{cases} \psi_{m,1}(s, \Delta z) & [-\Delta s < s < \beta] \\ \psi_{m,2}(s, \Delta z) & [\beta \leq s \leq \Delta s] \end{cases} \quad (3.16)$$

ここで式(3.13)~(3.16)中の α は、それぞれ CP 右側境界線と region1 と 2 の境界の交点の z 座標を表し、 β は CP 上側境界線と region1 と 2 の境界の交点の s 座標を表す。

$$\alpha = 2\Delta s \tan \theta - \Delta z \quad (3.17)$$

$$\beta = \frac{2\Delta z}{\tan \theta} - \Delta s \quad (3.18)$$

このようにして得られた放出角度中性子束は与えられた条件下で厳密な解であり、CP 境界上における位置の連続関数となる。

しかしながら、式(3.13)~(3.16)により計算される放出角度中性子束の関数は非常に煩雑なものとなる。そこで LEAF 法では、放出角度中性子束の位置依存性をルジャンドル多項式展開する。すなわち、最終的な放出角度中性子束 $\psi_m^{out,R}(z)$ 及び $\psi_m^{out,T}(s)$ は式(3.19)及び(3.20)により表される。

$$\psi_m^{out,R}(z) \approx \sum_i a'_i P_i(z) \quad (3.19)$$

$$\psi_m^{out,T}(s) \approx \sum_i b'_i P_i(s) \quad (3.20)$$

ここで、式(3.19), (3.20)中の a'_i 及び b'_i は i 次のルジャンドル多項式の係数を表し、ルジャンドル多項式の直交性から式(3.21)及び(3.22)のように計算される。

$$a'_i = \frac{\int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi_m^{out,R}(z) P_i(z) dz}{\int_{-\Delta z}^{\Delta z} [P_i(z)]^2 dz} \quad (3.21)$$

$$b'_i = \frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \psi_m^{out,T}(s) P_i(s) ds}{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} [P_i(s)]^2 ds} \quad (3.22)$$

以上により、放出角度中性子束の計算が完了する。式(3.19)及び(3.20)により表される角度中性子束は、入射角度中性子束と同様にルジャンドル多項式展開されているため、隣接する次の CP に対し入射角度中性子束としてそのまま使用することができる。そして同様の手順

により、放出角度中性子束を計算することができる。以上を繰り返すと、全ての CP に対して入射・放出角度中性子束を計算することができる。

次に、CP 平均角度中性子束の計算方法について述べる。

これまでの手順により CP 内の任意の位置における角度中性子束が求められているため、これを CP 内の面積で平均することで CP 平均角度中性子束を求めることができる。従って、CP 内平均角度中性子束は式(3.23)により計算される。

$$\bar{\psi}_m^{CP} = \frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi_m(s, z) dz ds}{4\Delta s \Delta z} \quad (3.23)$$

ここで、CP 内における 2 次元の輸送方程式について考える。

$$\mu_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial s} + \eta_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial z} + \Sigma_t \psi_m(s, z) = Q_m(s, z) \quad (3.24)$$

式(3.24)の両辺を CP の面積内で積分すると次式が得られる。

$$\iint_S \left(\mu_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial s} + \eta_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial z} \right) ds dz + \Sigma_t \iint_S \psi_m(s, z) ds dz = \iint_S Q_m(s, z) ds dz \quad (3.25)$$

ここで、式(3.25)中左辺第 1 項についてガウスの発散定理を適用すると、式(3.26)のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\mu_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial s} + \eta_m \frac{\partial \psi_m(s, z)}{\partial z} \right) ds dz &= \oint_C \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi_m(s, z) dl \\ &= (\bar{\psi}_m^{in,L} - \bar{\psi}_m^{out,R}) \cos \theta + (\bar{\psi}_m^{in,B} - \bar{\psi}_m^{out,T}) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.26)$$

ただし、式(3.26)中の $\bar{\psi}_m^{in,L}$, $\bar{\psi}_m^{in,B}$, $\bar{\psi}_m^{out,R}$, $\bar{\psi}_m^{out,T}$ はそれぞれ CP 境界における平均角度中性子束を表す。従って、両辺を CP の面積 $4dsdz$ で割り整理することで式(3.27)を得る。

$$\bar{\psi}_m^{CP} = \frac{\bar{\psi}_m^{in,L} - \bar{\psi}_m^{out,R}}{\Sigma_t 2\Delta s} \cos \theta + \frac{\bar{\psi}_m^{in,B} - \bar{\psi}_m^{out,T}}{\Sigma_t 2\Delta z} \sin \theta + \frac{\bar{Q}^{CP}}{\Sigma_t} \quad (3.27)$$

ただし式(3.27)中の $\bar{\psi}_m^{CP}$, \bar{Q}^{CP} は式(3.28)のものを表す。

$$\bar{\psi}_m^{CP} = \frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi_m(s, z) dz ds}{4\Delta s \Delta z}, \quad \bar{Q}_m^{CP} = \frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} Q_m(s, z) dz ds}{4\Delta s \Delta z} \quad (3.28)$$

$\bar{\psi}_m^{in,L}, \bar{\psi}_m^{in,B}, \bar{\psi}_m^{out,R}, \bar{\psi}_m^{out,T}$ 値はルジャンドル多項式の定義から、CP 境界における角度中性子束をルジャンドル多項式展開した場合の 0 次の項に等しい。つまり、CP 境界における入射・放出角度中性子束がそれぞれ式(3.6),(3.7),(3.19)及び(3.20)で表されているとき、式(3.29)~(3.32)の関係式が成り立つ。

$$\bar{\psi}_m^{in,L} = a_0 \quad (3.29)$$

$$\bar{\psi}_m^{in,B} = b_0 \quad (3.30)$$

$$\bar{\psi}_m^{out,R} = a'_0 \quad (3.31)$$

$$\bar{\psi}_m^{out,T} = b'_0 \quad (3.32)$$

従って、CP 境界における入射・放出角度中性子束の計算が完了している場合、CP 平均角度中性子束は式(3.33)により計算できる。

$$\bar{\psi}_m^{CP} = \frac{a_0 - a'_0}{\Sigma_t 2\Delta s} \cos \theta + \frac{b_0 - b'_0}{\Sigma_t 2\Delta z} \sin \theta + \frac{\bar{Q}^{CP}}{\Sigma_t} \quad (3.33)$$

3.4.2. 全中性子束

本項では、3次元領域における全中性子束の計算方法について述べる。前項までの手順により、全ての CP において CP 平均の角度中性子束が求められているとする。LEAF 法において全中性子束は、Characteristics 法における全中性子束の計算と似た考え方をを用いて計算される。

まず、着目領域 r の領域平均角度中性子束を計算する。理想的には、着目領域内に作成された全ての CP に対し CP 平均角度中性子束を積分することで、領域平均角度中性子束は式(3.34)により与えられる。

$$\bar{\psi}_{g,m,r} = \frac{\int_{k \in r} \bar{\psi}_{g,m,k}^{CP} dV}{\int_{k \in r} dV} \quad (3.34)$$

式(3.34)は領域内の CP の枚数 k を $k \rightarrow \infty$ とすることで厳密な解を与えるが、この計算は数値計算の観点から困難である。そこで、LEAF 法ではこれを離散化して取り扱う。

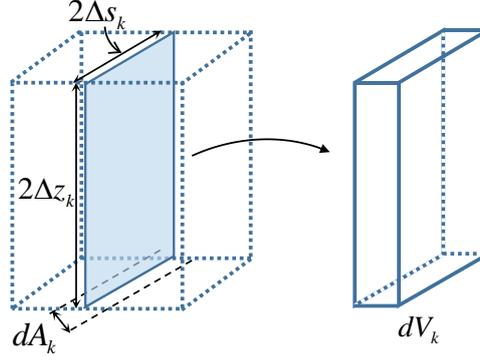


図 3.6 CP が代表する微小体積

図 3.6 に示すように、個々の CP がその周辺の微小領域 dV_k を代表するとみなし、体系を CP を用いて離散化する。このとき、微小領域 dV_k は底面における Ray tracing の幅 dA_k と CP の幅 Δs_k 、高さ Δz_k を用いて以下のように定義される。

$$dV_k = dA_k (2\Delta s_k) (2\Delta z_k) \quad (3.35)$$

そして、各 CP の CP 平均角度中性子束を CP が代表する微小体積を重みとして数値積分することで、着目領域 r の平均角度中性子束を得る。

$$\bar{\psi}_{g,m,r} \approx \frac{\sum_K \bar{\psi}_{g,m,k}^{CP} dV_k}{\sum_K dV_k} \quad (3.36)$$

そして得られた領域平均角度中性子束を、角度に関して重み付き積分することで、着目領域の全中性子束を計算することができる。

$$\bar{\phi}_{g,m,r} = \int_{4\pi} \bar{\psi}_{g,r}(\vec{\Omega}) d\Omega \approx \sum_m \omega_m \bar{\psi}_{g,m,r} = \sum_m \omega_m \frac{\sum_K \bar{\psi}_{g,m,k}^{CP} dV_k}{\sum_K dV_k} \quad (3.37)$$

式(3.37)は、空間及び角度に関する積分の離散化形式である。これらの積分はそれぞれ空間 k に関する和と角度 m に関する和によって近似されている。従って、Characteristics 法同様、式(3.37)が正確な解を与えるためには、空間と角度の離散化は十分細かくなければならない。

3.5. 中性子源の計算方法

本節では、LEAF法における中性子源の計算方法について述べる。Characteristics法による計算コードにおいては、“Flat Source”近似が広く用いられている。Flat Source近似とは、離散化した領域内で中性子源は一様に分布しているとみなす近似であり、これを導入することで取り扱うべき問題を単純化することができるという利点を持つ。しかし、中性子束の空間的な変化を正確に捉えるためには非常に詳細な領域分割が必要となる問題があり、計算コストの増大の原因となっている。

先行研究における計算手法効率化の試みとして、メッシュ内の中性子源分布を関数展開し、より高次の表現を用いることで、効率的な計算を実施することができるという報告があった[16,17,18,19,20]。中性子源の関数展開とは、体系に連続的に分布する中性子源を、なんらかの手法により真の分布を可能な限り再現するよう多項式の和により表現することである。例として、1次までの関数展開を行った場合、中性子源 $Q_g(x, y, z)$ は式(3.38)のように表すことができる。

$$Q_g(x, y, z) = q_g^x x + q_g^y y + q_g^z z + q_g^0 \quad (3.38)$$

メッシュ内の中性子源が傾きを持つことを許容することで、中性子源の分布は比較的なめらかな表現が可能となり、傾きを与えない場合と比較して少ないメッシュ分割数においても高い再現性を有する。すなわち、計算効率の向上を図ることができる。

LEAF法では、中性子源の取り扱い方法として、(ア)Flat Source近似 (イ)メッシュ平均全中性子束を利用した1次展開 (ウ)面平均全中性子束を利用した1次展開 (エ)重み付き残差法の4手法の適用を検討した。以下では、上述のそれぞれについて、その理論を示す。なお、本章では計算体系のメッシュとして直方体メッシュを想定して理論の説明を行う。一般的な幾何形状に対する中性子源分布の計算理論については、付録を参照されたい。また、本節で述べる中性子源項の計算手法はいずれも式(3.39)に示す全中性子束分布を計算する。

$$\phi_g(x, y, z) = \phi_g^x x + \phi_g^y y + \phi_g^z z + \phi_g^0 \quad (3.39)$$

そして得られた全中性子束分布を式(3.40)に代入することで、中性子源分布を計算する。

$$Q_{g,m}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{g'}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'}(x, y, z) + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'}^G \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(x, y, z) \right) \quad (3.40)$$

従って、以下ではそれぞれの手法における全中性子束分布の計算方法について述べる。

3.5.1. Flat Source 近似

Flat Source近似とは、離散化した領域内で中性子源は一様に分布しているとみなす近似であり、様々な炉心解析手法で広く用いられている。本手法においてメッシュ内の中性子源は次のように表される。

$$Q(x, y, z) = q_0 \quad (3.41)$$

式(3.41)中の q_0 はメッシュ平均の中性子源を表す。また、エネルギー群の添字は省略した。

Flat Source 近似を用いるためには、まず着目するメッシュ内において中性子束が一定であるとみなす(中性子束が一定となる領域を Flat Flux Region と呼ぶ)。

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 \quad (3.42)$$

式(3.42)中の ϕ_0 はメッシュ平均の全中性子束に対応し、反復計算の過程で式(3.37)により計算されている。したがって、得られたメッシュ平均全中性子束の値を式(3.40)に代入することで、Flat Source 近似を適用した場合の中性子源項を計算することができる。

3.5.2. メッシュ平均全中性子束を利用した 1 次展開

中性子束の分布は連続的であることから、着目メッシュの中性子束の傾きは注意のメッシュの中性子束分布と関連を持つことが予想される。そこで本手法では、着目メッシュの中性子束の傾きを周囲のメッシュの平均中性子束の値を内挿することにより計算する。始めに、全てのメッシュの平均全中性子束が既知であるとする。x 方向に i 番目、y 方向に j 番目、z 方向に k 番目のメッシュ全平均中性子束を $\bar{\phi}_{i,j,k}$ 、x 方向のメッシュ幅を $dx_{i,j,k}$ とする

と、x 方向の傾き $\phi_{i,j,k}^x$ は式(3.43)により計算できる。

$$\phi_{i,j,k}^x = \frac{\bar{\phi}_{i+1,j,k} - \bar{\phi}_{i-1,j,k}}{\frac{dx_{i-1,j,k}}{2} + dx_{i,j,k} + \frac{dx_{i+1,j,k}}{2}} \quad (3.43)$$

式(3.43)による計算の概念図を図 3.7 に示す。

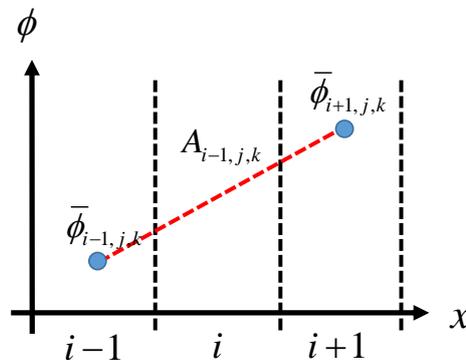


図 3.7 メッシュ平均全中性子束内挿の概念図

同様に、y,z 方向の傾きを計算する。着目メッシュの y,z 方向のメッシュ幅をそれぞれ $dy_{i,j,k}$, $dz_{i,j,k}$ とすると、y,z 方向の傾き $B_{i,j,k}$ 及び $C_{i,j,k}$ はそれぞれ式(3.44),(3.45)により計算できる。

$$\phi_{i,j,k}^y = \frac{\bar{\phi}_{i,j+1,k} - \bar{\phi}_{i,j-1,k}}{\frac{dy_{i,j-1,k}}{2} + dy_{i,j,k} + \frac{dy_{i,j+1,k}}{2}} \quad (3.44)$$

$$\phi_{i,j,k}^z = \frac{\bar{\phi}_{i,j,k+1} - \bar{\phi}_{i,j,k-1}}{\frac{dz_{i,j,k-1}}{2} + dz_{i,j,k} + \frac{dz_{i,j,k+1}}{2}} \quad (3.45)$$

定数項としては、着目メッシュの平均値をそのまま与える。

$$\phi_{i,j,k}^0 = \bar{\phi}_{i,j,k} \quad (3.46)$$

本手法では領域平均中性子源の値を用いて非常にシンプルに傾きを導出しているため、実装が容易である。一方、工学的近似による手法であるため、輸送方程式から厳密に傾きを導出する手法と比較すると精度が劣る可能性がある。また、本手法はメッシュ平均全中性子束の値のみを用いているため、体系の外周部や異なる物質が隣接する領域では、急激に変化する分布を捉えきれない可能性が考えられる。

3.5.3. 面平均全中性子束を利用した 1 次展開

メッシュ平均全中性子束を利用した内挿では隣接する 3 メッシュからの内挿により中性子源の傾きを求めているため、計算精度が体系の非均質性に強く影響される。一般的に内外挿の精度は内外挿距離が短いほど高くなるため、より狭い範囲で近似を行うことが望ましい。そこで、着目メッシュ境界面における平均全中性子束を計算し、これを内挿することで中性子源の傾きを求めることを考える。

体系中の直方体メッシュに着目し、メッシュの各面をそれぞれ下図のように名前をつける。

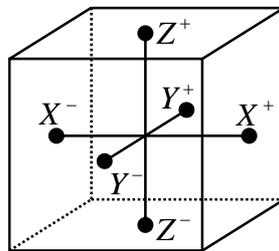


図 3.8 着目メッシュ図

LEAF 法では、着目メッシュ Z 方向に CP を作成するため、Z 方向と XY 方向で体系の取り扱い方法が異なる。それ故、面平均中性子束の計算方法は Z 方向と XY 方向で若干異なる。

以下ではそれぞれのケースについて場合分けして記載する。

◆Z方向について

Z方向の面（XY平面に平行な面）に入射・放出する角度中性子束 $\psi_{a,k,p}^{Z+}$ を積分し、平均値を計算する。この計算は、一般的な2次元のMOCと同様にして考えれば良い。

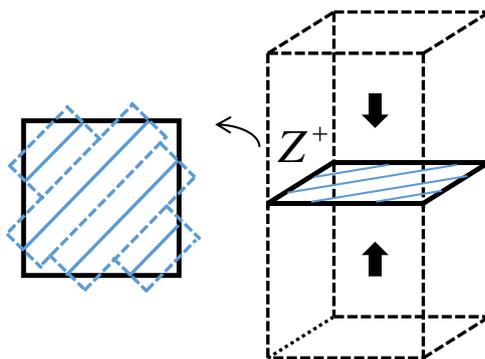


図 3.9 Z方向の着目位置

方位角 a の方向, k 番目のCPがZ+面を通過しているとする。このとき、CP中の極角 p の角度中性子束はCP境界からZ+面へ放出される。Z+面に対して放出される全ての角度中性子束を角度、面積に対して重み付き積分を実施することで、面平均中性子束を計算することができる。

$$\bar{\phi}_{S^{Z+}} = \sum_a \omega_a \sum_k \delta A_{m,k} s_{m,k} \sum_p \omega_p \psi_{a,k,p}^{Z+} \quad (3.47)$$

◆XY方向について

X方向とY方向は同様に扱うことができるため、X方向を例に計算方法を説明する。

X方向の面（YZ平面に平行な面）に入射・放出される角度中性子束 $\psi_{a,k,p}^{X+}$ を積分し、平均値を計算する。基本的な計算方法はZ方向と同様であり、2次元のMOCの計算を行うように角度中性子束の平均値を計算すれば良い。

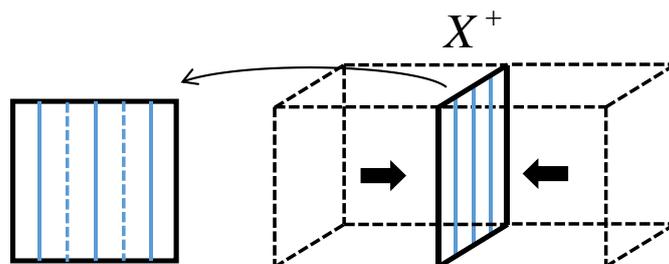


図 3.10 X方向の着目位置

従って、X+面における面平均中性子束は次式により計算できる。

$$\bar{\phi}_{S^{X+}} = \sum_a \omega_a \frac{\sum_k \delta A'_{m,k} s_{m,k} \sum_p \omega_p \psi_{a,k,p}^{X+}}{\sum_k \delta A'_{m,k} s_{m,k}} \quad (3.48)$$

XY 方向においては CP の通過領域の重みを表す $\delta A'_{m,k}$ は Equidistant レイトレースを実施した場合、面積に関する重みに相当する式(3.47)中の $\delta A'_{m,k} s_{m,k}$ 部分は各方位角に対して一定となる。したがって、式(3.47)は次のように書き換えることができる。

$$\bar{\phi}_{S^{X+}} = \sum_a \omega_a \frac{\sum_k \sum_p \omega_p \psi_{a,k,p}^{X+}}{K} \quad (3.49)$$

ただし、式(3.49)中の K は方位角方向 m の CP で X+面を通過するものの数を表す。以上のようにして面平均角度中性子束が計算できると、これを内挿することで着目メッシュの全中性子束の傾きを求めることができる。

$$\phi_{i,j,k}^x = \frac{\bar{\phi}_{S^{X+}} - \bar{\phi}_{S^{X-}}}{dx_{i,j,k}} \quad (3.50)$$

$$\phi_{i,j,k}^y = \frac{\bar{\phi}_{S^{Y+}} - \bar{\phi}_{S^{Y-}}}{dy_{i,j,k}} \quad (3.51)$$

$$\phi_{i,j,k}^z = \frac{\bar{\phi}_{S^{Z+}} - \bar{\phi}_{S^{Z-}}}{dz_{i,j,k}} \quad (3.52)$$

定数項としては、メッシュ平均全中性子束を用いる手法同様着目メッシュの平均値をそのまま与える。

$$\phi_{i,j,k}^0 = \bar{\phi}_{i,j,k} \quad (3.53)$$

本手法では面平均全中性子束の計算が必要となるが、メッシュ平均全中性子束の内挿と比較して、内挿距離が短くなるため傾きの近似精度が向上することが期待される。また、体系が直方体メッシュに分割されている場合、面平均全中性子束の計算は CMFD 加速法に用いる中性子流の計算と非常によく似たものとなり、該当部分のコードを流用することができる。従って、実装は容易である。一方、unstructured geometry に対する面平均全中性子束の計算は、直方体メッシュの場合と比較して煩雑なものとなる。

3.5.4. 重み付き残差法

中性子源の関数展開に対し重み付き残差法を適用する。重み付き残差法は、様々な工学分野でよく知られている関数展開手法であり、主に微分方程式の境界値問題の解法に用いられる。本手法において着目領域の全中性子束分布は、展開の前後で式(3.54)~(3.57)に表される1次までのモーメントを保存するように決定される。

$$M_0 = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \phi(x, y, z) dV \quad (3.54)$$

$$M_x = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} x\phi(x, y, z) dV \quad (3.55)$$

$$M_y = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} y\phi(x, y, z) dV \quad (3.56)$$

$$M_z = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} z\phi(x, y, z) dV \quad (3.57)$$

このようにすることで、最小二乗法と等価な数学的に最も確からしい1次の全中性子束分布を得ることができる。式(3.54)~(3.57)の計算を CL(または CP)に沿った数値的な計算により実施する。

さて、直接3次元MOC計算を行う場合について考える。3次元体系における空間の積分(内積計算)を CL に沿った積分に置き換えると次のようになる。

$$\frac{1}{V_r} \int_{V_r} f(x, y, z)g(x, y, z) dV = \frac{1}{V_r} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \delta A_p \sum_i \left[\int_0^{t_{m,k,p,i}} f(t)g(t) dt \right] \quad (3.58)$$

ここで式(3.58)の意味を考えると、左辺は着目空間における関数 $f(x, y, z)$ と $g(x, y, z)$ の内積を解析的に表したものであり、右辺は積分計算を角度、空間で離散化し、CLに沿った積分に置き換えたものを表している。右辺について更に詳しく見ると、式を分割することで式中の各部分は以下の様な意味を持つことが分かる。

$$\sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \quad \text{部分} \quad : \text{方位角に関する重み付き数値積分}$$

$$\sum_p \omega_p \quad \text{部分} \quad : \text{極角に対する重み付き数値積分}$$

$$\delta A_p \sum_i \left[\int_0^{t_{m,k,p,i}} f(t)g(t)dt \right] \quad : \text{ある CP 内における、ある方向の内積の数値積分}$$

すなわち、3次元体系における積分を MOC において数値的に計算する場合は、次のようなステップを踏めばよい。

- ① 方位角を離散化 (水平方向レイトレースの実施)
- ② 極角を離散化 (垂直方向レイトレースの実施)
- ③ 角度中性子束モーメントの計算 (ある CP 内、ある極角方向のモーメントを数値的計算)
- ④ 極角方向の和を計算 (極角方向積分モーメントを計算)
- ⑤ 方位角方向の和を計算 (極角方向積分モーメントを方位角方向に数値積分)

つまり、直接 MOC でモーメントを計算する場合でも、仮想的な CP を作成して CP 内の角度中性子束モーメントを数値的に計算し、これを積分することで計算を行っていると考えることができる。LEAF 法においてモーメントを計算する場合、step③の部分を実験的に置き換えれば良い。すなわち、ある CP 内における角度中性子束の計算を次のように置き換える。

$$\delta A_p \sum_i \left[\int_0^{t_{m,k,p,i}} f(t)g(t)dt \right] = \int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} f(s,z)g(s,z)dsdz \quad (3.59)$$

したがって、LEAF 法で重み付き残差法を適用する場合、次式によって計算されるモーメント量を保存するよう係数を決定すれば良い。

$$\frac{1}{V_r} \int_{V_r} \phi(x,y,z)dV = \frac{1}{V_r} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi(s,z)dsdz \right] \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{V_r} \int_{V_r} x\phi(x,y,z)dV = \frac{1}{V_r} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} x(s,z)\psi(s,z)dsdz \right] \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{V_r} \int_{V_r} y\phi(x,y,z)dV = \frac{1}{V_r} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} y(s,z)\psi(s,z)dsdz \right] \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{V_r} \int_{V_r} z \phi(x, y, z) dV = \frac{1}{V_r} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} z(s, z) \psi(s, z) ds dz \right] \quad (3.63)$$

式(3.60)~(3.63)の左辺は式(3.39)を代入することで計算できる。また、右辺は LEAF 法の計算により数値解が得られる。したがって未知数 $\phi_x^g, \phi_y^g, \phi_z^g, \phi_0^g$ に関する 4 つの式を得ることができ、これを解くことで全中性子束分布を計算することができる。ここで、LEAF 法では CP 内において角度中性子束分布を次式によりルジャンドル多項式の和に展開することができる。

$$\frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi(s, z) ds dz}{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} ds dz} = a_{00} \quad (3.64)$$

$$\frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \frac{s}{\Delta s} \psi(s, z) ds dz}{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \left(\frac{s}{\Delta s} \right)^2 ds dz} = a_{10} \quad (3.65)$$

$$\frac{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \frac{z}{\Delta z} \psi(s, z) ds dz}{\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \left(\frac{z}{\Delta z} \right)^2 ds dz} = a_{10} \quad (3.66)$$

これらを変形すると

$$\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \psi(s, z) ds dz = 4 \Delta s \Delta z a_{00} \quad (3.67)$$

$$\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} s \psi(s, z) ds dz = \frac{4}{3} \Delta s^2 \Delta z a_{10} \quad (3.68)$$

$$\int_{-\Delta s}^{\Delta s} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} z \psi(s, z) ds dz = \frac{4}{3} \Delta s \Delta z^2 a_{01} \quad (3.69)$$

となり、式(3.67)~(3.69)を式(3.60)~(3.63)へ代入して整理することで、最終的に LEAF 法において使用される展開係数の計算式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\phi_g^x &= \frac{3}{8\Delta x^3 \Delta y \Delta z} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(x_{in} + \Delta s \cos \theta)(4\Delta s \Delta z \times a_{00}) + \cos \theta \left(\frac{4}{3} \Delta s^2 \Delta z \right) \times a_{10} \right] \\ &= \frac{3}{4\Delta x^3 \Delta y} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(x_{in} + \Delta s \cos \theta)(2\Delta s \times a_{00}) + \cos \theta \left(\frac{2}{3} \Delta s^2 \right) \times a_{10} \right]\end{aligned}\quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}\phi_g^y &= \frac{3}{8\Delta x \Delta y^3 \Delta z} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(y_{in} + \Delta s \sin \theta)(4\Delta s \Delta z \times a_{00}) + \sin \theta \left(\frac{4}{3} \Delta s^2 \Delta z \right) \times a_{10} \right] \\ &= \frac{3}{4\Delta x \Delta y^3} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(y_{in} + \Delta s \sin \theta)(2\Delta s \times a_{00}) + \sin \theta \left(\frac{2}{3} \Delta s^2 \right) \times a_{10} \right]\end{aligned}\quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}\phi_g^z &= \frac{3}{8\Delta x \Delta y \Delta z^3} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[\frac{4}{3} \Delta s \Delta z^2 a_{01} \right] \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \sum_a \omega_a \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[2\Delta s \left(\frac{a_{01}}{\Delta z} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}\phi_g^0 &= \frac{1}{8\Delta x \Delta y \Delta z} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(4\Delta s \Delta z) \times a_{00} \right] \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \sum_m \omega_m \delta A_a \sum_k \sum_p \omega_p \left[(2\Delta s) \times a_{00} \right]\end{aligned}\quad (3.73)$$

本手法は、数学的に最も確からしい全中性子束分布の展開を実施できることから、内挿を用いる手法と比較して計算精度が高いことが期待できる。また、計算体系を問わず適用が可能であり、直交メッシュ以外の体系にも応用することができる。一方、角度中性子束モーメントの計算が新たに必要となる。この計算は煩雑なものとなるため、内挿を用いる手法と比較して計算コストは大きくなる。

3.6. 計算フロー

本節では、LEAF法の計算手順について述べる。LEAF法ではCharacteristics法同様、反復計算を用いて計算を行う。従って、全体的な計算の流れはCharacteristics法と同様となる。図 3.11 に、LEAF法の計算フローを示す。

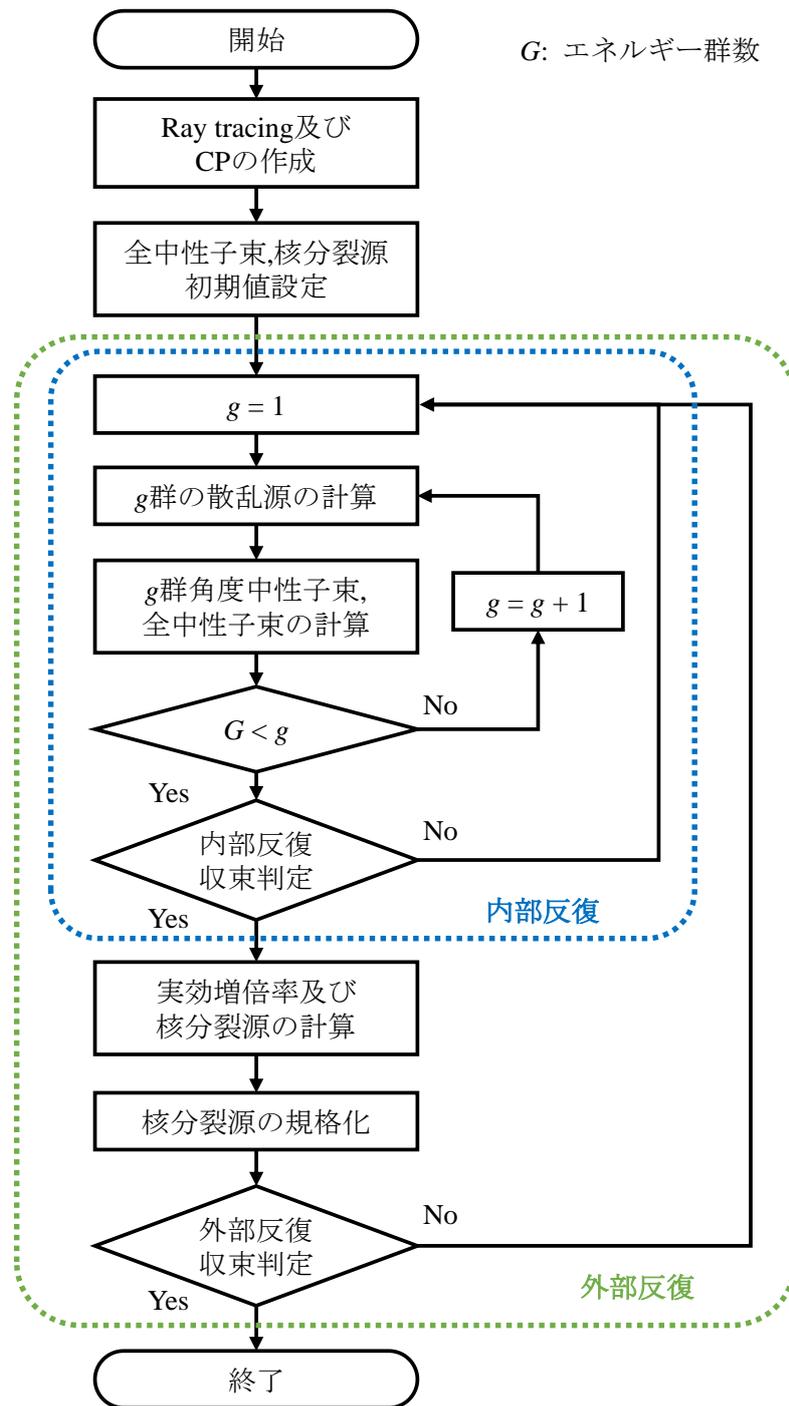


図 3.11 LEAF 法の計算フロー

始めに、計算体系に対し Ray tracing を実施し、CL の情報を得る。そして CL の情報を基に CP を作成する。LEAF 法では 2 次元平面内の Ray tracing を Cyclic Tracking 法を用いて体系全体に実施することを前提としているため、ある CL 上に作成される CP は直接接続することができる。そこで図 3.1 に示したように、CP は 1 本の CL 上に作成される CP をまとめておき、大きな長方形領域 (CP 群) としておく。

次に、全中性子束、核分裂源の初期値を設定する。以降、内部反復、外部反復を用いた反復計算により計算を実施する。なお、LEAF法における反復計算の内、外部反復はCharacteristics法のものと同じの計算フローとなるため、ここでは内部反復についてのみ記述する。

- ・内部反復

LEAF法における内部反復の流れは、Characteristics法と基本的に同様である。始めにあるエネルギー群に着目し、散乱中性子源の計算を実施する。次に、得られた中性子源項を用いてg群の中性子束の計算を行う。ここでCharacteristics法ではCL、セグメントに沿って計算を実施していく一方、LEAF法ではCPに沿って計算を実施していくこととなる。図3.12にLEAF法におけるg群中性子束の計算フロー(Transport sweep)を示す。

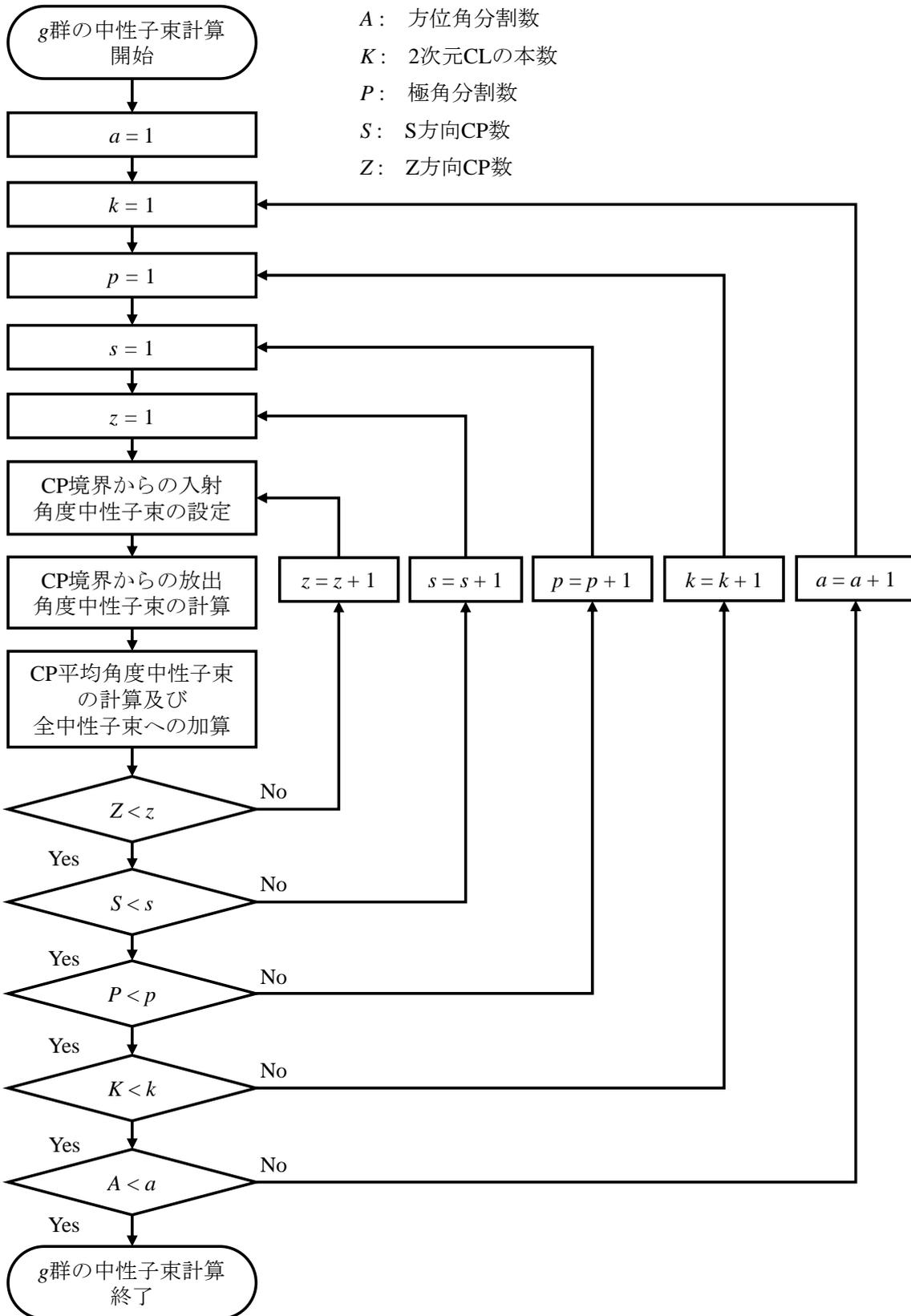


図 3.12 g 群中性子束の計算フロー (Transport sweep)

g 群中性子束の計算においては、始めに方位角及び2次元 CL 番号を選択し、角度中性子束の計算を実施する CP 群を選択する。

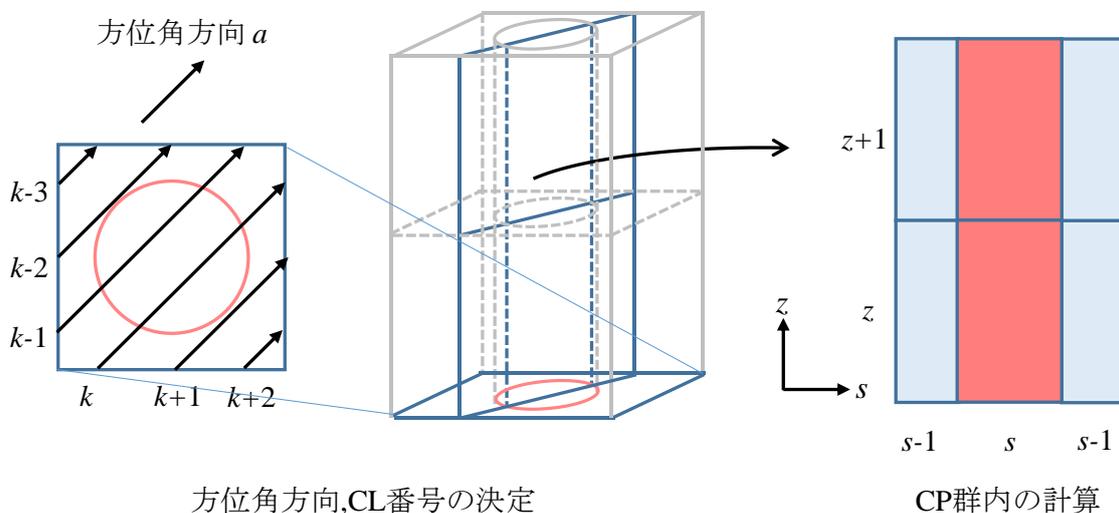


図 3.13 g 群中性子束の計算手順の概念図

そして選択された CP 群において、方位角方向を決定し、個々の CP 内の角度中性子束の計算を実施していく。CP 内の角度中性子束の計算手順は以下のようになる。

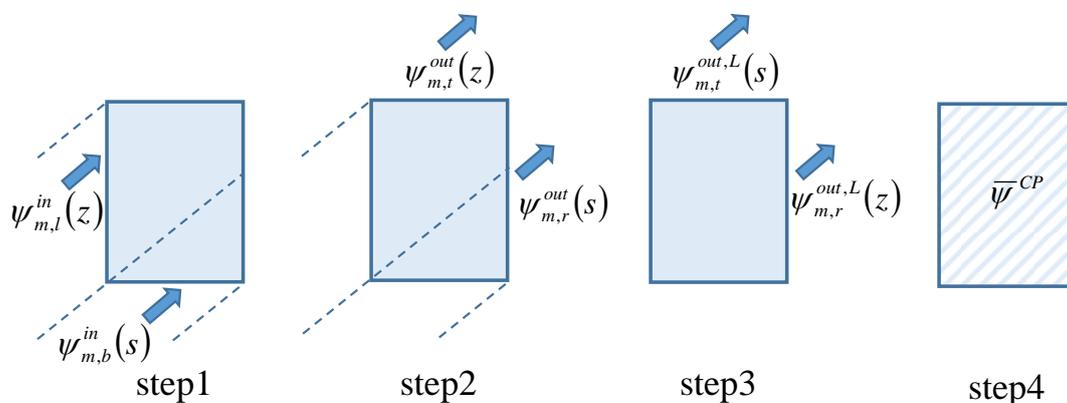


図 3.14 入射・放出角度中性子束の計算手順

1. CP 境界からの入射角度中性子束を、ルジャンドル多項式の和として与える。
2. 式(3.13)~(3.16)を用いて、CP 境界からの放出角度中性子束を解析的に計算する。
3. 放出角度中性子束を式(3.19)及び(3.20)のようにルジャンドル多項式展開する。
4. 式(3.33)を用いて CP 平均角度中性子束を計算し、全中性子束へ加算する。
5. 隣接する次の CP に移動し、1-3 を繰り返す。

以上の手順で全ての CP に対して角度中性子束の計算を実施すると、 g 群中性子束の計算を

完了することができる。Transport sweep が完了したら、内部反復を抜けるか否かの収束判定を行う。LEAF 法では Characteristics 法と同様に、内部反復の収束判定条件として $n-1$ 反復時に求められた全中性子束との誤差の 1 次ノルムを用いた。つまり、式(3.74)が収束判定条件となる ε_ϕ よりも小さければ内部反復を抜けることとした。

$$\frac{\left| \vec{\phi}_g^{(n)} - \vec{\phi}_g^{(n-1)} \right|}{\left| \vec{\phi}_g^{(n)} \right|} = \sqrt{\frac{\sum_r (\phi_{g,r}^{(n)} - \phi_{g,r}^{(n-1)})^2}{\sum_r (\phi_{g,r}^{(n)})^2}} < \varepsilon_\phi \quad (\varepsilon_\phi: \text{収束判定条件}) \quad (3.74)$$

なお、本研究では断面積として上方散乱のない断面積のみを使用した。そのため計算効率を向上させる目的で、全中性子束の計算は高エネルギー群側から順に行い、各群の計算を十分収束させ収束判定を行った後、次の群の計算を実施するようにした。ただし、核分裂源が十分に収束していない状況で多くの内部反復計算を実施することは計算時間の増加につながるため、内部反復には上限回数 (2~5 回程度) を設定し、解が収束していない場合でも上限回数を超えると内部反復を抜けるよう設定した。

以上により、LEAF 法の内部反復が完了する。これに加えて外部反復による核分裂中性子源の計算、実効増倍率の計算を組み合わせることにより、LEAF 法の計算を実施することができる。

3.7. 本章のまとめ

本章では、LEAF 法の計算理論について説明を行った。3.1 節において本章の概要について述べた後、3.2 節で LEAF 法の概要について述べ、3.3 節で LEAF 法における基本的な体系の取り扱い方法である Characteristics Plane(CP)について述べた。3.4 節では LEAF 法における中性子束の計算方法について、CP 内での角度中性子束の取り扱い方法と 3 次元メッシュにおける全中性子束の計算方法についてそれぞれ説明を行い、3.5 節では、計算された中性子束から体系の中性子源について計算する方法について述べた。中性子源の計算方法においては、Flat Source 近似、メッシュ平均全中性子束の内挿を用いる手法、面平均全中性子束の内挿を用いる手法、重み付き残差法の 4 種類の方法について説明を行った。3.6 節では LEAF 法の計算の流れをフローチャートを用いて説明を行った。

第4章 検証計算

4.1. 本章の概要

本章では、LEAF 法の性能評価のために行った検証計算について示す。LEAF 法に基づく計算コードを作成し、いくつかの検証計算を実施した。また ASMOC3D に基づく計算コードも自作し、計算結果を比較した。

4.2. 角度中性子束展開回数に関する検証

4.2.1. 概要

本節では、LEAF 法の角度中性子束展開回数に関して行われた検証計算について示す。LEAF 法では、CP 境界における角度中性子束に対し任意次数のルジャンドル多項式展開を実施する。ルジャンドル多項式展開の次数を上げると、角度中性子束の空間依存性はより詳細に表現され、計算精度を向上させることができる一方、展開係数の計算にかかる計算コストが増大する。それゆえ、計算コストの観点から、LEAF 法では最適な角度中性子束の展開回数を選定する必要がある。

本検証計算では、簡単な計算条件の下、CP 境界における角度中性子束の展開回数を変化させた計算を実施する。そして得られた計算結果を比較することで、計算効率が最大となる展開回数を調査することを目的とする。

4.2.2. 計算体系

本検証計算で使用した計算体系の概念図を図 4.1 に示す。

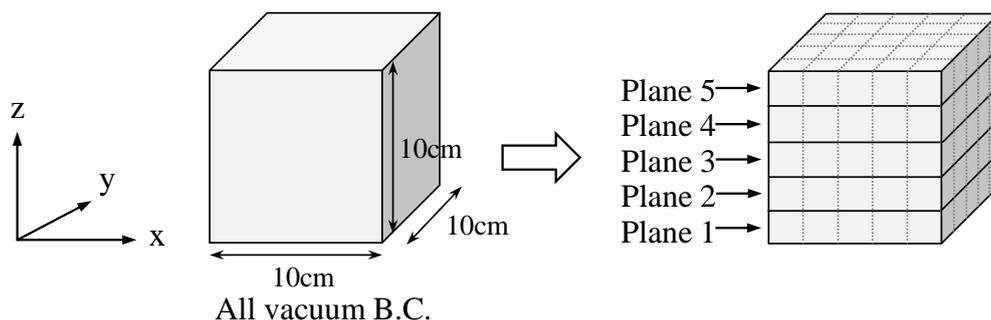


図 4.1 計算体系図

計算体系は、燃料領域を想定した均質な立方体型領域であり、その大きさは 10cm × 10cm × 10cm である。体系の外周部における境界条件は、全て真空境界条件とした。体系内の断面積としては、簡易的に表 4.1 に示すものを用いた。

表 4.1 断面積[1/cm]及び中性子源強度[neutron/s/cm³]

Σ_a	Σ_t	Σ_s	Q
0.1	0.1	0.0	1.0

本検証計算では、簡単のため体系中で散乱及び核分裂は発生しないものとし、固定中性子源が体系全体に均質に分布しているものとした。

4.2.3. 計算条件

本検証計算で使用了した計算条件について、以下に示す。自作コードにおける計算条件を表 4.2 に示す。

表 4.2 計算条件 (自作コード)

	計算条件
メッシュ構造	2×2×2, 3×3×3, 4×4×4, 5×5×5
方位角分割数	64 (for 2π using cyclic quadrature set)
極角分割数	8 (for $\pi/2$ using Gauss-Legendre quadrature set)
パス幅	0.02 cm (with Cyclic Tracking)
収束判定条件	$k_{eff} : 10^{-8}$, flux : 10^{-8}
中性子束展開次数	LEAF法 / 0~2次 ASMOC3D / 1次
中性子源展開次数	0次

本検証計算では、参照解の計算のためモンテカルロコード GMVP[21]を用いた。GMVP に対する計算条件は表 4.3 に示す。

表 4.3 計算条件 (GMVP)

	計算条件
ヒストリー数	1,000,000
バッチ数	1,000
捨てバッチ数	0

4.2.4. 結果

得られた計算結果を表 4.4 に示す。

表 4.4 中性子束計算精度結果まとめ

Method / order	Division Num.	Ave.% Error [%]	Max. % Error [%]	RMS Error [%]	Time* [-]
LEAF / 0	2 x 2 x 2	1.370	1.370	1.370	0.20
	3 x 3 x 3	1.265	2.809	1.982	0.39
	4 x 4 x 4	1.086	3.712	2.138	0.70
	5 x 5 x 5	0.972	4.422	2.229	1.00
LEAF / 1	2 x 2 x 2	-0.068	-0.068	0.068	0.33
	3 x 3 x 3	-0.063	0.628	0.309	0.68
	4 x 4 x 4	-0.057	-0.376	0.282	1.20
	5 x 5 x 5	-0.014	-0.402	0.241	1.64
LEAF / 2	2 x 2 x 2	-0.043	-0.043	0.043	0.49
	3 x 3 x 3	-0.051	-0.118	0.061	1.02
	4 x 4 x 4	-0.050	-0.107	0.070	1.85
	5 x 5 x 5	-0.010	0.129	0.068	2.58
ASMOC3D / 1	2 x 2 x 2	0.343	0.343	0.343	0.19
	3 x 3 x 3	0.153	1.055	0.472	0.39
	4 x 4 x 4	0.077	0.729	0.392	0.68
	5 x 5 x 5	0.074	1.039	0.516	0.99

ただし、表中の Ave.% Error は体系平均の全中性子束に関する参照解との差異を表し、Max.% Error はメッシュ平均全中性子束の参照解との差異の最大値、RMS Error はメッシュ平均全中性子束の参照解との平均二乗誤差を表す。また、Time は規格化された計算時間を表す。

4.2.5. 考察

初めに、メッシュ分割数が $5 \times 5 \times 5$ 分割の場合の結果に着目する。メッシュ分割数が等しい場合、角度中性子束の展開次数の変化による影響のみを考慮することができる。表 4.4 から着目する箇所のみを抜き出すと、表 4.5 のようにまとめられる。

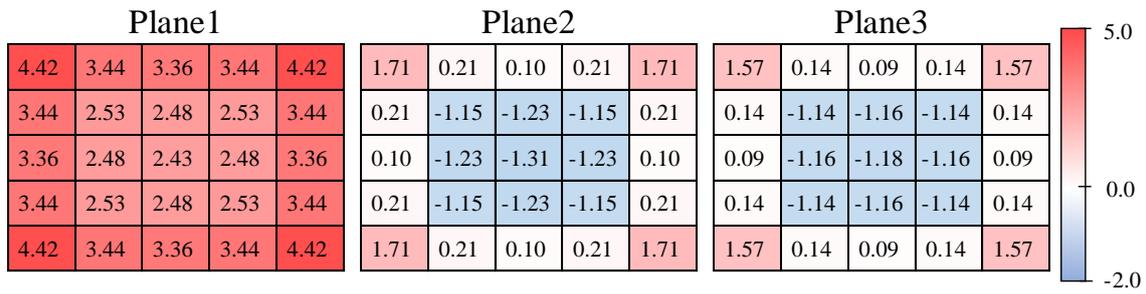
表 4.5 中性子束計算精度結果($5 \times 5 \times 5$ 分割)

Method / order	Ave.% Error [%]	Max. % Error [%]	RMS Error [%]	Time* [-]
LEAF / 0	1.247	4.422	2.229	1.00
LEAF / 1	-0.035	0.228	0.241	1.67
LEAF / 2	-0.008	0.129	0.068	2.59
ASMOC3D / 1	0.058	1.039	0.516	1.01

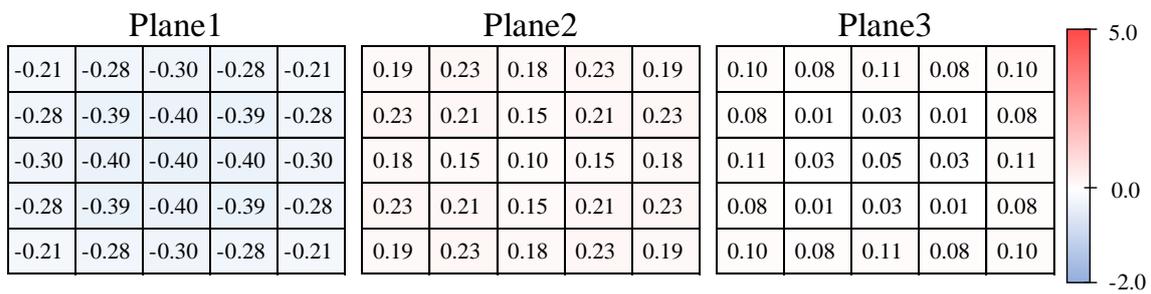
表 4.5 中において LEAF 法の計算結果を比較すると、角度中性子束の展開次数を高めることで、中性子束の参照解との差異が減少していくことが分かる。これは、CP 境界における角度中性子束を高次の関数展開を用いて表現することで、角度中性子束の空間変化をより正確に表現できるようになったためであると考えられる。特に、展開次数が 0 次の場合と 1 次の場合では大きな違いが見られ、体系平均全中性子束の差異及びメッシュ平均全中性子束の最大差異では 1 オーダー以上の差異が見られる。そのため、1 次の傾きを導入する効果は大きいものであると言える。一方、高次の展開を実施した場合、長い計算時間を要する傾向がある。展開次数が 0 次の場合と比較して、1 次の場合では約 1.7 倍、2 次の場合では約 2.7 倍程度の計算時間が必要となっている。これは、非常に煩雑な展開係数の計算に長い時間を要するためであると考えられる。

次に、LEAF 法の計算結果と ASMOC3D の計算結果を比較する。同じ角度中性子束の展開次数において両者を比較すると、LEAF 法の方がより参照解に近い解が得られていることが分かる。この結果は、LEAF 法は ASMOC3D より正確に角度中性子束の空間変化を表現していることを意味する。LEAF 法(1 次)と ASMOC3D 法では CP 境界における角度中性子束を表現する多項式が異なる。LEAF 法は輸送方程式から数学的に導かれたものである一方、ASMOC3D の多項式は単純な線形内挿により与えられるものであるため、LEAF 法がより高い精度を示したと考えられる。一方、計算時間を比較すると、LEAF 法は ASMOC3D よりも長い計算時間を必要とする。ASMOC3D では 1 次の展開係数の計算にかかる時間は無視できる程度であり、計算時間全体は LEAF 法の 0 次のものにほぼ等しくなる。

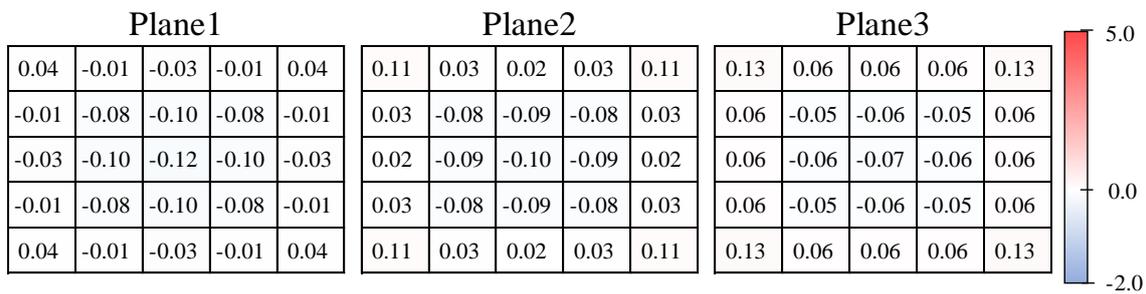
ここで、各手法によって計算された中性子束分布の参照解との差異を図 4.2 に示す。



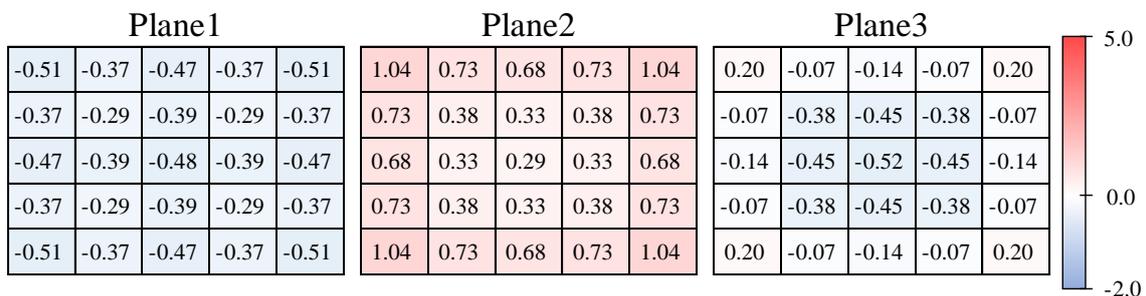
(a) LEAF / 0 次の場合



(b) LEAF / 1 次の場合



(c) LEAF / 2 次の場合



(d) ASMOC3D / 1 次の場合

図 4.2 領域 1~3 における中性子束相対差異の分布(5×5×5 分割)

図 4.2 を見ると、LEAF 法では、真空境界に面した体系外周部のメッシュにおいて大きな全中性子束の差異が発生していることが分かる。とりわけ、領域 1 に属するメッシュや、領域 2 または 3 の角に位置するメッシュでは大きな差異が発生している。これらのメッシュでは、他のメッシュと比較して角度中性子束の空間的变化が大きい。そのため、0 次の多項式を用いた場合では角度中性子束の空間変化を十分に捉えることができず、CP 境界において大きな近似誤差が発生する。高次の多項式を用いることで、角度中性子束の表現はより厳密となり、近似誤差は大幅に低減される。ASMOC3D では、LEAF 法と同様の差異の発生傾向を見せるが、その大きさは LEAF 法 1 次のものより大きい。

最後に、LEAF 法の計算効率について考察する。図 4.3 に、異なるメッシュ分割数 (2×2×2～5×5×5) において計算された体系平均全中性子束の計算精度の結果をまとめる。

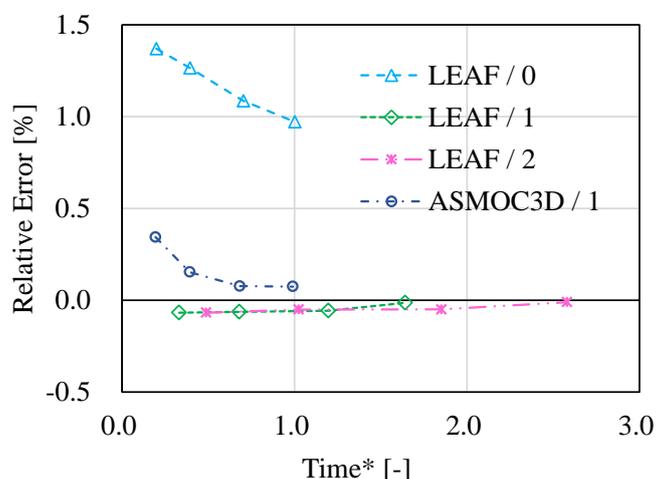


図 4.3 体系平均全中性子束と計算時間の関係

ただし、横軸は LEAF 法 0 次(5×5×5 分割)の結果を用いて規格化した計算時間を表す。図 4.3 より、すべてのケースにおいて、計算時間が長くなるほど、すなわちメッシュ分割数が大きくなるほど差異が低減されていくことが分かる。この時、LEAF 法の 1 次、2 次の多項式を用いた場合、メッシュ分割数が少ない場合でも高精度な計算が実施できていることが分かる。加えて、LEAF 法 1 次の計算精度と LEAF 法 2 次の計算精度はほぼ同程度であると言える。すなわち、今回の計算条件においては、LEAF 法において 1 次の多項式を用いた場合が最も効率が良い。ただし、本検証計算では中性子源が体系に一様に分布する固定源計算であり、体系内での散乱及び核分裂が発生していないことから、誤差の要因はすべて CP 境界における角度中性子束の近似誤差となる。異なる中性子源分布の与える影響については、さらなる調査が必要である。

4.2.6. まとめ

LEAF 法における最適な角度中性子束展開次数について、簡易体系における固定源計算を

通して検証を行った。その結果、今回の計算条件では LEAF 法 1 次の場合が最も計算効率が優れていることが判明した。

4.3. 中性子源展開方法に関する検証

4.3.1. 概要

本節では、中性子源の展開方法に関して行われた検証計算について示す。LEAF 法では、メッシュ内の中性子源分布を 1 次多項式に関数展開する。このとき、関数展開の手法としては 3 章にて述べたものが考案されているが、どの手法が最も効率的に計算を実施できるかは現在判明していない。そこで、同一の検証問題を中性子源の展開方法を変えた以下の 4 ケースで実施し、計算結果を比較する。これにより、各中性子源展開方法の特性を明らかにし、どの手法が最も効率的であるかの調査を行う。

4.3.2. 計算体系

本検証計算で使用した計算体系の概念図を図 4.4 に示す。

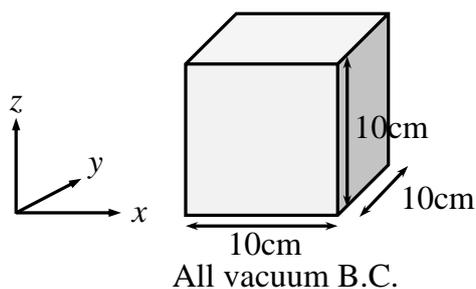


図 4.4 計算体系図

計算体系は、燃料領域を想定した均質な立方体型領域であり、その大きさは 10cm × 10cm × 10cm である。体系の外周部における境界条件は、全て真空境界条件とした。体系内の断面積としては、簡易的に表 4.6 に示すものを用いた。

表 4.6 断面積データ

Σ_t	Σ_s	$\nu\Sigma_f$
0.100	0.000	0.288

4.3.3. 計算条件

使用した計算条件を表 4.7 に示す。

表 4.7 計算条件(自作コード)

	計算条件
メッシュ構造	3×3×3, 4×4×4, 5×5×5, 10×10×10, 20×20×20
方位角分割数	64 (for 2π using cyclic quadrature set)
極角分割数	8 (for $\pi/2$ using Gauss-Legendre quadrature set)
パス幅	0.04 cm (with Cyclic Tracking)
収束判定条件	$k_{eff} : 10^{-5}$, flux : 10^{-5}
中性子束展開次数	LEAF法 / 0~2次 ASMOC3D / 1次
中性子源展開次数	0次, 1次 (Scalar flux, Surface flux, WRM)

本検証計算では、参照解の計算のためモンテカルロコード GMVP[21]を用いた。GMVP に対する計算条件は表 4.8 に示す。

表 4.8 計算条件 (GMVP)

	計算条件
ヒストリー数	1,000,000
バッチ数	1,000
捨てバッチ数	100

4.3.4. 結果

計算結果を表 4.9 に示す。なお、表中の相対差異は GMVP の結果を参照解として計算した。

表 4.9 計算結果

Source	Flux	Division Num.	keff [-]	Error [%]	Time [min]
GMVP(refarence)		-	1.02404 ± 0.00007	-	-
Flat	LEAF / 0	3×3×3	0.98704	-3.613 ± 0.007	1.4
		4×4×4	0.99875	-2.470 ± 0.007	2.7
		5×5×5	1.00583	-1.779 ± 0.007	3.8
		10×10×10	1.01761	-0.628 ± 0.007	15.6
		20×20×20	1.02228	-0.171 ± 0.007	56.0
	LEAF / 1	3×3×3	0.97850	-4.448 ± 0.007	2.3
		4×4×4	0.99381	-2.952 ± 0.007	4.3
		5×5×5	1.00298	-2.057 ± 0.007	6.5
		10×10×10	1.01775	-0.614 ± 0.007	27.7
		20×20×20	1.02288	-0.114 ± 0.007	96.7
	ASMOC3D / 1	3×3×3	0.98039	-4.262 ± 0.007	1.3
		4×4×4	0.99485	-2.851 ± 0.007	2.4
		5×5×5	1.00366	-1.990 ± 0.007	3.6
		10×10×10	1.01801	-0.589 ± 0.007	14.8
		20×20×20	1.02297	-0.105 ± 0.007	55.3
Scalar flux interpolation	LEAF / 0	3×3×3	1.02364	-0.039 ± 0.007	0.0
		4×4×4	1.02659	0.249 ± 0.007	3.3
		5×5×5	1.02680	0.269 ± 0.007	5.1
		10×10×10	1.02481	0.075 ± 0.007	21.7
		20×20×20	1.02430	0.025 ± 0.007	77.5
	LEAF / 1	3×3×3	1.01946	-0.447 ± 0.007	0.0
		4×4×4	1.02536	0.129 ± 0.007	6.2
		5×5×5	1.02687	0.276 ± 0.007	10.5
		10×10×10	1.02602	0.193 ± 0.007	41.8
		20×20×20	1.02521	0.114 ± 0.007	148.0
	ASMOC3D / 1	3×3×3	1.02006	-0.389 ± 0.007	0.0
		4×4×4	1.02494	0.088 ± 0.007	2.9
		5×5×5	1.02623	0.214 ± 0.007	5.2
		10×10×10	1.02561	0.153 ± 0.007	19.4
		20×20×20	1.02505	0.099 ± 0.007	69.5

Source	Flux	Division Num.	keff [-]	Error [%]			Time [min]
Surface flux interpolation	LEAF / 0	3×3×3	1.02317	-0.085	±	0.007	1.9
		4×4×4	1.02328	-0.075	±	0.007	3.6
		5×5×5	1.02323	-0.080	±	0.007	5.1
		10×10×10	1.02293	-0.108	±	0.007	20.6
		20×20×20	1.02434	0.029	±	0.007	70.4
	LEAF / 1	3×3×3	1.02290	-0.111	±	0.007	3.8
		4×4×4	1.02374	-0.029	±	0.007	6.9
		5×5×5	1.02404	0.000	±	0.007	9.9
		10×10×10	1.02404	0.000	±	0.007	37.8
		20×20×20	1.02440	0.035	±	0.007	156.2
	ASMOC3D / 1	3×3×3	1.02244	-0.156	±	0.007	1.9
		4×4×4	1.02303	-0.098	±	0.007	3.5
		5×5×5	1.02340	-0.063	±	0.007	4.9
		10×10×10	1.02380	-0.024	±	0.007	18.3
		20×20×20	1.02359	-0.044	±	0.007	72.4
Weighted residual method	LEAF / 0	3×3×3	1.01974	-0.420	±	0.007	4.7
		4×4×4	1.02099	-0.298	±	0.007	8.9
		5×5×5	1.02158	-0.240	±	0.007	12.5
		10×10×10	1.02244	-0.156	±	0.007	48.3
		20×20×20	1.02353	-0.050	±	0.007	190.8
	LEAF / 1	3×3×3	1.02434	0.029	±	0.007	6.8
		4×4×4	1.02500	0.094	±	0.007	11.1
		5×5×5	1.02499	0.092	±	0.007	17.5
		10×10×10	1.02438	0.033	±	0.007	73.3
		20×20×20	1.02458	0.053	±	0.007	260.6
	ASMOC3D / 1	3×3×3	1.02202	-0.197	±	0.007	4.5
		4×4×4	1.02321	-0.081	±	0.007	7.1
		5×5×5	1.02368	-0.035	±	0.007	11.1
		10×10×10	1.02400	-0.004	±	0.007	49.8
		20×20×20	1.02448	0.043	±	0.007	175.2

4.3.5. 考察

◆CP 境界角度中性子束の展開次数について

CP 境界角度中性子束の展開次数に関して計算結果を整理し、図 4.5, 図 4.6 にまとめる。なおここでは中性子源 1 次の場合として最も厳密計算結果に近いと予想される重み付き残差法で 1 次の傾きを与えた場合に着目する。

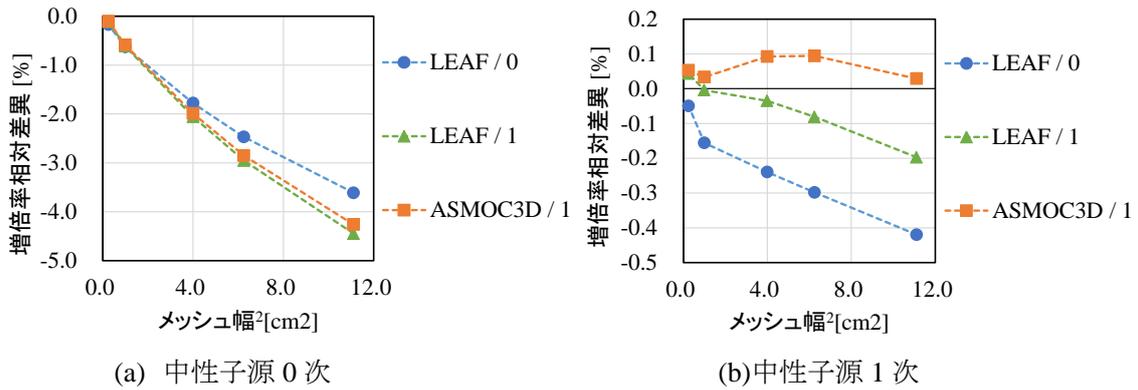


図 4.5 収束性に対する角度中性子束取り扱い方法の影響

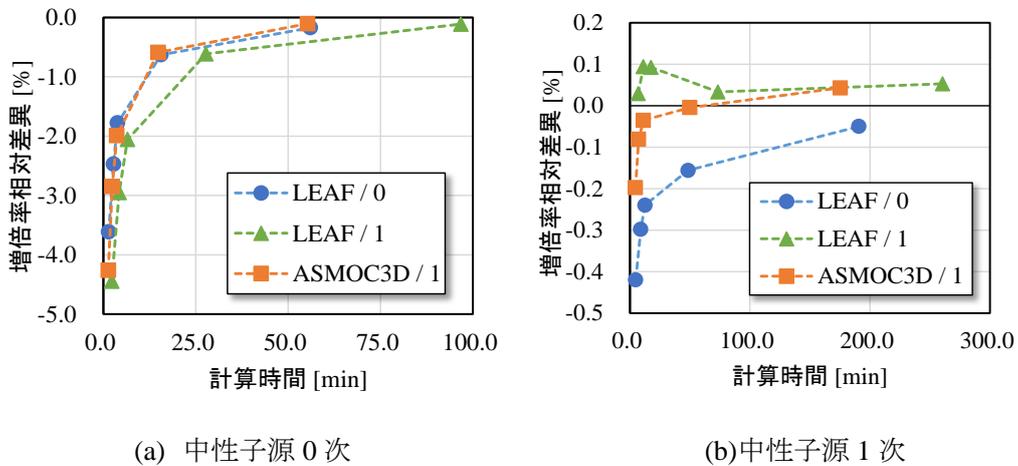


図 4.6 計算効率に対する角度中性子束取り扱い方法の影響

図 4.5, 図 4.6 を見ると、次の傾向を読み取ることができる。

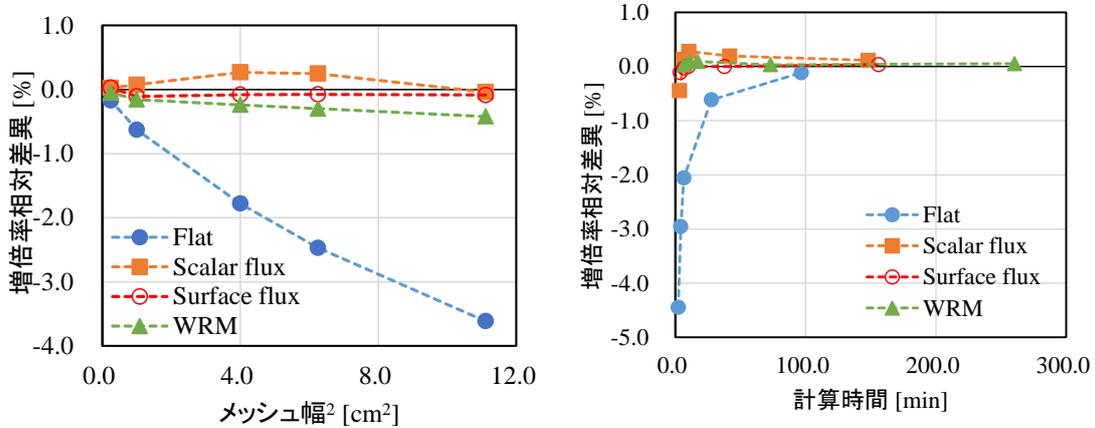
- (ア) 中性子源分布が 0 次の場合、実効増倍率の相対差異(絶対値)は 0 次 < ASMOC3D/1 < LEAF/1 となっており、0 次の場合が最も参照解に近い解が得られる。
- (イ) 中性子源分布が 1 次の場合、実効増倍率の相対差異(絶対値)は LEAF/1 または ASMOC3D/1 が最小となる。

(ア)の傾向は、次のように説明することができる。基本的に、CP境界における角度中性子束の展開次数を高めることで計算の精度は向上する。角度中性子束の展開次数を0次とした場合、角度中性子束の空間変化の大きい領域において変化を捉えきれず、誤差が発生する。4.2節における固定源計算の結果を考えると、今回の体系では体系外周部において中性子束の空間変化が大きく、大きな正の誤差が蓄積すると考えられる。従って、0次の計算結果には中性子束の空間依存性を適切に表現していない誤差(増倍率に対して正の誤差)が空間の離散化誤差(増倍率に対して負の誤差)を若干打ち消し、結果的に増倍率の差異が小さくなっていると考えられる。角度中性子束の展開次数を1次とした場合、中性子束の空間依存性による誤差が低減され、空間の離散化誤差がそのまま現れるため相対差異が大きくなる。従って、非均質性の強い体系で計算を行う場合や、各メッシュの平均中性子束を詳細に評価したい場合などでは、CP境界での角度中性子束を詳細に取り扱う必要がある。

(イ)の傾向は、同じく角度中性子束をCP境界において展開することで計算精度が向上することを示している。特に、中性子源を展開したことで空間の離散化誤差が低減されており、相対的にこの効果が目立ち、0次と1次では計算結果に大きな差があるように見える。あるいは、CP境界の角度中性子束を詳細に扱うことでCP内の中性子束分布が正しく計算され、中性子源展開の精度が向上したために差異が低下したことも考えられる。

角度中性子束1次の展開方法についてASMOC3DとLEAF法を比較すると、大きな差は見られない。これはどちらの手法においても角度中性子束は十分な精度で表現されており、CP境界における角度中性子束の近似誤差は十分に小さいためであると考えられる。また、誤差の要因としては空間の離散化誤差(メッシュ誤差)の方が支配的であるとも言える。したがって、計算時間の短いASMOC3Dが優位となる。

◆中性子源展開方法について



(a) メッシュ幅と増倍率の関係

(b) 計算時間と増倍率の関係

図 4.7 中性子源取り扱い方法の影響

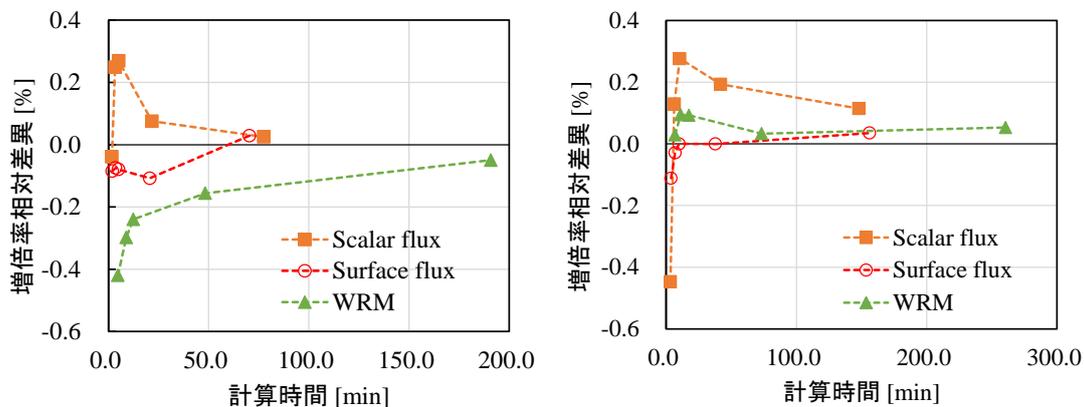
図 4.7 を見ると、次のことを読み取ることができる。

- (ア) 中性子源に 1 次の分布を与えると、いずれの展開方法においても増倍率の差異が大きく減少（メッシュ分割数が少ない領域で 1/20~1/30 程度）する。
- (イ) 計算時間は 0 次と比較しておよそ 1.6~2.7 倍程度増加（展開方法により異なる）

以上より、結果の考察を行う。

始めに、中性子源の展開を行うことは、増倍率の計算精度に関して大きな影響があるといえる。角度分割やレイトレース幅を十分に細かくしているため、今回現れている誤差はそのほとんどが空間の離散化誤差であると言える。中性子源分布に 1 次の傾きを導入すると、メッシュ分割を行うことによる空間の離散化誤差を大幅に低減することができ、実効増倍率の相対差異を低減することができる。またその効果はメッシュ幅が大きい（メッシュ分割数が少ない）時に大きい。従って、中性子源の展開は計算精度向上の観点から有用なものである。

次に、中性子源の展開方法について結果を詳細に比較する。



(a) 角度中性子束 0 次

(b) 角度中性子束 LEAF / 1

図 4.8 実効増倍率計算結果に対する中性子源取り扱い方法の影響

メッシュ平均全中性子束の内挿及び面平均中性子束の内挿は中性子輸送方程式から中性子源の傾きを与えているわけではないが、重み付き残差法と比較して同程度の計算精度であり、十分な計算精度向上効果があるといえる。つまり、メッシュ平均全中性子束の内挿及び面平均中性子束の内挿は共に中性子源の傾きを与える近似手法として十分なものであると考えられる。重み付き残差法を用いると CP 内中性子源分布の傾き導出に大きな計算コストがかかり、計算時間が大幅に増加する。計算効率を考えると、メッシュ平均全中性子束の内挿及び面平均中性子束の内挿等の工学的近似を用いることが効率的である。あるいは、CP 内中性子源分布の傾き導出方法を工夫することで、重み付き残差法の計算時間を短縮することができるが良い。

メッシュ平均全中性子束の内挿と面平均中性子束の内挿を比較すると、面平均中性子束の内挿の方が参照解に近い解が得られている。これは、着目領域に近い位置から傾きを内挿する面平均方式の方がより適切に傾きを表現できるためであり、妥当な結果であると言える。計算時間に大きな差が無いため、面平均中性子束の内挿が優れていると言える。

4.3.6. まとめ

固有値計算を実施し、LEAF 法の中性子束展開方法及び中性子源展開方法について検証を行った。その結果、以下のことが分かった。

- ・ 中性子束展開方法について

計算精度 : LEAF / 0 < ASMOC3D / 1 < LEAF / 1

計算速度 : LEAF / 1 < LEAF / 0 ≒ ASMOC3D / 1

ただし増倍率への影響は小さく、増倍率への寄与はメッシュ内部の中性子源分布に関する空間の離散化誤差が支配的である。い。

・中性子源展開方法について

計算精度 : Surface flux < WRM < Scalar flux

計算速度 : Surface flux ≒ < Scalar flux < WRM

であり、中性子源の空間分布を考慮することで空間の離散化誤差を大幅に低減できる。計算時間の増加を考慮しても、計算効率向上効果は高い。

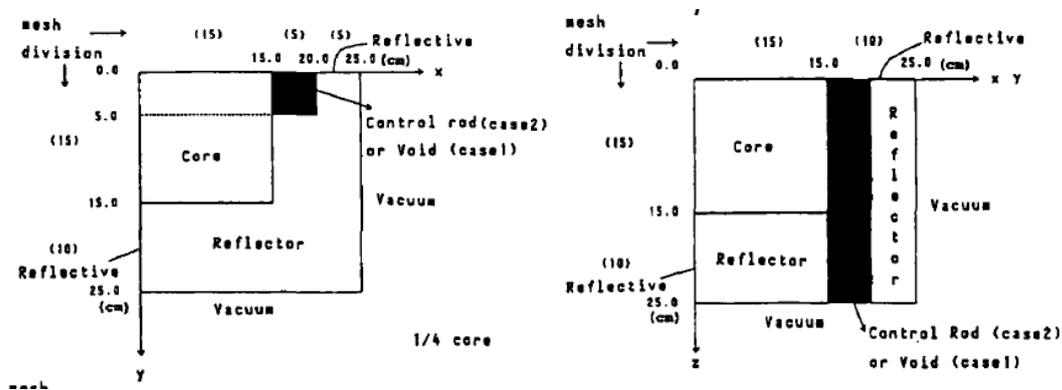
4.4. 竹田ベンチマーク問題

4.4.1. 概要

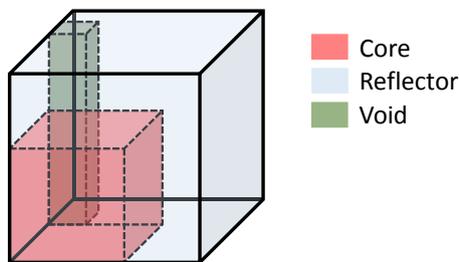
本節では、LEAF 法を用いて竹田ベンチマーク問題[22]を解析した結果について述べる。4.3 節において、簡単なテスト計算を通して中性子源展開方法に関する検証を実施した。ここでは、多群・非均質問題である竹田ベンチマーク問題(Model 1)を用いてより詳細に中性子源展開方法について検証を行う。

4.4.2. 計算体系

竹田ベンチマーク問題 Model 1 の計算体系は、京都大学臨界集合体 (KUCA) を模した小型軽水炉炉心体系である。計算体系の概念図を図 4.9 に示す。



(a) 断面図[22]



(b) 3次元概念図

図 4.9 計算体系(竹田ベンチマーク問題 Model 1)

図 4.9 に示すように、計算体系は 25cm × 25cm × 25 cm の立方体型領域であり、内部は燃料領域(Core),反射体領域(Reflector),制御棒領域またはボイド領域(Control Rod, or Void)により構成される。体系の $x = 0, y = 0, z = 0$ となる 3 面が完全反射境界条件であり、残りはすべて真空境界条件が設定された、1/8 炉心の体系となる。竹田ベンチマーク問題 Model11 には制御棒位置がボイドの場合(Case1)と制御棒が挿入されている場合(Case2)の 2 つあるが、ここではボイドの場合のみを取り扱うこととした。

4.4.3. 計算条件

本検証計算で使用した計算条件を以下に示す。

表 4.10 計算条件(竹田ベンチマーク問題)

	計算条件
メッシュ幅	1.0cm, 2.5cm, 5.0cm
方位角分割数	48 (for 2π using cyclic quadrature set)
極角分割数	3 (for $\pi/2$ using Gauss-Legendre quadrature set)
パス幅	0.05 cm
収束判定条件	$k_{eff} : 10^{-5}, flux : 10^{-5}$
中性子束展開次数	LEAF法 / 1次
中性子源展開次数	0次, 1次 (Scalar flux, Surface flux, WRM)

表 4.10 に示すように、メッシュ幅としては体系を均質な立方体へ分割可能な 1.0cm, 2.5cm, 5.0cm の 3 パターンを使用した。中性子源の取り扱い方法としては 0 次(flat)及び 1 次の 3 種類(全中性子束の内挿:Scalar flux,面平均全中性子束の内挿:Surface flux,重み付き残差法:WRM)を用いた。

竹田ベンチマーク問題では各領域に対して表 4.11 に示す 2 群断面積が与えられており、本検証計算でもこれを用いた。なお、全断面積の代わりに輸送断面積を使用することにより、P1 散乱の効果を取り込んでいる。

表 4.11 断面積 (竹田ベンチマーク問題) [1/cm]

	group	Scattering		Transport	Absorption	Production	Fission Spectrum
		1→g	2→g				
Core	1	1.92423E-01	0.00000E+00	2.23775E-01	8.52709E-03	9.09319E-03	1.00000E+00
	2	2.28253E-02	8.80439E-01	1.03864E+00	1.58196E-01	2.90183E-01	0.00000E+00
Reflector	1	1.93446E-01	0.00000E+00	2.50367E-01	4.16392E-04	0.00000E+00	0.00000E+00
	2	5.65042E-02	1.62454E+00	1.64482E+00	2.02999E-02	0.00000E+00	0.00000E+00
Control Rod	1	6.77241E-02	0.00000E+00	8.52325E-02	1.74439E-02	0.00000E+00	0.00000E+00
	2	6.45461E-05	3.52358E-02	2.17460E-01	1.82224E-01	0.00000E+00	0.00000E+00
Empty(Void)	1	1.27700E-02	0.00000E+00	1.28407E-02	4.65132E-05	0.00000E+00	0.00000E+00
	2	2.40997E-05	1.07387E-02	1.20676E-02	1.32890E-03	0.00000E+00	0.00000E+00

中性子束の計算時には、体系全体の核分裂中性子源の総和が 1 となるように式(4.1)を用いて規格化を行った。

$$\sum_g \int_V dr v \Sigma_{f,g}(r) \phi_g(r) = 1 \quad (4.1)$$

4.4.4. 結果

増倍率の計算結果を表 4.12 に示す。

表 4.12 増倍率計算結果

Method	Source	Mesh width[cm]	keff	Rel. Err. [%]	Time[min]
LEAF	Flat	5.0	0.87183	-10.84	82
		2.5	0.94942	-2.90	293
		1.0	0.97585	-0.20	1858
	Scalar	5.0	0.95948	-1.87	162
		2.5	0.97472	-0.32	444
		1.0	0.97657	-0.13	3213
	Surface	5.0	0.94944	-2.90	184
		2.5	0.96741	-1.06	453
		1.0	0.97531	-0.25	3322
	WRM	5.0	-	-	-
		2.5	0.95738	-2.09	3457
		1.0	0.97489	-0.30	6202
Monte Carlo	-	-	0.9778	-	-
Pn	-	-	0.9776	-	-
S4	-	-	0.9766	-	-
S8	-	-	0.9772	-	-

また、メッシュ幅が 1.0cm の場合に関して、各領域の領域平均中性子束を計算した結果を表 4.13 に示す。

表 4.13 中性子束計算結果(メッシュ幅 1.0cm)

Method	Energy Group	Core	Reflector	Void
Flat	1G	4.749E-03 -0.66%	5.963E-04 -0.11%	1.441E-03 -0.61%
	2G	8.723E-04 -0.65%	8.360E-04 -9.13%	9.236E-04 -5.46%
Scalar	1G	4.765E-03 -0.32%	5.949E-04 -0.36%	1.450E-03 0.03%
	2G	8.718E-04 -0.71%	9.165E-04 -0.38%	9.824E-04 0.55%
Surface	1G	4.777E-03 -0.07%	5.946E-04 -0.39%	1.451E-03 0.08%
	2G	8.714E-04 -0.75%	9.245E-04 0.49%	9.782E-04 0.12%
WRM	1G	4.780E-03 0.01%	5.947E-04 -0.38%	1.453E-03 0.20%
	2G	8.713E-04 -0.77%	9.336E-04 1.47%	9.835E-04 0.66%
Mote Carlo	1G	4.78E-03	5.97E-04	1.45E-03
	2G	8.78E-04	9.20E-04	9.77E-04

ただし、表 4.12 においては Monte Carlo 法の結果を参照解として使用している。また、重み付き残差法を用いたメッシュ幅 5cm の計算は、計算が発散し実施できなかった。

4.4.5. 考察

初めに、増倍率の計算結果について考察を行う。表 4.12 の結果をグラフにまとめると図 4.10 のようになる。

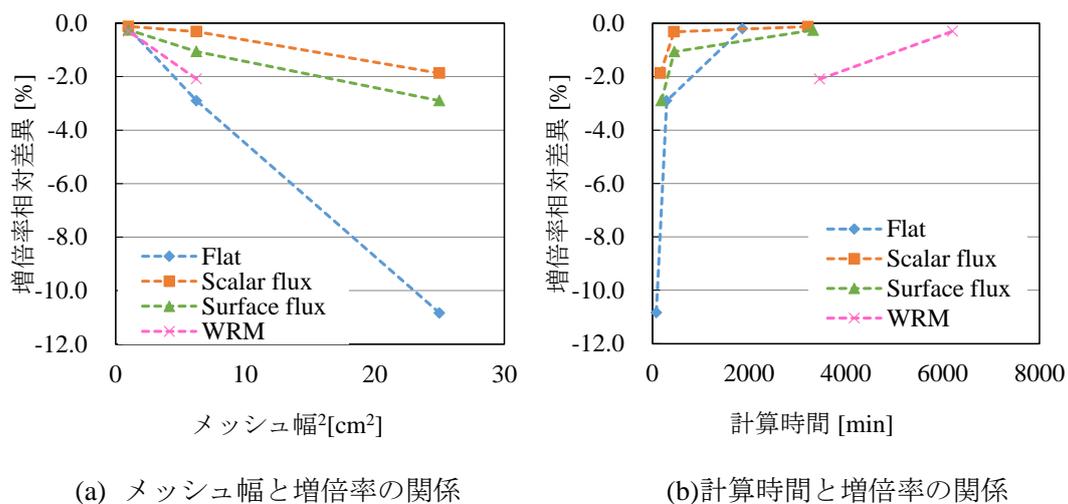


図 4.10 増倍率計算結果のまとめ

図 4.10 を見ると、中性子源が 0 次の場合と比較して、中性子源の関数展開を実施すると

増倍率の差異が低減されることが分かる。特にメッシュ幅が大きい場合にこの傾向は強く、メッシュ幅が 5cm の場合の結果を比較すると差異は約 1/5 程度に低減されている。これは、中性子源を関数展開することで空間の離散化誤差が低減されたためであると考えられる。計算時間についてみると、計算時間の長さは Flat < Scalar flux ≒ Surface flux < WRM の順となっており、Flat の場合に対して、Scalar flux 及び Surface flux は約 1.7 倍、WRM は約 3.3 倍の計算時間を要することが分かる。重み付き残差法では、CP 内の中性子束分布を計算することが大きな計算負荷となっていることが考えられる。中性子源を関数展開したときの空間の離散化誤差の低減効果と計算時間の増加を合わせて考慮すると、計算効率化は中性子源の関数展開を実施し、メッシュ幅を大きくとった時が最も高いと言える。また、今回の計算ではメッシュ平均全中性子束の内挿による展開が最も適した手法となった。

次に、中性子束の計算結果について考察を行う。初めに中性子源が 0 次の場合の結果を見ると、高速群についてはどの領域においても領域平均全中性子束の参照解との相対差異が 1% 以下となっており、これらは十分な精度で計算ができていると言える。一方、熱群では反射対領域で 9.13%、ボイド領域で 5.46% と大きな差異が発生している。ここで、 $z=0$ の領域における中性子束分布を図 4.11 に示す。

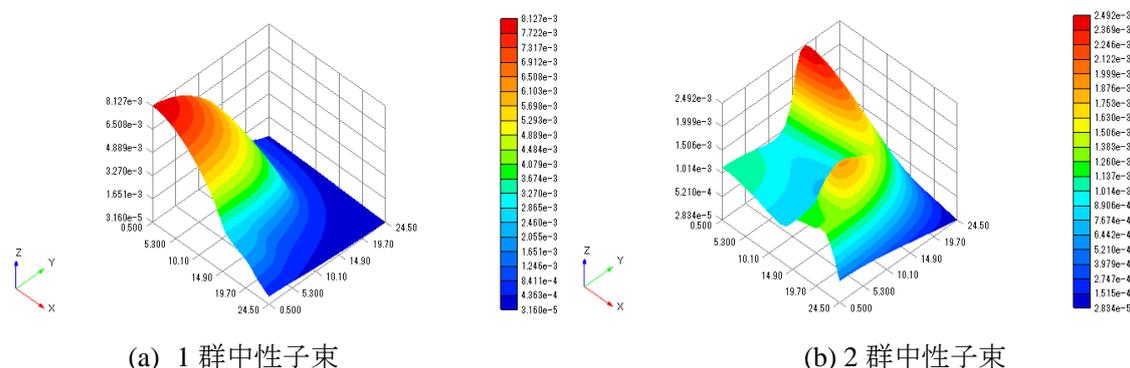


図 4.11 $z=0$ 面における中性子束分布

図 4.11 より、高速群の中性子束は体系全体にわたり緩やかに変化していることが分かる。一方、熱群中性子束は燃料領域と反射対領域の境界付近や、ボイド領域付近において、空間的变化の急激な領域が存在することが分かる。したがって、中性子源分布が 0 次の場合では、空間的に急激に変化する中性子束分布(中性子源分布)を捉えきれず、大きな誤差が発生したと考えられる。これらの誤差を低減するには、より細かいメッシュ幅を用いて計算を実施する必要があるが、これは大幅な計算時間増加につながる恐れがある。

中性子源分布が 1 次の場合では、0 次の場合と同様、高速群中性子束はすべてのケースで領域平均全中性子束の参照解との相対差異が 1% 以下となっており、十分な精度で計算ができていることが分かる。一方、熱群中性子束は、反射体領域およびボイド領域における領域平均中性子束の相対差異が 0 次の場合と比較して大きく低減されており、メッシュ平均全中性子束の内挿及び面平均中性子束の内挿ではともに 1% 以下、重み付き残差法では最大

1.47%となっている。これは、中性子源分布を1次展開することにより前述した空間変化(特に散乱中性子源について)をより適切に表現できるようになったためであると考えられる。したがって、中性子源分布の関数展開を実施することで、中性子束の計算精度を高めることができる。

各中性子源の展開方法を比較すると、増倍率、中性子束分布ともに計算精度は大きな違いはないものの、メッシュ平均全中性子束の内挿が最も優れた精度を示した。竹田ベンチマーク問題 Model1 は空間、エネルギーともに非均質性が大きくないため、どの手法でも適切な分布を表現することができたのだと考えられる。計算時間に関しては、CP 内中性子束分布の計算に付加的なコストを要する重み付き残差法が最も長く、他の二つは同程度となった。

4.4.6. まとめ

中性子源の関数展開を実施することで、空間の離散化誤差を大きく低減することが可能である。特に、空間の離散化誤差低減効果は中性子束の空間変化の大きい領域に対して強く表れ、0次の中性子源分布では非常に多くのメッシュ分割を必要とする箇所でも少ないメッシュ分割で高精度な計算が可能となる。中性子源の関数展開を実施することで計算時間は増加するが、計算精度が向上するため正味の計算効率は向上する。中性子源展開方法としては、3種の手法は同程度の計算精度を示し、計算時間の短さからメッシュ平均全中性子束の内挿及び面平均中性子束の内挿が優れていると言える。

4.5. 本章のまとめ

本章では、LEAF法の性能評価のために行った検証計算について示した。4.2節の角度中性子束展開次数に関する検証では、単純な体系においては計算効率の観点からLEAF法による1次の展開が最適であることが示された。4.3節の中性子源展開方法に関する検証では、まず、中性子源を関数展開することが計算精度に大きな影響を与えられることが示された。また、計算効率の観点から面平均全中性子束の内挿を用いた手法が優れていることが示された。4.4節の竹田ベンチマーク問題による検証では、2群非均質問題によりLEAF法の検証が実施され、中性子源の関数展開の有用性が改めて示された。

第5章 結論

5.1. 結論

本研究では、原子炉炉心解析技術の向上を目的として、Characteristics 法及び ASMOC3D に基づく新たな3次元中性子輸送計算手法「LEAF法」の開発を行った。LEAF法はASMOC3Dと同様に、計算体系を Characteristics Plane(CP)と呼ばれる多数の平面領域を用いて離散化し、CP内で中性子束のバランス式を解くことで体系全体の中性子束を求める計算手法である。LEAF法は、ASMOC3Dに対して以下の様な計算理論の改良を加えた手法である。

(1) CP境界における角度中性子束のルジャンドル多項式展開

CP境界から入射・放出する角度中性子束を1次元の輸送方程式に基づき解析的に導出し、その空間分布をルジャンドル多項式展開することで取り扱う。

(2) メッシュ内中性子源分布の関数展開

メッシュ内部の中性子源分布を関数展開し、xyz各方向に関する1次関数に展開して取り扱う。展開の方法としては、

(ア)メッシュ平均全中性子束の内挿を利用した1次展開

(イ)面平均全中性子束の内挿を利用した1次展開

(ウ)重み付き残差法

の3手法を提案した。

提案手法に基づく計算コードを作成し、上記の改良項目に関して均質立方体体系(固定源計算、固有値計算)、竹田ベンチマーク問題 Model 1 を利用した検証計算を実施した結果、以下のことが分かった。

● 角度中性子束の展開に関して

- ルジャンドル関数展開を用いた角度中性子束の表現により、中性子源分布が一般的な固定源計算においては計算精度が大幅に向上する。
- 計算効率を考えると、展開の次数は1次のルジャンドル多項式展開が最適である。
- 中性子源が分布を持つ固有値計算では、メッシュ内部の中性子源分布に関する空間の離散化誤差が増倍率の計算精度に対して支配的であり、CP境界の角度中性束を詳細に表現することによる計算精度向上効果は限定的である。

● 中性子源の展開に関して

- 中性子源を関数展開することにより、空間の離散化誤差を大幅に低減可能であり、Flat Source 近似を用いた場合と比較して大きなメッシュを用いても高い計算精度が得られる。従って、計算効率が向上する。

- 計算効率の向上効果は中性子束の空間的変化の大きい領域において高く、核的非均質性の強い体系において高い計算効率向上効果が期待できる。
- 本研究で提案した 3 つの中性子源の展開手法を比較すると、Takeda ベンチマーク問題において計算効率は
 重み付き残差法 < 面平均全中性子束の内挿 ≤ メッシュ平均全中性子束の内挿
 となる。いずれの手法も計算精度は同程度であるため、計算効率の差は計算時間の差に起因する。

5.2. 今後の課題

今後の課題及び展望を以下に示す。

(1) 軸方向に対する高次展開係数の使用の検討

LEAF 法の適用体系として軽水炉炉心を想定した場合、体系は軸方向に均質性が弱く、径方向には非均質性が強い体系となる。したがって、物質境界を用いてメッシュ分割を行った場合、軸方向には比較的大きなメッシュ幅を取ることができるが、径方向には細かなメッシュ幅のみ設定可能となる。この特性を生かすためには、軸方向には径方向よりも中性子束・中性子源ともに高次の展開を実施し、メッシュ幅を大きくとることが有効であると考えられる。軸方向については本研究では取り扱っていない 2 次以上の関数展開を用いることで、計算効率向上が達成できる可能性があり、検証を行う必要がある。例として、2 次の中性子源分布を与える方法としては、CP 内の各方向について CP 境界の平均角度中性子束(両端 2 点)、CP 平均角度中性子束(中心 1 点)を計算し、3 点をフィッティングすることで与える方法等が考えられる。

(2) LEAF 法における最適な極角分点の選定

LEAF 法は CP を設定し、CP 内での輸送計算を実施するため、体系の径方向(xy 方向)と軸方向(z 方向)が等価に扱われない。径方向には燃料ピン、被覆管等の物質境界が存在し、多くの領域分割が必要となることから、多くの場合で CP は軸方向に長い形状となる。過去の検証において、CP 境界における角度中性子束のルジャンドル多項式展開の精度は CP の形や極角分点に依存する可能性が示されたが、CP 形状を変更することはメッシュ分割数の増加、つまり計算コストの増加を招くため望ましくない。そこで、体系に存在する CP 形状に適した極角分点を選定することで関数展開の精度を高めることを考える。LEAF 法に最適な極角分点の与え方について検証を行うことで、LEAF 法の計算効率を更に高められる可能性がある。

(3) 角度中性子束計算部分のテーブル化の検討

本研究で行った検証計算では、LEAF 法の計算時間の内訳を見ると CP 境界における角度中性子束の展開係数の計算にかかる計算時間が計算全体の 9 割以上を占めていた。したがって、あらかじめ展開係数の計算をテーブル化し、反復計算の中では内挿計算の

みを実施することで、計算時間を大幅に低減できると考えられる。また、セル単位の **Cyclic Tracking** 法を用いることで、作成される CP の種類がいくつかに限定されるため、テーブル作成との親和性は高いと考えられる。

(4) 不連続な CP の使用の検討

本研究で行った固有値計算による検証計算では、増倍率に対する影響は空間の離散化誤差が支配的であり、CP 境界における角度中性子束の近似誤差は比較的小さいことが示された。そこで、空間の離散化誤差を低減するため、CP が径方向に不連続になることを許容し、**Ray tracing** の手法として **Macroband** 法などの空間の離散化誤差低減を目的とした手法を採用する。そして CP への入射角度中性子束は隣接 CP からの内挿により与えることを考えると、計算効率の向上を達成できる可能性がある。

(5) 三角形型 CP の使用の検討

現行の **LEAF** 法では、体系をすべて長方形型の CP に離散化するために、軸方向に均質な領域へ分割可能な体系のみ取り扱いが可能となっている。ここに三角形型 CP の取り扱いが可能となれば、取り扱い可能な幾何形状が大幅に増加する。この場合、すべての三角形が直角三角形に分割可能であることから、考慮すべきは直角三角形型 CP となる。ただし、角度による条件分岐が複雑となり計算時間増大を招く可能性があること、需要があるかどうか未知であることから、優先度は低い。

参考文献

- [1] B. Kochunas, T. J. Downar, Z. Liu, "Parallel 3-D Method of Characteristics in MPACT", *Proc. M&C2013*, Sun Valley, Idaho, May 5-9, 2013, (2013), [CD-ROM].
- [2] H. G. Joo, J. Y. Cho, K. S. Kim, C. C. Lee, and S. Q. Zee, "Methods and Performance of a Three-Dimensional Whole-Core Transport Code DeCART," *Proc. PHYSOR2004*, Lagrange Park, USA, Apr. 25-29 (2004).
- [3] S. Kosaka and T. Takeda, "Verification of 3D heterogeneous core transport calculation utilizing non-linear Iteration technique," *J. Nucl. Sci. Technol.* **41** (2003), pp. 645-654.
- [4] Y. S. jung, C. B. Shim, C. H. Lim, H. G. Joo, "Practical numerical reactor employing direct whole core neutron transport and subchannel thermal/hydraulic solvers", *Annals of Nucl. Energy*, **62**, pp.357-374, (2013).
- [5] M.J. Halsall, "CACTUS, A Characteristics Solution to the Neutron Transport Equations in Complicated Geometries", AEEW-R-1291, United Kingdom Atomic Energy Authority, (1980).
- [6] A Giho, K Sakai, Y, Imamura, H. Sakurai, K. Miyawaki, "Development of Axially Simplified Method of Characteristics in Three-Dimensional Geometry", *J. Nucl. Sci. Technol.* **45** (2003), pp. 985-996.
- [7] A. Yamamoto, T. Endo, M. Tabuchi, N. Sugimura, T. Ushio, M. Mori, M. Tatsumi and Y. Ohoka, "AEGIS:an advanced lattice physics code for light water reactor analyses," *Nucl. Eng. Technol.* **42** (2010), pp. 500-519.
- [8] J. Rhodes, K. Smith and D. Lee, "CASMO-5 development and applications," *Proc. PHYSOR2006*, Vancouver, BC, Canada, Sept. 10-14, (2006).
- [9] D. Kelly, T. Suttom, S. Wilson, "MC21 Analysis of the Nuclear Energy Agency Monte Carlo Performance Benchmark Problem," *Proc. PHYSOR2012*, Knoxville, TN, April 15-20 (2012), [CD-ROM].
- [10] 成田正邦, 竹田練三, 山本章夫, 山本俊弘, 植之原雄二, 渡辺正, 三澤毅, 阪元重康, "第34回炉物理夏期セミナーテキスト", 日本原子力学会, (2002), pp. 1-25.
- [11] Z. Liu, et al., "Parallel 3-D Method of Characteristics in MPACT", *Proc. M&C2013*, Sun Valley, Idaho, May 5-9, 2013 (2013).
- [12] J. B. Taylor, D. Knott, A.J. Baratta, "A Method of Characteristics Solution to the ECD/NEA 3D Neutron Transport Benchmark Problem", *Proc. M&C + SNA 2007*, Monterey, CA, (2007).
- [13] Oak Ridge Leadership Computing Facility, Oak Ridge, TN,
<http://www.olcf.ornl.gov/computing-resources/titan-cray-xk7/>
- [14] OpenMP Architecture Review Board. "OpenMP Application Program Interface

- Version4.0.” <http://www.openmp.org/mp-documents/OpenMP4.0.0.pdf>. [Online; accessed 12/22/2014] (2013).
- [15] 辻田浩介, “Characteristics 法を用いた動特性計算に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科 修士論文, (2012)
- [16] K. S. Smith, R. Ferrer, J. D. Rhodes, “Linear Source Approximation in CASMO5,” *Proc. PHYSOR2012*, Knoxville Tennessee, USA, April 15-20, (2012), [CD-ROM].
- [17] X. M. Pandya, K. wang, “The Linear Source Approximation In Three Dimension Characteristic Method,” *Proc. M&C 2009*, Saratoga Spring, New York, May 3-7 (2009).
- [18] E. Masiello, R. Clemente, S. Santandrea, “High-Order Method of Characteristics for 2-D Unstructured Meshed,” *Proc. M&C2009*, Saratoga Springs, New York, U.S.A., May 3-7, (2009), [CD-ROM].
- [19] S. Santandrea, R. Sanchez, “Positive Linear and Nonlinear Surface Characteristics Schemes for the Neutron Transport Equation in Unstructured Geometries,” *Proc. PHYSOR2002*, Seoul, Korea, October 7-10, (2009), [CD-ROM]
- [20] T. M. Pandya, M. L. Adams, W. D. Hawkins, “Long Characteristics with Piecewise Linear Sources Designed for Unstructured Grids”, *Proc. M&C2011*, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, May 8-12, (2011), [CD-ROM].
- [21] Y. Nagaya, K. Okumura, T. Mori and M. Nakagawa, *MVP/GMVP II : General Purpose Monte Carlo Codes for Neutron and Photon Transport Calculations based on Continuous Energy and Multigroup Methods*, Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI), Ibaraki, Japan, (2005).
- [22] T. Takeda, H. Ikeda, “3-D Neutron Transport Benchmarks”, *J. Nucl. Sci. Technol.* **28**[7] (1991), pp 656-669.

公刊論文リスト

- [1] 加藤祐生, 遠藤知弘, 山本章夫, “LEAF法に基づく3次元輸送計算手法の開発及び検証”, 日本原子力学会 2014年 春の年会, 東京都市大学世田谷キャンパス, 3月26-28日, 2013.
- [2] Y. Kato, T. Endo, A. Yamamoto, "Development of Legendre Expansion of Angular Flux Method for 3D-MOC Calculation," *Proc. PHYSOR2014*, Kyoto, Japan, Sep. 28 - Oct. 3, 2014, (2014). [CD-ROM].
- [3] Y. Kato, T. Endo, A. Yamamoto, "Comparison of Spatial Source Expansion Method in the Three Dimensional Transport Method LEAF", *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **111**, pp.1405-1408, (2014).