

修士論文

空間依存動特性方程式の統一的解法の開発

名古屋大学大学院
工学研究科博士課程(前期課程)
マテリアル理工学専攻
量子エネルギー工学分野
量子エネルギーシステム工学講座
エネルギー量子制御工学グループ
伴雄一郎
2011年2月

目次

序論.....	9
1.1 背景.....	9
1.1.1 炉心安全解析.....	9
1.1.2 安定性解析.....	13
1.1.3 Code Scaling, Applicability and Uncertainty Methodology.....	17
1.1.4 Dynamic Rod Worth Measurement.....	21
1.2 現在の核計算における過渡計算手法の現状.....	21
1.3 本研究の目的.....	23
1.4 本論文の構成.....	24
1.5 参考文献.....	24
第2章 定常状態の数値解法.....	27
2.1 本章の概要.....	27
2.2 拡散方程式.....	28
2.2.1 中性子輸送方程式.....	28
2.2.2 拡散方程式の導出.....	29
2.3 拡散方程式の数値解法.....	32
2.3.1 離散化手法.....	32
2.3.2 内部反復.....	34
2.3.3 外部反復.....	37
2.4 多項式解析的ノード法.....	41
2.4.1 近代ノード法の概要.....	41
2.4.2 多項式解析的ノード法の基礎式の導出.....	43
2.4.3 非線形反復による有限差分式の補正.....	44
2.4.4 2ノード問題.....	46
2.4.5 横方向漏れ項の計算方法.....	55
2.4.6 中性子源の多項式近似.....	57
2.4.7 座標変換について.....	58
2.5 Cuspingモデル.....	63
2.5.1 体積荷重モデル.....	63
2.5.2 中性子束荷重モデル.....	64
2.5.3 Cuspingモデル.....	64
2.6 加速法.....	66
2.6.1 Coarse Mesh Finite Difference法.....	66
2.6.2 Simplified Fixed Source Scaling Factor法.....	70

2.6.3 各種外挿法.....	72
2.7 本章のまとめ.....	73
2.8 参考文献.....	74
第3章 従来の動特性方程式の計算法.....	77
3.1 本章の概要.....	77
3.2 空間依存動特性方程式.....	78
3.2.1 一点炉動特性方程式.....	78
3.2.2 空間依存動特性方程式の数値解法の現状.....	81
3.2.3 各種数値時間積分法.....	83
3.3 θ 法.....	88
3.3.1 θ 法の概要.....	88
3.3.2 θ 法の基礎式の導出.....	88
3.3.3 θ 法の特徴.....	91
3.4 周波数変換法.....	93
3.4.1 周波数変換法の概要.....	93
3.4.2 周波数変換法の基礎式の導出.....	93
3.4.3 周波数変換法の特徴.....	97
3.5 Stiffness Confinement Method.....	98
3.5.1 Stiffness Confinement Methodの概要.....	98
3.5.2 Stiffness Confinement Methodの基礎式の導出.....	98
3.5.3 Stiffness Confinement Methodの特徴.....	100
3.6 改良準静近似法.....	100
3.6.1 改良準静近似法の概要.....	100
3.6.2 改良準静近似法の基礎式の導出.....	101
3.6.3 改良準静近似法の特徴.....	103
3.7 遅発中性子先行核密度の計算方法.....	106
3.7.1 時間微分項を離散化した場合.....	106
3.7.2 核分裂源を関数近似した場合.....	107
3.8 近代ノード法の時間依存方程式への拡張.....	109
3.9 自動タイムステップモデル.....	111
3.9.1 埋め込み型.....	111
3.9.2 Step-doubling法.....	113
3.9.3 動的周波数を用いた方法.....	114
3.10 本章のまとめ.....	115
3.11 参考文献.....	115
第4章 動特性方程式の新しい計算手法.....	118

4.1 本章の概要.....	118
4.2 Krylov部分空間法.....	119
4.2.1 Krylov部分空間法の概要.....	119
4.2.2 Krylov部分空間法の基礎式の導出.....	120
4.2.3 Padé近似法.....	123
4.2.4 Scaling and Squaring法.....	124
4.3 Contour Integrals法.....	125
4.3.1 Contour Integrals法の概要.....	125
4.3.2 コーシーの積分公式を用いたContour Integral法.....	125
4.3.3 逆ラプラス変換を用いたContour Integral法.....	127
4.3.4 Contour Integrals法の問題点.....	130
4.4 周波数関数近似法.....	131
4.4.1 周波数関数近似法の概要.....	131
4.4.2 周波数関数近似法の基礎式の導出.....	131
4.4.3 周波数を関数近似するための検討.....	133
4.4.4 相関係数を用いた重み関数の導入.....	135
4.5 Multigrid Amplitude Function法.....	138
4.5.1 Multigrid Amplitude Function法の概要.....	138
4.5.2 Multigrid Amplitude Function法の基礎式の導出.....	138
4.5.3 従来法からの改善点.....	141
4.5.4 Time-dependent Coarse Mesh Finite Difference法.....	145
4.5.5 振幅関数を用いた遅発中性子先行核密度の計算方法.....	148
4.6 本章のまとめ.....	150
4.7 参考文献.....	150
第5章 核計算におけるフィードバック計算.....	152
5.1 本章の概要.....	152
5.2 フィードバック効果.....	152
5.2.1 様々なフィードバック効果.....	152
5.2.2 WIGLモデル.....	155
5.2.3 断面積フィードバックモデル.....	156
5.3 フィードバックを考慮した自動タイムステップモデル.....	157
5.4 本章のまとめ.....	159
5.5 参考文献.....	159
第6章 検証計算.....	161
6.1 本章の概要.....	161
6.2 TWIGLベンチマーク問題.....	162

6.2.1 Krylov部分空間法と従来法の比較.....	163
6.2.2 周波数関数近似法と従来法の比較.....	180
6.2.3 Multigrid Amplitude Function法と従来法の比較.....	191
6.3 LMWベンチマーク問題.....	216
6.3.1 LMWベンチマーク問題 without feedback.....	219
6.4 LRAベンチマーク問題.....	233
6.4.1 LRAベンチマーク問題 2D.....	236
6.4.2 LRAベンチマーク問題 3D quarter core.....	249
6.4.3 LRAベンチマーク問題 3D full core.....	253
6.5 本章のまとめ.....	259
6.6 参考文献.....	260
第7章 結論.....	263
謝辞.....	265
Appendix A 多点炉動特性方程式.....	266
A.1 本章の概要.....	266
A.2 定常状態の結合炉.....	266
A.3 多点炉動特性方程式の導出.....	268
A.4 本章のまとめ.....	270
A.5 参考文献.....	270
Appendix B 一点炉動特性方程式.....	271
B.1 本章の概要.....	271
B.2 一点炉動特性方程式の導出.....	271
B.3 一点炉動特性方程式の解析解.....	273
B.4 即発跳躍.....	277
B.5 逆時間方程式.....	279
B.5 本章のまとめ.....	285
B.6 参考文献.....	285
Appendix C 動特性方程式における係数行列のスペクトル半径.....	287
C.1 本章の概要.....	287
C.2 スペクトル半径の導出.....	287
C.3 本章のまとめ.....	290
C.4 参考文献.....	290
Appendix D その他のKrylov部分空間法の検討.....	291
D.1 本章の概要.....	291
D.2 スペクトル半径の縮小のための工夫.....	291
D.3 部分空間へ変換のための数値誤差.....	294

D.4 ランプ状における断面積の取扱い	295
D.5 本章のまとめ	299
D.6 参考文献	299
公刊論文リスト	301

記号表

ϕ : 中性子束	Ω : 飛行方向	\mathbf{r} : 位置
E : エネルギー	t : 時間	Σ_t : 巨視的全断面積
Σ_r : 巨視的除去面積	Σ_s : 巨視的散乱面積	Σ_f : 巨視的核分裂断面積
Q : 中性子源	χ : 核分裂スペクトル	s : 外部中性子源
μ : 方向余弦	P_l : l 次の Legendre 関数	D : 拡散係数
J : 中性子流	k_{eff} : 実効増倍率	\mathbf{v} : 中性子速度
n : 中性子数密度	β_{eff} : 実効遅発中性子割合	p : 即発中性子
m : 遅発中性子	λ : 崩壊定数	β : 遅発中性子割合
ρ : 反応度	Λ : 中性子世代時間	Δt : タイムステップ
w : 動的周波数	Δ : 結合炉反応度係数	g_{mn} : 領域 m, n の結合カーネル
T_f : 燃料温度	T_c : 冷却材温度	ρ_c : 冷却材密度

序論

1.1 背景

1.1.1 炉心安全解析

原子炉の安全な運転において、原子炉の過渡事象の解析は非常に重要な役割を占める。原子炉を設置するためには、運転時の異常な過渡変化と事故の2種類を評価しなければならない¹⁾。運転時の異常な過渡変化とは、原子炉の運転中において、原子炉施設の寿命期間中に予想される機器の単一の事故若しくは誤動作又は運転員の単一の誤操作、及びこれらと類似の頻度で発生すると予想される外乱によって生じる異常な状態に至る事象を対象とされている¹⁾。一方、事故の定義としては、「運転時の異常な過渡変化」を超える異常な状態であって発生する頻度はまれであるが、発生した場合は原子炉施設からの放射性物質の放出の可能性がある、原子炉施設の安全性を評価する観点から、想定する必要のある事象を対象とされている。

炉心の過渡事象としては、異常な過渡変化・事故が重要な解析対象となる。事故の対象としては、参考文献1)に示されるように多くの項目があるが、本論文では、事故時の解析対象として、以下の2つについて言及する。

- ・ 反応度投入事象(Reactivity Initiated Accident, RIA)
- ・ 冷却材喪失(Loss of Coolant Accident, LOCA)

商業用原子炉においては、RIAに対する安全評価が実施されている。反応度投入事象は、臨界又は臨界近傍の原子炉に、原則的に1ドル以上の反応度が急激に投入されることによって、原子炉出力の上昇とそれに伴う原子炉燃料エンタルピ増大が生じる事象と定義されている²⁾。商用軽水炉のRIAとして、PWR炉心では、原子炉起動時における制御棒の異常な引き抜き及び制御棒飛び出し事故がRIAの適用事象として選定されている¹⁾。一方、BWR炉心においては、原子炉起動時における制御棒の異常な引き抜き及び制御棒落下が適用事象として選定されている。商業用原子炉では反応度投入事故の結果として、解析結果が以下の項目を満足しなければならないとしている。ただし、3の項目については、参考文献2)の添付資料2を用いることで代用できる場合は、これを除外することが可能である。

1. 運転時の異常な過渡変化にあたっては、
 - 1) 燃料エンタルピの最大値は、燃料棒内外圧差に依存して決定される図 1.1.1.1の燃料の許容設計限界を超えないこと。
 - 2) 原子炉冷却材圧力バウンダリにかかる圧力は、最高使用圧力の1.1倍以下であること。
2. 事故にあたっては、

- 1) 燃料エンタルピーの最大値は、 $230\text{cal/g}\cdot\text{UO}_2$ を超えないこと。
- 2) 原子炉冷却材圧力バウンダリにかかる圧力は、最高使用圧力の1.2倍以下であること。
3. 運転時の異常な過渡変化及び事故にあつては、浸水燃料の破裂による衝撃圧力等の発生によつても、原子炉停止能力及び原子炉圧力容器の健全性を損なわないこと。

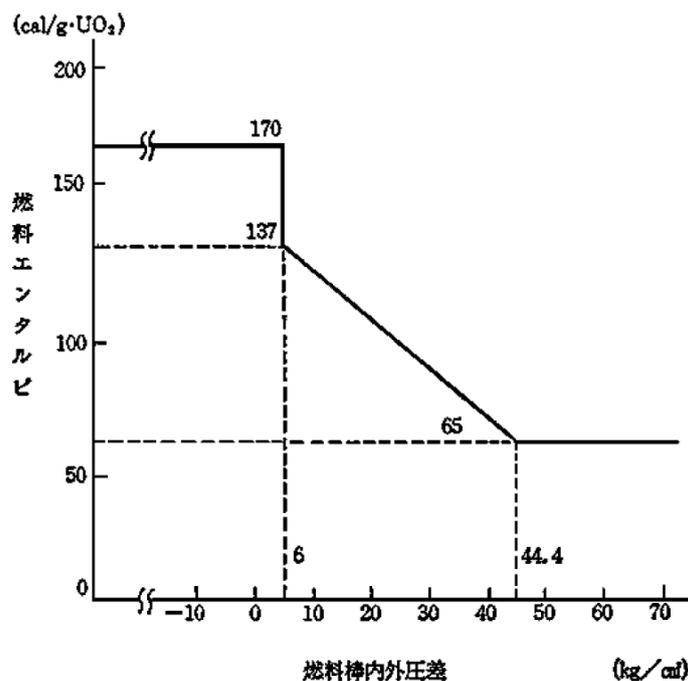


図 1.1.1.1 反応度投入事象における燃料の許容設計限界²⁾

上記の3つを物理的事象に分別すると、以下の2つに大別することができる。

1. 燃料被覆破損
2. 圧力波発生限界

以下では、燃料被覆破損について言及した後に圧力波発生限界について言及する。なお、以下の議論は参考文献3)に基づいている。

燃料被覆破損に関しては、高温破裂型と Pellet Clad Mechanical Interaction(PCMI)の二つの破損モードが考慮される²⁻⁴⁾。高温破裂型とは、燃料温度上昇時に被覆管温度が融点近くまでの高温に達し、外面におけるジルカロイ-水反応度(水-金属反応)により、被覆管が著しく酸化・脆化することである。このような被覆管は、膜沸騰終息時の急冷(クエンチ)時に受ける強い熱応力に抗しきれず、破損することがある。また、被覆管の一部が熔融により肉厚の減少を起こすことも被覆管の脆化促進の要因となる。そのため、燃料被覆破損を抑制するために、日本原子力研究開発機構(Japan Atomic Energy Agency)の原子炉安全性研究炉(Nuclear Safety Research Reactor, NSRR)による実験データから、図

1.1.1.2 の燃料の許容設計限界が作成された。

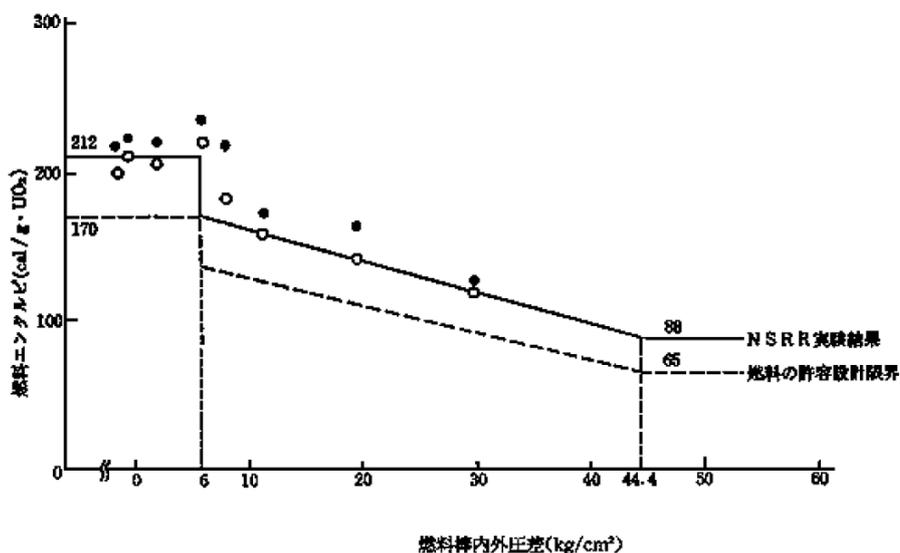


図 1.1.1.2 燃料棒内外圧差に対する燃料被覆破損限界²⁾

図 1.1.1.2 に示すように、NSRR の標準実験によると、燃料被覆の高温破裂は燃料棒の内外圧差に大きく影響が示されている。なお、本項目の判断パラメータは、各燃料棒の燃料エンタルピーの最大値である。

燃料被覆破損のもうひとつのモードである、PCMI 破損について言及する。燃料の燃焼が進むと、被覆管は中性子照射、酸化及び水素化により延性が低下するとともに、燃料ペレットは核分裂性ガスの蓄積等によって膨張する。さらに出力上昇時には膨れ量が増加する可能性がある。従って燃焼の進んだ燃料では、RIA の比較的初期の被覆管温度が有意に上昇する以前において、ペレットの急激な膨張に被覆管が耐えられず、割れが生じて破損することが考えられる。各種燃焼度における RIA 時の PCMI 破損のしきい値を図 1.1.1.3 に示す⁴⁾。

実験シリーズ		破損せず	破 損	実験シリーズ		破損せず	破 損
NSRR	PWR	◇	◆	SPERT, PBF	△	▲	
	BWR	□	—	CABRI (UO ₂)	▽	▼	
	JMTR	○	●	CABRI (MOX)	◎	+	

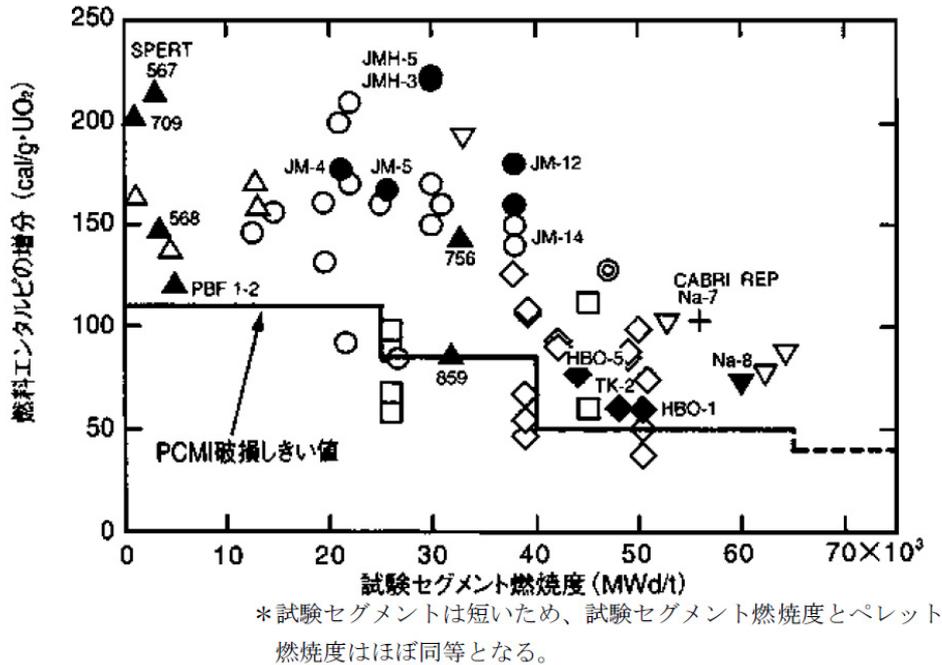


図 1.1.1.3 PCMI 破損による燃料破損しきい値⁴⁾

次に、圧力波発生限界について言及する。燃料に与える発熱量が極めて大きくなると、ペレットの溶融または蒸発によって燃料棒内圧が急上昇する。そのため、パルス出力の発生直後または発生途中で燃料棒は微細化し、冷却水中に飛散する場合がある。この際に、急速な蒸気発生をもたらす結果、圧力波あるいは冷却水塊の飛び上がりといった機械的エネルギーの発生が生じる。NSRR 実験によると標準実験の場合、ペレットの溶融による破損は、燃料エンタルピが約 285cal/g*UO₂ から約 325cal/g*UO₂ の間で発生することが明らかにされている²⁾。しかし、この標準実験では単体燃料セグメントが用いられているが、これをバンドル体系にすることでしきい値が 15%程度低下することが知られている。そのため、上記下限値である 285cal/g*UO₂ をベースとして、バンドル体系時の低下割合 15%と安全余裕として 10cal/g*UO₂ を考慮した結果、圧力波発生限界を 230cal/g*UO₂ としている²⁾。

上記では、反応度投入事象について言及した。次は冷却材喪失事故(LOCA)について述べる。炉心の冷却系の配管が破損及び弁が開いたままになったことによる、冷却材を喪失する事態を冷却材喪失事故(Loss of Coolant Accident, LOCA)と呼ぶ。LOCA が起こる

と原子炉は停止するが、停止後も燃料に蓄積された核分裂生成物が熱を発生し続けるので、炉心を十分に冷却しなければならない。そのため安全解析においては、LOCA 時における非常用炉心冷却系(Emergency Core Cooling System, ECCS)の性能評価が課せられている⁵⁾。ここで、ECCS とは以下の機器のことを含む系統のことである。

1. PWR: 蓄圧注入系、高圧注入系、低圧注入系、炉心上部注入系
2. BWR: 高圧注入又はスプレイ系、低圧スプレイ系、低圧注入系、自動減圧系

ECCS は、冷却材喪失事故時に炉心が冷却可能な形状を維持しつつ、事故を収束させる機能及び性能を有しなければならない。このことを確認するために冷却材喪失事故の解析を行い、次の基準を満足していなければならないとされている⁵⁾。

1. 燃料被覆の温度の計算値の最高値は、1200℃以下であること。
2. 燃料被覆の化学量論的酸化量の計算値は、酸化反応が著しくなる前の被覆管厚さの15%以下であること。
3. 炉心で燃料被覆及び構造材が水と反応するのに伴い発生する水素の量は、格納容器の健全性確保の見地から、十分低い値であること。
4. 燃料の形状の変化を考慮しても、崩壊熱の除去が長期間にわたって行われることが可能であること。

以上より、安全解析には様々な制約条件あり、それら全てに対して炉心が健全性を満たしていることを確認する必要がある。

1.1.2 安定性解析

前節では、安全設計を行うための炉心の過渡事象として、異常な過渡・事故時の解析事象について述べた。しかし、炉心の過渡事象としてはこれらの事故事象のみだけではなく、炉心の安定性も過渡事象の対象となる。沸騰水型原子炉(Boiling Water Reactor, BWR)の設計では、以下の項目が存在する。

- ・ チャンネル安定性
- ・ 炉心安定性
- ・ 領域安定性
- ・ Xe 安定性

上記の安定性のうち、チャンネル安定性、炉心安定性、領域安定性は二相流(液相・気相)が起因するものである。そのため、BWR とは異なり、通常運転時には炉心内がほぼ液相のみである加圧水型原子炉(Pressurized Water Reactor)は熱水力的な安定度が高く、問題として取り上げる必要がない。一方、Xe 安定性については、BWR よりも PWR において重要な問題となる⁶⁾。以下では、上記に示してある安定性について言及する。まず初めに、チャンネル安定性について述べる。

チャンネル出入口間の圧力差(チャンネル圧損)が拘束された沸騰2層流チャンネルにおける、流量・圧力損失の有限な時間遅れを伴った振動現象を密度波振動(チャンネル流量振動)と呼ぶ。図 1.1.2.1 にチャンネル流量振動発生メカニズムを示す⁶⁾。

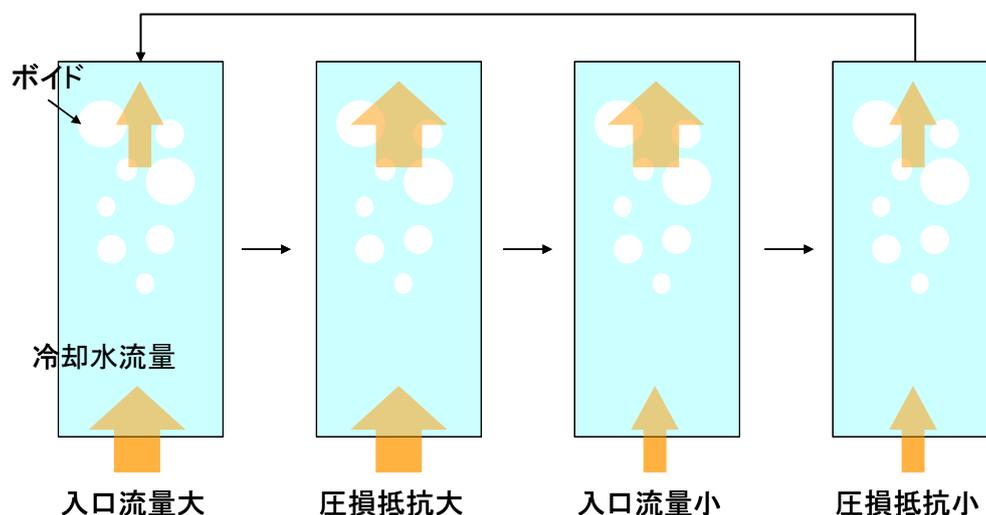


図 1.1.2.1 チャンネル流量振動発生メカニズム

図 1.1.2.1 に示すように、チャンネルの途中から沸騰現象が存在する沸騰チャンネルにおいて、入口流量が増加したとする。その結果として、上部の流量が遅れて増加し、壁面摩擦力等の増大によりチャンネル圧損が増加することで、炉心入口流量が減少する。そして、入口流量が減少したことによりチャンネル上部の圧力損失が減少し、再び入口流量が増加する。このような過程を繰り返すことによって、流量に不安定な振動を生じる。しかし、上部の圧力損失増大に伴う入口流量の低下が、定常状態の流量よりも小さくなければこの振動は次第に少なくなり、定常状態に移行する。なお、このチャンネル安定性の主要な原因は熱水力不安定事象である。次に炉心安定性について言及する。

上述したチャンネル流量振動に核的な要素が加わったものが、炉心安定性及び後述する領域安定性に関わってくる。炉心に反応度外乱が加わったとき、各種のフィードバック効果により、炉心全体の中性子束が同位相で振動することがある。この炉心全体の振動に対する安定性を炉心安定性と呼ぶ。炉心安定性の振動発生メカニズムを図 1.1.2.2 に示す。

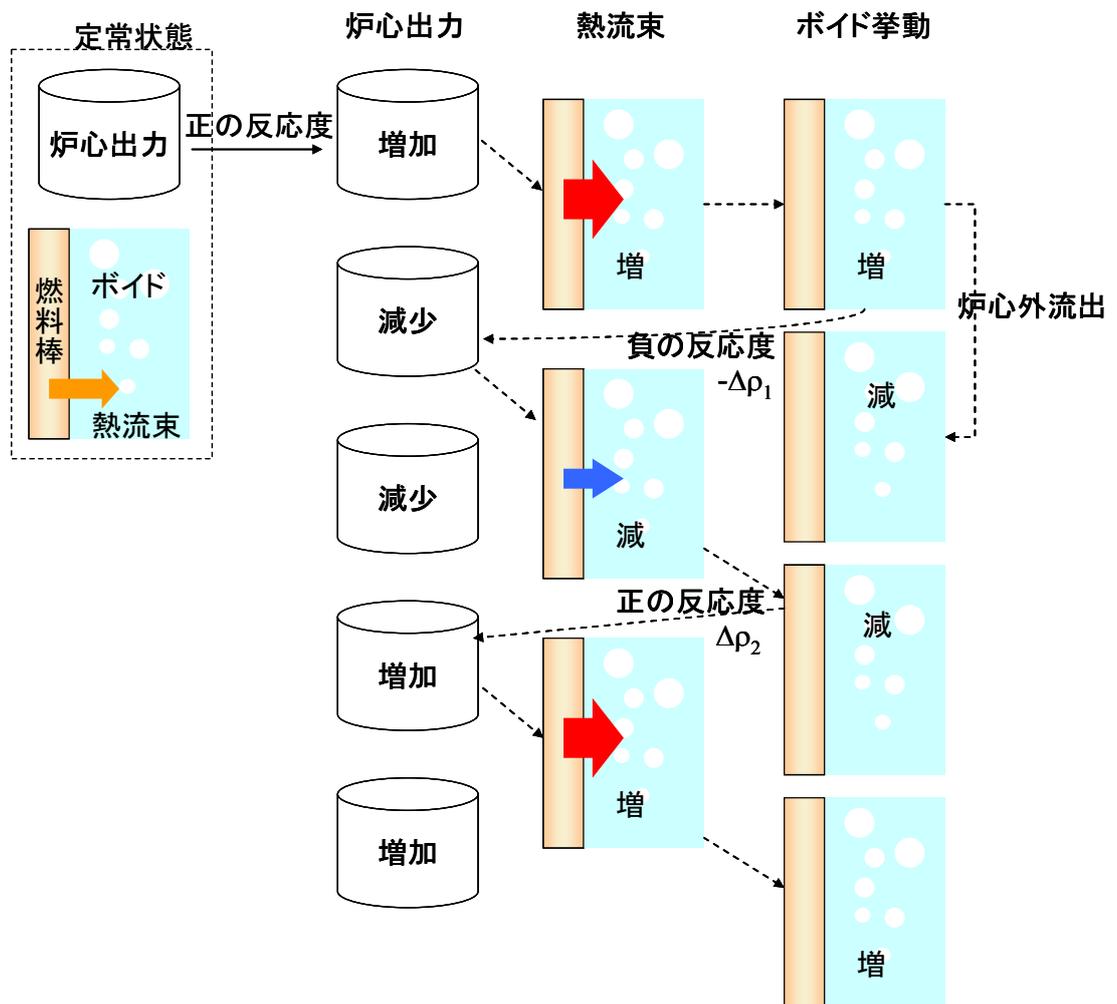


図 1.1.2.2 炉心安定性の振動発生メカニズム

図 1.1.2.2 に示すように、定常状態の炉心に正の反応度が投入されると原子炉出力は増加する。その後、燃料棒から熱が冷却材に伝熱するが、燃料棒の熱容量等のため熱流束は遅れて増加し、冷却材中でのボイドが増加する。ボイドフィードバックは負のフィードバックを有しているため、炉心出力は減少する。その後、熱流束も遅れて減少しはじめる。ボイド率がある程度低下すると、今度は反応度が正に転じ、炉心出力は増加しはじめる。そのため、熱流束も遅れて上昇しボイド率は再び増加する。ここで、負の反応度の絶対値 ρ_1 より正の反応度 ρ_2 が大きいと、炉心出力の振幅は次第に大きくなっていき、不安定な状態になる。このような振動を炉心安定性では扱う。次に、領域不安定性について言及する。

領域不安定現象は、炉心の中心軸をはさんだ領域の中性子束の位相がずれて振動する現象である。領域不安定現象の発生メカニズムを図 1.1.2.3 に示す⁶⁾。

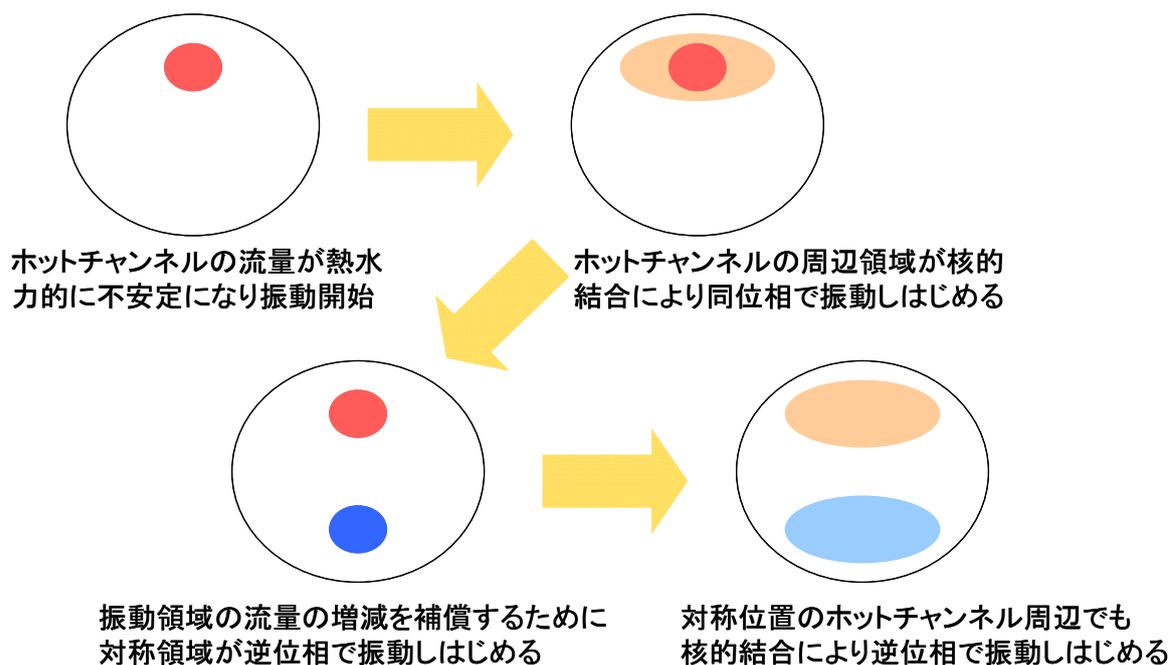


図 1.1.2.3 領域不安定性の発生メカニズム

図 1.1.2.3 に示すように、炉心周辺部に出力の高い燃料集合体(ホットチャンネル)が存在すると仮定し、そのチャンネルが不安定化することにより、チャンネル流量(出力)が振動する。そして、このチャンネルの振動に起因して、周辺の燃料でも同じ位相で振動を開始する。このチャンネル不安定性によって高次モード成分が励起され、対称領域が逆位相で振動しはじめる。このような異なる領域で異なる位相で振動する現象を領域安定性では取り扱っている。

上記では、核熱結合の安定性について言及した。上記の安定性を考慮しなければならないのは沸騰水型原子炉(BWR)であり、加圧水型原子炉(PWR)では考慮する必要がない。しかしながら、後述する Xe 安定性に関しては、BWR よりも PWR 炉心の方がより重要となる⁶⁾。

原子炉中の主要な毒物として、 ^{135}Xe と ^{149}Sm が存在する⁷⁾。これらの毒物は熱群の吸収断面積が非常に大きいため、反応度に対する寄与が大きい。しかし、 ^{149}Sm の半減期は長く、炉心の安定性解析で通常扱うのは ^{135}Xe である^{6), 8)}。Xe 振動のメカニズムを以下で述べる。

炉心のある領域において中性子束が増加し、それと同時に他の領域で減少した時のことを考える。中性子束が増加した領域では、変化以前に比べて Xe の原子数密度は減少する。このような Xe 原子数密度の現象は、この領域の反応度を増加させ、中性子束を増加させてしまう。

一方、中性子束が減少した領域では、Xe の燃焼が減少するうえ、変化以前の高い中

中性子束によって発生した I が引き続き崩壊するために、Xe の原子数密度は増大する。そこで、この領域の反応度は減少し、中性子束を下げってしまう。

しかし、上述した局所的な出力の変位は際限なく続くわけではない。中性子束が増加した領域では、I が以前よりも急速に生成され、それが改変して生じる Xe の原子数密度が多くなり、中性子束が減少する。一方、中性子束が減少した領域では、蓄積していた Xe も崩壊するので、中性子束が増加する。このような順序をたどって、炉内の異なった領域の間で中性子束の振動が発生することを Xe 振動と呼ぶ。Xe 振動の概念図を 1.1.2.4 に示す。

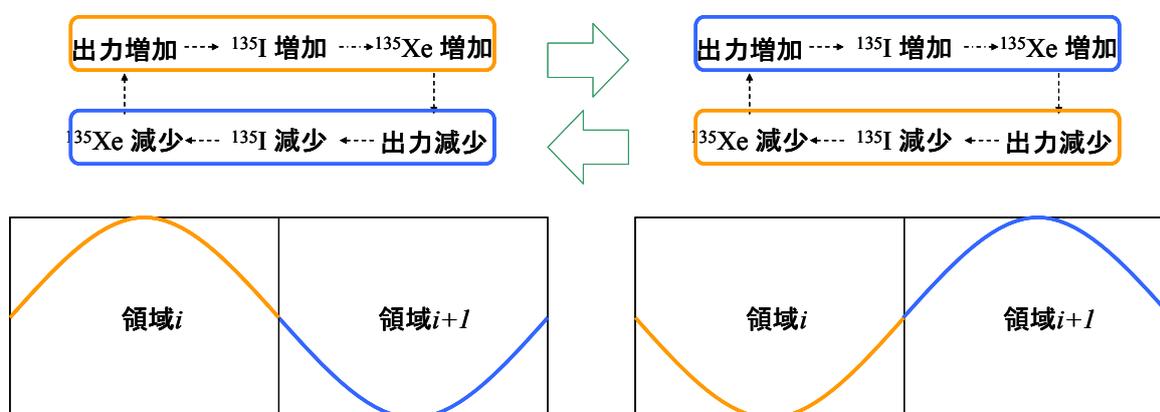


図 1.1.2.4 Xe 振動の発生メカニズム

Xe 振動は上記したチャンネル安定性、炉心安定性や領域安定性とは異なり、炉心出力の振動周期が長い。

1.1.3 Code Scaling, Applicability and Uncertainty Methodology

前々節に示した LOCA や RIA 等の事故事象は、当時の計算機のための解析モデルの精度を考慮して、現行の安全解析では大きな保守性がとられている。しかし、大きな保守性により、プラントの自由度を制約することで、原子力発電の経済性が十分に発揮できない場合がある。一方、現在の 3 次元核計算モデルの進展、詳細熱水力挙動等の実験的理解の進展があり、「最適評価モデル」が開発されている。そのため、最適評価モデルを用いて合理的に原子炉の安全評価に保守性を考慮する方法として、統計的安全評価手法(Code Scaling, Applicability and Uncertainty Methodology, CSAU)を米国原子力規制委員会(Nuclear Regulatory Commission, NRC)が提案している。統計的安全評価手法とは、安全指針で設定された異常な過渡変化及び事故に対して保守的なシナリオを設定し、現実的な入力値を用いて過渡事象の不確かさを定量化し、得られる解析結果を統計的に評価することで、合理的な保守性をもつ評価値を算出することを目標としている。現行の

安全評価手法と統計的安全評価手法を比較したものを表 1.1.3.1 に示す。

表 1.1.3.1 現行安全評価手法と統計的安全評価手法の比較⁹⁾

	現行安全評価手法	統計的安全評価手法
評価対象事象	指針等で定義される異常な過渡変化及び事故(Design Base Event)	
評価シナリオ	評価すべき事柄の前提、仮定、その他の条件は予め定めて、解決する(決定論) 設計の妥当性を担保するために保守的にされる(例:単一故障等)	
入力値	保守的に設定 (包絡条件を設定)	現実的に設定 *解析モデル、コード、実機運転経験や試験等知見レベルに基づき不確かさを考慮
解析コード	不確かさの度合いが必ずしも定量的に把握されていないコードを採用	主要な不確かさが定量的に把握された最適評価コードを採用
統計処理	なし	評価手法における不確かさ及び安全評価値を決定するために統計処理を実施

表 1.1.3.1 より、現行の安全評価手法は安全評価の入力値として、包絡条件を設定することで安全解析コードの不確かさを暗に考慮している。一方、統計的安全評価手法では、解析コードの不確かさを把握することで、現実的な入力値を用いることができ、結果として合理的な安全性を担保していることが分かる。このことから、統計的安全評価では、解析コードの不確かさを定量的に評価することが重要になる。そのため統計的安全評価では、図 1.1.3.1 のステップに従って解析コードの評価、パラメータの不確かさの定量化、感度解析及び不確かさ評価が行われる¹⁰⁾。以下で、図 1.1.3.1 の各ステップについて簡潔に述べる。

- Step1. 安全評価対象となる、プロセス、定性的説明、特徴を明確化する。例として、制御棒落下・飛び出し、LOCA などが挙げられる。
- Step2. 適用する炉心の型を決定する。例として、BWR 炉心を選定するとしても、BWR においてもプラント間に詳細な設計構造の相違があり、例えば BWR、BWR2、BWR3、BWR4、BWR5、BWR6、ABWR などがある。
- Step3. ここで、統計的安全評価において特に重要となる PIRT(Phenomena Identification and Ranking Table)を作成する。PIRT とは、評価対象となる動的現象を同定、分析、整理した上で、評価項目にそって抽出した項目ごとに重要度を定義するランキングテーブルであり、本手法の中核をなす。
- Step4. 評価の整合性を保つために、使用される解析コード及びそのバージョンは固定される。

- Step5. 使用するコードの詳細を明確にした文書を作成する。本ステップの重要な部分として、使用するモデル及び相関式の解説と評価報告、検証結果が明記されることがある。
- Step6. 以下の視点よりコード性能を分析する。
- ① 基礎式
 - ② 構成式
 - ③ 数値解法
 - ④ モデル校正及びノーディング
- Step7. 本ステップでは、以降のステップで重要となる検証データベースの作成を行う。
- Step8. 解析モデルのノーディングでは、重要な物理挙動及びプラント・炉心設計を十分考慮できる程度に細かくし、一方、計算コストに見合う程度に粗くするとされている。そのため、プラントのノーディングを同定する際には、解析上の経験、また、複数回の感度評価を参考とすることになる。
- Step9. Step7及び8においてコード適用性に関する不確かさが判明してくる。そこで、事象を支配する重要な物理現象については、検証結果より、コードモデルの精度、ばらつき及び必要なバイアスを定量化することができる。
- Step10. すべての炉外実験において、実機規模の試験体を構築することは困難であり、物理現象の特性を把握した上で、小規模のモックアップ装置を作成し、これによりデータを取得することは少なくない。このように得られた実験データを軸にコード検証データベースを作成する場合は、そのスケール効果についても評価が求められることとなる。
- Step11. 統計的安全評価手法では、評価対象の初期条件を明確に定義する必要があり、これに不確定変動分が予想される場合は、その不確かさを定義する必要がある。
- Step12. Step3で作成したPIRTで規定される重要パラメータ個別の不確かさ変動に対する、結果への影響量を評価する。
- Step13. Step12ではパラメータ個別の不確かさに対する感度解析を行なったが、本ステップでは、重要パラメータを同時かつランダムに変動させた場合に、結果への影響量を評価する。
- Step14. 個別感度解析及び(同時)モンテカルロ評価結果に統計処理を施し、95 確率/95%信頼度の上限值を求める。なお、NRC では、解析結果の確率的表現を 95%上限とすることについて、標準的な Engineering practice に沿うものとし、これを認めている¹¹⁾。

以上が、統計的安全評価手法の手順である。統計的安全評価手法は、Westinghouse 社の AP600 や AP1000 などに適用されている^{12,13)}。また国内でも BWR 及び PWR の各プ

ラントメーカーが行った解析結果の結果、現行の安全評価手法よりも安全裕度の保守性を合理的に評価できていることを報告している^{10,11)}。

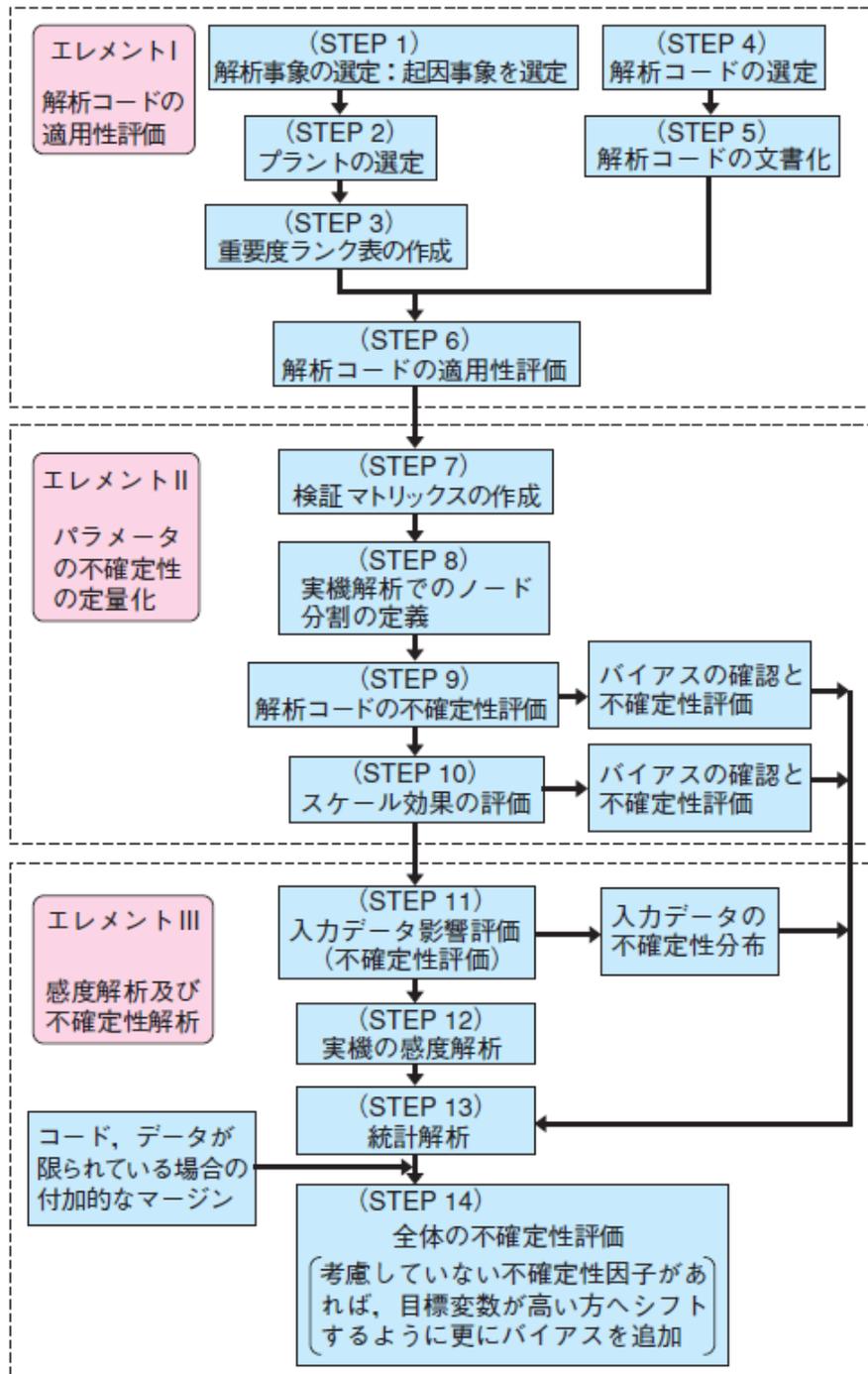


図 1.1.3.1 統計的安全評価手法に基づく作業手順¹⁰⁾

1.1.4 Dynamic Rod Worth Measurement

商業用 PWR では発電コスト低減の観点から、低出力時炉物理試験工程の短縮が求められている。そこで、制御棒価値測定として従来から使用されている方法のボロン濃度希釈/濃縮法に代わり、短時間で制御棒価値を測定できる手法として動的制御棒価値測定法(Dynamic Rod Worth Measurement, DRWM)が採用されている^{14,15)}。なお、DRWM は Westinghouse 社が開発し、1996 年に NRC による承認がなされている。

ボロン濃度希釈法及び DRWM のいずれにおいても、一点炉動特性方程式を用いて炉心に添加された反応度を測定する。PWR 炉心では、炉心から漏れ出る中性子を炉外検出器(NIS)によって測定し、その検出器信号を処理することによって反応度を求めている。そのため、炉内中性子密度と NIS 信号との関係を把握する必要がある。この関係を正確に求めるためには、3次元炉心過渡計算を行う必要があるが、解析手法や計算機等の制約から、以前はこの関係を直接求めることは困難であった。そのため、炉内中性子密度と NIS 信号が、比例関係になるような条件下で炉心反応度を求めていた。このことから、以前の測定方法では制御棒バンク操作の度に安定状態を確保する必要が生じ、その結果、制御棒価値測定に要する時間が長くなっていた(1バンクの制御棒価値測定に3時間程度が必要)¹⁵⁾。一方、DRWM では、進化してきた炉心計算法や計算機の処理能力を用いて、制御棒バンク連続挿入の際の中性子束分布変化を3次元動特性計算コードにより模擬する。そして、その解析結果をもとに NIS 信号と炉内中性子束との関係を求め、NIS 信号を処理して反応度を求める。このことから、従来法のように炉心の安定状態を確保する必要が不要になり、測定時間を制御棒バンク1つあたり15分程度に短縮することが可能となった¹⁵⁾。

1.2 現在の核計算における過渡計算手法の現状

前節までは、炉心の過渡解析の解析対象について言及してきた。そこで本節では、これらの過渡解析における核計算方法として、どのような計算手法で解析されているかについて言及していく。なお、従来の核計算の過渡解析手法の詳細は、3章を参照のこと。

現在及び次世代炉心計算コードとして、動特性機能を有するいくつかの炉心計算コードの計算方法をまとめたものを表 1.2.1 に示す。表 1.2.1 より、現在の炉心計算コードの定常状態の計算方法としては、拡散と近代ノード法の組み合わせ方法が主流であることが分かる。また、本研究で注目する数値時間積分方法としては、周波数変換法(Frequency transform method, FT)及び完全陰解法(Fully implicit method)が主流であることが分かる。これら計算方法の組み合わせを採用している理由としては、近代ノード法を用いることで粗メッシュ体系での計算を行い、完全陰解法を用いることで比較的少ない計算コストで数値的に安定して計算を行いたいという試みがであると考えられる。このような試み

を行う理由として、計算機の性能や熱水力計算コード等にカップリングする際に、核計算部分に膨大な計算時間を割くことが出来ないためである。

1.2.1 炉心計算コードの計算方法¹⁶⁻²⁴⁾

Code system	SIMULATE-3K	ENTRÉE	SKETCH-N	SPANDEX	ANCK
Developer	Studsvik	TEPSYS	JNES/JAEA/TIT	GE	WH/MHI
model	Diffusion	Diffusion	Diffusion	Diffusion	Diffusion
Space discretization	NEM	NEM	NEM	NEM	NEM
Time Integration	FT/ Fully Implicit	Fully Implicit	Fully Implicit	RG- Runge-Kutta	SCM
No. of energy groups	2	2	2	Unknown	2
Code system	STAND	AETNA	NESTLE	SCOPE2	PARCS
Developer	Hitachi	GNF	North Carolina State Univ.	NFI	Purdue Univ.
model	Diffusion	Diffusion	Diffusion	Diffusion/SP3	Diffusion/SP3
Space discretization	NEM	SANM	NEM	SANM	ANM/NEM
Time Integration	IQS/ Fully Implicit	FT/ Fully Implicit	Fully Implicit	FT/Theta	FT/Theta
No. of energy groups	3	3	2 to 4	Multi	Multi

また表 1.2.1 から、現在の炉心計算コードの数値時間積分方法として、周波数変換法、完全陰解法、Stiffness Confinement Method(SCM)、改良準静近似法(Improved Quasi-Static)、 θ 法など、多くの計算手法があることが分かる。詳細は本論文の3章で述べるが、動特性計算方法には他にも多くの計算手法がある。そのため、現在の炉心計算コードでは、ある特定の数値時間積分法で計算するためのコーディングを行っており、その他の計算方法を直ちに実装できるということではない。そのため、既存の数値時間積分法は統一化されておらず、従来法同士の互換性が弱い。

1.3 本研究の目的

1.1 節では炉心の安全解析方法について述べ、今後、安全解析をモンテカルロ法として行う統計的安全評価手法が主流になる可能性が示した。また前節では、現在の炉心計算コードが統計的安全評価手法等に耐えうるために、計算速度及び計算精度の妥協点として、比較的計算コストが低く数値的に安定な、完全陰解法を用いていることを示した。しかし、現在の発達してきている計算機に対応して、炉心解析に用いる手法も発達してきている現状がある。例として、原子燃料工業の炉心計算コードの SCOPE 2 や Purdue 大学の PARCS は輸送計算方法として SP3 が実装されており、時間発展まで計算可能である^{18,19)}。また、時間発展の機能は有していないが、Studsvik Scandpower 社の SIMULATE-5²⁵⁾ も SP3 が実装されており、今後の炉心計算方法の主流となる可能性がある。さらに、SP3 に加え、Method of Characteristics(MOC)の炉心計算への適用も、炉物理の中で現在注目されている研究の一つである。MOC の炉心計算への適用例としては、Studsvik Scandpower 社の CASMO-4E²⁶⁾、四国電力社の SHIKOKU²⁷⁾、テプコシステムズ社の CHAPLET-3D²⁸⁾、Purdue 大学/KAERI/Soul 大学の DeCART²⁸⁾がある。また、DeCART は動特性機能も有している。このように、計算機性能が向上するに従い、より詳細な計算方法が炉心計算に適用されつつある。

前節までや本節で言及してきたことを踏まえると、今後の動特性計算手法に求められる性質としては、以下の性質が考えられる。

- ・ 現行の拡散計算に対してはもちろんのこと、今後の炉心計算コードの開発を考慮して、輸送計算でも実機の安全解析が行えるための計算時間を達成可能な高速な計算手法
- ・ 現在の高度化してきた空間に関しての計算精度を劣化させることなく、適切な動特性計算が可能となる高精度な計算手法

前節でも述べたように、現在の炉心計算コードの動特性計算手法として、完全陰解法、周波数変換法及び改良準静近似が多く用いられている。詳細は3章にて述べるが、これらの手法は、振幅関数の空間または時間依存性について近似を導入している。そこで、これらの近似を排除することで、従来法を一般化(統一化)した手法を開発することが可能である。従来法を統一的に扱える手法を開発することで、従来法の動特性計算理論を体系化することができ、原子炉物理学の動特性理論を高度化することができるために、本研究に対して学問的に意義がある。

以上のことを踏まえて、本研究の目的として、工学的観点と炉物理的観点から以下の2つを本研究の目的とする。なお、本研究は輸送方程式ではなく、現在までに様々な研究がされてきた、拡散方程式を用いて動特性解析手法の研究を行う。

- ・ 工学的観点
 - 現行の動特性計算手法と比較して高速かつ高精度な動特性計算手法の開発
- ・ 炉物理的観点
 - 従来の動特性計算手法を統一的に扱える動特性計算理論の構築

1.4 本論文の構成

本論文は全7章構成であり、本章では本研究で対象とする物理現象、安全解析方法と現在の動特性計算方法の現状について述べた。そして次章以降では、本研究で用いる計算理論等を言及していく。詳細には、2章では炉心計算方法の基礎となる定常状態の計算方法について述べる。次に3,4章では本論文の要となる動特性計算方法について述べる。

3章では、従来から用いられている代表的な動特性計算方法について述べていき、従来法の問題点を明確化していく。次に4章では本研究で新たに開発・適用した動特性計算方法について述べていき、計算理論上、従来法からどのように改善しているかを説明する。

5章では、実際の解析で重要となるフィードバック計算について述べる。そして、6章では検証計算を通して、本研究で新しく開発した動特性計算手法についての検討及び考察を行う。

最後に7章において、3~6章までの結果についてまとめることで、本研究の結論を述べる。

1.5 参考文献

- 1) 原子力安全委員会, “発電用軽水炉原子炉施設の安全評価に関する審査指針”, 原子力安全委員会, (2001).
- 2) 原子力安全委員会, “発電用軽水炉施設の反応度投入事象に関する評価”, 原子力安全委員会, (1990).
- 3) 池田秀晃, “3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用”, 博士論文, 大阪大学, (2002).
- 4) 原子力安全委員会, “発電用軽水炉型原子炉施設の反応度投入事象における燃焼の進んだ燃料の取扱いについて”, 原子力安全委員会, (1999).
- 5) 原子力安全委員会, “軽水型動力炉の非常用炉心冷却系の性能評価指針”, 原子力安全委員会, (1993).
- 6) 岡芳明, 鈴木勝男, 小野寛ら, 原子炉動特性とプラント制御, オーム社, (2008).
- 7) J. J. ドウデルスタット, ルイス J. ハミルトン 著, 成田正邦, 藤田文行 共訳, 原子

- 炉の理論と解析(下), 現代工学社 (1981).
- 8) 大木繁夫, 奥村啓介, 岡芳明ら, 原子炉設計, オーム社, (2010).
 - 9) 三島嘉一郎, “計算結果の信頼性 (1)統計的安全評価手法について-安全解析としての信頼性確保の方法-”, *AESJ-2008*, Osaka, Japan, March. 26-28, 2008, 計算科学技術部企画セッション (2008).
 - 10) 寺前哲也, 坂場弘, 西浦雅詞ら, “より高性能に, より安全に-安全解析の最新技術 The Latest Technology of Safety Analysis”, 三菱重工技報, **43**[3], p25 (2006).
 - 11) 河村真一郎, “最適評価コードによる安全解析への取り組み”, 原子炉炉心計算法の高度化の現状と展望, 日本原子力学会, p.160 (2001).
 - 12) J. Zhang, S. M. Bajorek, R. M. Kemper *et al.*, “Application of the WCOBRA/TRAC best-estimate methodology to the AP600 large-break LOCA analysis,” *Nucl. Eng. Des.*, **186**[1-2], 279-301 (1998).
 - 13) C. Frepoli, K. Ohkawa, R. M. Kemper, “Realistic large break LOCA analysis of AP1000 with ASTRUM,” *The 6-th Int. Conf on Nucl. Thermal Hydraulic*, Nara Japan, October 4-8, (2004).
 - 14) 島津洋一郎, “反応度測定手法と実機PWRへの適用”, 第36回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.165 (2004).
 - 15) 仙石勝久, 森正明, 牛尾直史, “PWR動的制御棒価値測定解析への適用”, 原子炉炉心計算法の高度化の現状と展望, 日本原子力学会, p.134 (2001).
 - 16) S. Aoki, T. Suemura, J. Ogawa, *et al.*, “The Verification of 3 Dimensional Nodal Kinetics Coade ANCK Using Transient Benchmark Problems,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[6], 862-868 (2007).
 - 17) T. M. Sutton, B. N. Aviles, “Diffusion theory methods for spatial kinetics calculation,” *Prog. Nucl. Energy*, **30**[2], 119-182 (1996).
 - 18) T. Endo, M. Tatsumi, “Study on kinetic transport solvers for pin-by-pin core calculation,” *Proc. PHYSOR2008*, Interlaken, Switzerland, Sept. 14-19, 2008, (2008). [CD-ROM]
 - 19) T. Downar, D. Lee, Y. Xu, *et al.*, *PARCS v2.6 U.S NRC Core Neutronics Simulator THEORY MANUAL*, School of Nuclear Engineering Purdue University (2004).
 - 20) Y. Ishii, H. Sano, Y. Fukasawa, “Verification of Three-dimensional Multi-energy Group Kinetics Analysis Model by Using BWR Critical Operation Data,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**, 755-760 (1999).
 - 21) M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, “Development of Kinetics Model for BWR Core Simulator AETNA,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[4], 201-212 (2003).
 - 22) P. J. Turinsky, R. M. K. AL-Chalabi, P. Engrand, *et al.*, *NESTLE Few-group neutron*

- diffusion equation solver utilizing the nodal expansion method for eigenvalue, adjoint, fixed-source steady-state and transient problems*, Electric Power Research Center, North Carolina State University (1994).
- 23) V. G. Zimin, H. Ninokata, "Nodal neutron kinetics model based on nonlinear iteration procedure for LWR analysis," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **25**[8], 507-528 (2003).
 - 24) A. Hotta, "Development and verification of a BWR core simulation system for space and time dependent coupled phenomena," Thesis, Doctor of Engineering in Nuclear Engineering, Tokyo Institute of Technology (2001).
 - 25) T. Bahadir, S. Lindahl, "Studsвик's next generation nodal code SIMULATE-5," *ANFM 2009*, South Carolina, April 12-15 (2009).
 - 26) K. Smith, "Full-Core 2-D LWR Core Calculation with CASMO4-E," *PHYSOR2002*, Korea, Oct. 7-10 (2002).
 - 27) A. Giho, K. Sakai, Y. Imamura, *et al*, "Development of Axially Simplified Method of Characteristics in Three-Dimensional Geometry," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **45**[10], 985-996 (2003).
 - 28) S. Kosaka, T. Takeda, "Verification of 3D heterogeneous core transport calculation utilizing non-linear iteration technique," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**[6], 645-654 (2003).
 - 29) M. Hursin, T. J. Downar, J. Thomas, "PWR control rod ejection analysis with the method of characteristic code DeCART," *PHYSOR2008*, Switzerland, Sept 14-19 (2008).

第2章 定常状態の数値解法

2.1 本章の概要

炉心解析の中性子に係わる物理現象は、ボルツマン輸送方程式によって記述できる。そのため、実際の炉心解析では、ボルツマン輸送方程式を如何にして計算するかが問題となる。そこで、本章では、炉心解析の基礎となる定常状態の数値解法について述べる。詳細は次章で述べるが、動特性解析も最終的な方程式は、定常状態の式と同じ形に帰着させることができる。そのため、炉心解析における定常状態の数値解法は基礎であり重要な根幹となる。

そこで本章の2.2節では、現在の炉心計算で幅広く用いられており、また、本研究でも用いる拡散方程式の導出を行う。しかし、2.2節で導出した拡散方程式はそのままの形では計算機を用いて扱うのは困難であるため、次の2.3節では、拡散方程式を計算機で計算するための有限差分法などの数値解法について述べる。

2.4節では、現在の炉心解析の主流となっている近代ノード法について述べる。現在の炉心計算コードは近代ノード法を用いることで、粗メッシュ体系でも計算精度よく計算することが可能であり、現在の炉心解析を支えている非常に重要な技術である。

2.5節では、前節までの内容とは多少異なり、制御棒の取扱い方である **Cusping** モデルについて述べる。炉心内の挙動を把握するためには、制御棒が炉心特性に与える影響が非常に大きい。そのため、制御棒の効果をより正確に再現するために、様々な試みがなされている¹⁾。

本章最後の節である2.6節では、計算効率を大幅に向上させることができる各種加速法について述べる。炉心解析には核計算だけではなく、熱水力計算、燃焼計算など多くの計算が必要であり、膨大な量の計算を高速で行う必要がある。そのため、これらの計算を効率よく実行することは非常に重要であり、実機の炉心計算コードにも多くの加速法が実装されている。そこで加速法を用い、実際の炉心計算コードと同様な条件下で計算を行うことで、実機の炉心計算コードにも本研究で開発した手法が適用可能か否かをより正確に把握できる。そのため、本研究においてもいくつかの加速法を実装している。

2.2 拡散方程式

2.2.1 中性子輸送方程式

本章の序論でも述べたように、原子炉の炉心における中性子束分布の解析はボルツマン輸送方程式を解くことに帰着する。そのため、ボルツマンの輸送方程式をいかにして精度良く計算するかが重要である。

ボルツマンの輸送方程式は元来、気体分子の速度分布を記述するために導出された方程式である。中性子は電氣的に中性であるため、力として電磁気力は無視でき、核力のみであることができる。また原子炉内では中性子数密度が、炉内燃料媒質や減速材媒質の核種数密度と比較して十分に小さく中性子同士の衝突を無視できるため、中性子の挙動を気体分子のそれと同様に、統計的に扱うことが可能である²⁾。定常状態のボルツマンの輸送方程式は次式である³⁾。

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) = Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) \quad (2.2.1.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) = & \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}) \phi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') \\ & + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') \\ & + s(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.2.1.2)$$

である。

(2.2.1.1)式は微積分型の輸送方程式と呼ばれている。一方、(2.2.1.1)式を中性子の飛行方向 s に沿って積分すると、次式の積分型の輸送方程式を得ることが出来る。

$$\phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) = \int_0^\infty Q(\mathbf{r} - s\mathbf{\Omega}, E, \mathbf{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\mathbf{\Omega}, E) ds'\right) ds \quad (2.2.1.3)$$

上記のように、ボルツマンの輸送方程式は微積分型と積分型の2種類がある。そのため、ボルツマンの輸送方程式を計算する数値計算方法としては、微積分型を対象とした数値解法と積分型を対象とした数値解法の大きく分けて二つの種類がある。各輸送方程式に対する数値解法を表 2.2.1.1 に示す。

表 2.2.1.1 各輸送方程式に対する輸送数値計算方法⁴⁾

微積分型	積分型
Characteristics法、 S_N 、衝突確率法、CCCP法	
P_N , SP_N	

表 2.2.1.1 より各種輸送方程式に対して、様々な数値解法があることが分かる。しかし、現在の炉心計算において主流になっているのは、微積分型の数値解法である。積分型方程式のメリットとしては、全ての領域に対して全領域間の相互作用を考慮するために、計算精度がよい点がある。一方、領域数が少ないピンセル計算のような体系では比較的少ない計算コストで計算することができるが、体系が大きくなると領域数の二乗に比例して計算コストが増加する。そのため、集合体計算などの比較的大きな体系では、隣接領域の相互関係しか考慮しない微積分型の方が、少ない計算コストとなるので、現在の格子計算では微積分型の計算方法が主流となっている。

2.2.2 拡散方程式の導出

前節では、炉内の中性子の挙動を厳密に表現することが可能である、中性子輸送方程式について述べた。しかし、原子炉のような大きな計算体系に対し、中性子輸送方程式を計算機で近似的に計算することは、現在の計算機を用いても多くの計算時間を必要とする。そこで現在の多くの炉心計算コードでは、中性子輸送方程式に対して近似を導入した、拡散方程式を炉心解析に用いている。そこで本節では、中性子輸送方程式に対して関数展開を用いることで、拡散方程式を導出することを試みる。以下では簡単のために、次式の一次元の輸送方程式について考える。

$$\mu \cdot \frac{d}{dx} \phi(x, E, \mu) + \Sigma_t(x, E) \phi(x, E, \mu) = Q(x, E, \mu) \quad (2.2.2.1)$$

(2.2.2.1)式から拡散方程式を導出するにあたり、中性子束 $\phi(x, E, \mu)$ を次式の様に変形する。

$$\phi(x, E, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2} \phi_l(x, E) P_l(\mu) \quad (2.2.2.2)$$

ここで、

ϕ_l : l 次の Legendre 関数に対応する展開係数

である。

なお(2.2.2.2)式の右辺の係数は、Legendre 関数が次式の直交関係を有するので、全飛行方向に対して積分した時に整合性を保つための規格化因子である。

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn} \quad (2.2.2.3)$$

ここで、

δ_{mn} : クロネッカーのデルタ

である。

(2.2.2.2)式において留意することとして、(2.2.2.2)式では中性子束を直交完備な関数の Legendre 関数で無限大まで展開しているため、(2.2.2.2)式は厳密に成り立っていること

があげられる。拡散方程式を導出するために、(2.2.2.2)式の展開次数を $l=1$ 次まで展開すると次式を得ることができる。なお、この近似は 1 次成分まで考慮しているために、 P_1 近似と呼称されている³⁾。

$$\phi(x, E, \mu) \approx \frac{1}{2} \phi_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \phi_1(x, E) P_1(\mu) \quad (2.2.2.4)$$

(2.2.2.1)式の飛行方向を消去するために、方向余弦に対して積分を行い、さらに直交条件を用いるために、式の両辺に P_0 と P_1 を乗算を行う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 P_0(\mu) \mu \cdot \phi(x, E, \mu) d\mu + \Sigma_t(x, E) \int_{-1}^1 P_0(\mu) \phi(x, E, \mu) d\mu \\ = \int_{-1}^1 P_0(\mu) Q(x, E, \mu) d\mu \end{aligned} \quad (2.2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 P_1(\mu) \mu \cdot \phi(x, E, \mu) d\mu + \Sigma_t(x, E) \int_{-1}^1 P_1(\mu) \phi(x, E, \mu) d\mu \\ = \int_{-1}^1 P_1(\mu) Q(x, E, \mu) d\mu \end{aligned} \quad (2.2.2.6)$$

(2.2.2.5)及び(2.2.2.6)式の中性子束に(2.2.2.3)式を代入し、さらに中性子源も中性子束と同様に展開を行うと次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \mu P_0(\mu) \left[\frac{1}{2} \phi_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \phi_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \\ + \Sigma_t(x, E) \int_{-1}^1 P_0(\mu) \left[\frac{1}{2} \phi_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \phi_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \\ = \int_{-1}^1 P_0(\mu) \left[\frac{1}{2} Q_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} Q_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \end{aligned} \quad (2.2.2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \mu P_1(\mu) \left[\frac{1}{2} \phi_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \phi_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \\ + \Sigma_t(x, E) \int_{-1}^1 P_1(\mu) \left[\frac{1}{2} \phi_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \phi_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \\ = \int_{-1}^1 P_1(\mu) \left[\frac{1}{2} Q_0(x, E) P_0(\mu) + \frac{3}{2} Q_1(x, E) P_1(\mu) \right] d\mu \end{aligned} \quad (2.2.2.8)$$

(2.2.2.7)式及び(2.2.2.8)式は Legendre 多項式の直交関係を用いることにより、直ちに次式に変形することが出来る。

$$\frac{d}{dx}\phi_1(x, E) + \Sigma_t(x, E)\phi_0(x, E) = Q_0(x, E) \quad (2.2.2.9)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\phi_0(x, E) + \Sigma_t(x, E)\phi_1(x, E) = Q_1(x, E) \quad (2.2.2.10)$$

ここで、

$$P_0(\mu) = 1 \quad (2.2.2.11)$$

$$P_1(\mu) = \mu \quad (2.2.2.12)$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \quad (2.2.2.13)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{3}(2P_2(\mu) + P_0(\mu)) \quad (\text{※}(2.2.2.11)\sim(2.2.2.13)\text{式より}) \quad (2.2.2.14)$$

である。

次に1次の中性子源がゼロであると近似すると、(2.2.2.10)式は次式に変形することができる。なお、核分裂は等方的であるために、この近似は非等方散乱を無視していることになる。

$$\phi_1(x, E) = -\frac{1}{3\Sigma_t(x, E)}\frac{d}{dx}\phi_0(x, E) \quad (2.2.2.15)$$

上式を(2.2.2.8)式に代入すると、最終的に次式の拡散方程式を得ることが出来る。

$$-\frac{d}{dx}D(x, E)\frac{d}{dx}\phi_0(x, E) + \Sigma_t(x, E)\phi_0(x, E) = Q_0(x, E) \quad (2.2.2.16)$$

ここで、

$$D(x, E) = -\frac{1}{3\Sigma_t(x, E)} \quad (2.2.2.17)$$

である。

今回は一次元体系を考えているために、極角方向のみを考えればよかった。しかし、2次元以上の体系では、方位角方向についても関数展開を行う必要があり、球面調和関数を用いる。多次元体系での拡散方程式は最終的に次式になる。

$$-\nabla D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi_0(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi_0(\mathbf{r}, E) = Q_0(\mathbf{r}, E) \quad (2.2.2.18)$$

また、 $\phi_0(\mathbf{r}, E)$ は次式のように、角中性子束を全飛行方向について積分することで得ることができるので、全中性子束と呼ばれる。

$$\phi_0(x, E) = \int_{-1}^1 \phi(x, E, \mu)P_0(\mu)d\mu = \int_{4\pi} \phi(x, E, \Omega)d\Omega \quad (2.2.2.19)$$

以下では、全中性子束を ϕ として記述していく。

2.3 拡散方程式の数値解法

2.3.1 離散化手法

前節では、輸送方程式に関数展開を行うことで拡散方程式の導出を行った。しかし、(2.2.2.18)式に示すように、拡散方程式は位置 \mathbf{r} 及びエネルギー E に関して連続関数になっている。しかし、連続変数を有する方程式を、炉心計算のような複雑な計算体系に直接適用するのは困難である。そのため、本節では拡散方程式の各変数について離散化を導入することにより、近似的に複雑な体系についても計算できるように変形する。

前節での拡散方程式の変数は位置 \mathbf{r} とエネルギー E であるため、以下の二つの離散化を行う必要がある。

1. エネルギー E に対する離散化
2. 位置 \mathbf{r} に対する離散化

以降では、エネルギー E に対する離散化を述べた後に、位置 \mathbf{r} に対する離散化方法について言及する。

エネルギーを離散化するにあたり、エネルギー群という概念を導入する。例として、エネルギー g 群の中性子束を次式で定義する⁵⁾。

$$\phi_g(\mathbf{r}) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE \quad (2.3.1.1)$$

(2.3.1.1)式より、 g 群の中性子束という物理量は、連続エネルギー E_g から E_{g-1} の中性子束の積分量であることが分かる。このエネルギー群という概念を用いて中性子束以外もエネルギー群という概念を導入すると、最終的に次式のエネルギーに対して離散化した拡散方程式を得ることができる。

$$-\nabla D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = Q_g(\mathbf{r}) \quad (2.3.1.2)$$

なお、全断面積、拡散係数、核分裂スペクトルなどに対するエネルギー群の導入方法はそれぞれの物理的な意味によって異なる。詳細は参考文献 5) を参照のこと。次に位置 \mathbf{r} に対する離散化について述べる。

位置 \mathbf{r} に対する離散化方法は、有限要素法、有限体積法、境界要素法、有限差分法などの多くの手法があるが⁶⁾、本論文では、有限差分法について述べる。

有限差分法を用いて一次元の空間に対する離散化を導入するにあたり、以下の i 領域(メッシュ)平均の中性子束を定義する。

$$\phi_{i,g} = \frac{\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} \phi_g(x) dx}{\Delta x_i} \quad (2.3.1.3)$$

また、断面積に関しても区間に関して平均化して領域 Δx_i に対して積分を行うと、次式のように位置に関して離散化した際のバランス方程式を導出することができる。

$$\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} (-\nabla D_{i,g} \nabla \phi_{i,g}) dx + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,g} \Delta x_i = Q_{i,g} \Delta x_i \quad (2.3.1.4)$$

次に、(2.3.1.4)式の左辺第一項目に対して注目すると、次式の変形を行うことが出来る。

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} (-\nabla D_{i,g} \nabla \phi_{i,g}) dx &= \int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} \left(-\frac{d}{dx} D_{i,g} \frac{d}{dx} \phi_{i,g} \right) dx \\ &= -D_{i,g} \frac{d\phi_{i,g}}{dx} \Bigg|_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} = (J_{i,g}^{x+} - J_{i,g}^{x-}) \end{aligned} \quad (2.3.1.5)$$

(2.3.1.5)式を(2.3.1.4)式に代入すると、次式を得ることができる。

$$(J_{i,g}^{x+} - J_{i,g}^{x-}) + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,g} \Delta x_i = Q_{i,g} \Delta x_i \quad (2.3.1.6)$$

最後に、メッシュ幅 Δx_i で両辺を除算すると次式になる。

$$\frac{(J_{i,g}^{x+} - J_{i,g}^{x-})}{\Delta x_i} + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,g} = Q_{i,g} \quad (2.3.1.7)$$

ここまで様々な式変形を行ってきたが、まだ空間に関する近似は用いておらず、(2.3.1.7)式は厳密な式である。今回は一次元体系であるが、上式の中性子流 J を多次元体系で解析的に計算することは困難である。そこで、中性子流 J を計算するために、次式の有限差分法を導入する。

$$J_{i,g}^{x+} \approx \frac{-2D_{i,g} D_{i+1,g}}{D_{i+1,g} \Delta x_i + D_i \Delta x_{i+1}} (\phi_{i+1,g} - \phi_{i,g}) \quad (2.3.1.8)$$

$$J_{i,g}^{x-} \approx \frac{-2D_{i,g} D_{i-1,g}}{D_{i-1,g} \Delta x_i + D_i \Delta x_{i-1}} (\phi_{i,g} - \phi_{i-1,g}) \quad (2.3.1.9)$$

(2.3.1.8)及び(2.3.1.9)式を(2.3.1.7)式に代入することで、拡散方程式(2.3.1.6)式をメッシュ平均の中性子束のみの式にすることが出来た。

$$A_{i,g}^{x-} \phi_{i-1,g} + A_{i,g}^0 \phi_{i,g} + A_{i,g}^{x+} \phi_{i,g} = Q_{i,g} \quad (2.3.1.10)$$

ここで、

$$A_{i,g}^{x-} = \frac{-2D_{i,g}D_{i-1,g}}{(D_{i-1,g}\Delta x_i + D_i\Delta x_{i-1})\Delta x_i} \quad (2.3.1.11)$$

$$A_{i,g}^{x+} = \frac{-2D_{i,g}D_{i+1,g}}{(D_{i+1,g}\Delta x_i + D_i\Delta x_{i+1})\Delta x_i} \quad (2.3.1.12)$$

$$A_{i,g}^0 = \Sigma_{t,i,g} - (A_{i,g}^{x-} + A_{i,g}^{x+}) \quad (2.3.1.13)$$

である。

上式は、本節の目的であるエネルギー E と位置 \mathbf{r} に関して差分化した最終形である。上式で注目することとして、見かけ上、領域平均の ϕ に関する連立一次元方程式になっていることである。そのため、定常状態の拡散方程式を計算するということは、連立一次方程式を計算することに帰着する。そこで次節では、(2.3.1.10)式の連立方程式を計算するための内部反復の数値計算方法について述べる。

2.3.2 内部反復

前節において、拡散方程式の定常状態の計算を行うことは、最終的に連立一次方程式の計算に帰着することを示した。そこで本節では、連立方程式の計算を行う内部反復について言及する。

連立方程式の計算方法としては、直接法、反復法、非定常反復法の3つに大きく分別することができる。各種類に対応する、数値計算方法を表 2.3.2.1 に示す。

表 2.3.2.1 連立方程式の数値解法の種類⁷⁾

直接法	反復法	非定常反復法
ガウスの消去法、 LU分解	ガウス・ザイデル法、 ADI法	GMRES法、 BiCGSTAB(l)法

ガウスの消去法やLU分解といった直接法は、数値計算誤差がなければ有限回で真の解が求まる数値計算方法である。これに対して、漸化式によって近似解の無限数列を計算していくのが反復法である⁷⁾。直接法は小規模かつ密行列であるならば、高速に精度よく計算することが可能である。しかし、炉心計算に用いるような大規模かつ疎行列の場合では、計算コスト及びメモリの観点から反復法に利がある。

また、反復法は係数行列が反復回数に依存しないために、誤差の減衰割合が一定であ

る。一方、非定常反復法は反復回数に依存した漸化式に基づいて計算される⁷⁾。つまり、反復回数に伴い、係数行列も変化する。そのため、非定常反復法の誤差の減衰割合が一定ではない。

非定常状態反復法の代表的な手法の多くは、Krylov 部分空間法と呼ばれている。なお、ここでの連立一次方程式を計算する Krylov 部分空間法と、本論文の 4 章で出てくる Krylov 部分空間法の計算方法とは異なることに注意すること。

現在の連立一次元方程式の数値解法の主流となりつつあるのは、非定常反復法である Krylov 部分空間法であり、PARCS など多数の炉心計算コードにも採用されている⁸⁾。しかし、非定常反復計算は前処理の計算理論が複雑なことや、計算問題に対して収束性が大きく異なる場合などの注意すべき点がある。そのため本研究においては、計算理論が容易で、どのような問題に対しても比較的よい収束で計算することができる、Alternating-direction implicit iterative method(ADI 法)を用いることにする。以下では、ADI 法について言及する。なお、本来、ADI 法は時間と空間に対する偏微分方程式に適用する方法であるが⁷⁾、本論文で扱う ADI 法は参考文献 3)に習って、空間メッシュに対する連立一次方程式の数値解法として取扱う。

ADI 法の計算方法を考える上で、以下の(2.3.1.10)式を行列形式で表した次式を考える。

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \vec{Q} \quad (2.3.2.1)$$

ここで、

\mathbf{A} : (2.3.1.10)式の左辺の係数を表す行列

\vec{Q} : (2.3.1.10)式の右辺を表すベクトル

である。

現在考えている計算体系が 2 次元とすると、(2.3.2.1)式の左辺は次式に変形することが出来る。

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \mathbf{A}_x\vec{\phi} + \mathbf{A}_y\vec{\phi} + \mathbf{A}_0\vec{\phi} \quad (2.3.2.2)$$

ここで、

\mathbf{A}_x : 行列 \mathbf{A} の x 成分を表す行列

\mathbf{A}_y : 行列 \mathbf{A} の y 成分を表す行列

\mathbf{A}_0 : 行列 \mathbf{A} の対角成分を表す行列

である。

(2.3.2.2)式を用いることで、(2.3.2.1)式を x のみに関する式及び y に関する式である、二つの一次元の式に変形することが出来る。

$$(\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_0)\vec{\phi} = \vec{Q}_x \quad (2.3.2.3)$$

$$(\mathbf{A}_y + \mathbf{A}_0)\vec{\phi} = \vec{Q}_y \quad (2.3.2.4)$$

ここで、

$$\vec{Q}_x = \vec{Q} - \mathbf{A}_y \vec{\phi} \quad (2.3.2.5)$$

$$\vec{Q}_y = \vec{Q} - \mathbf{A}_x \vec{\phi} \quad (2.3.2.6)$$

である。

上記の変形で二次元の拡散方程式を見かけ上、一次元の拡散方程式に変形することができた。つまり、二次元方程式の5点階差式を見かけ上、一次元の3点階差式に帰着させることができた。そのため、3点階差式を非常に効率よく計算することができる、LU分解法を用いることができる。

通常、連立一次方程式に直接法であるLU分解を用いると、真の解を得ることができる。しかし、(2.3.2.3)及び(2.3.2.4)式の右辺に注目すると、未知数の ϕ が含まれているため右辺は既知の値ではない。そのためADI法では、 ϕ に初期値を設定し、(2.3.2.3)及び(2.3.2.4)式の右辺の近似値を代入した式に対して、LU分解を用いて近似式に対する解 ϕ^n を得る。そして、得られた解を用いて再度(2.3.2.3)及び(2.3.2.4)式の右辺を計算することで、より真の解に近づいた ϕ^{n+1} を得ることが出来る。以上のADI法の計算方法についての概念図を以下に示す。

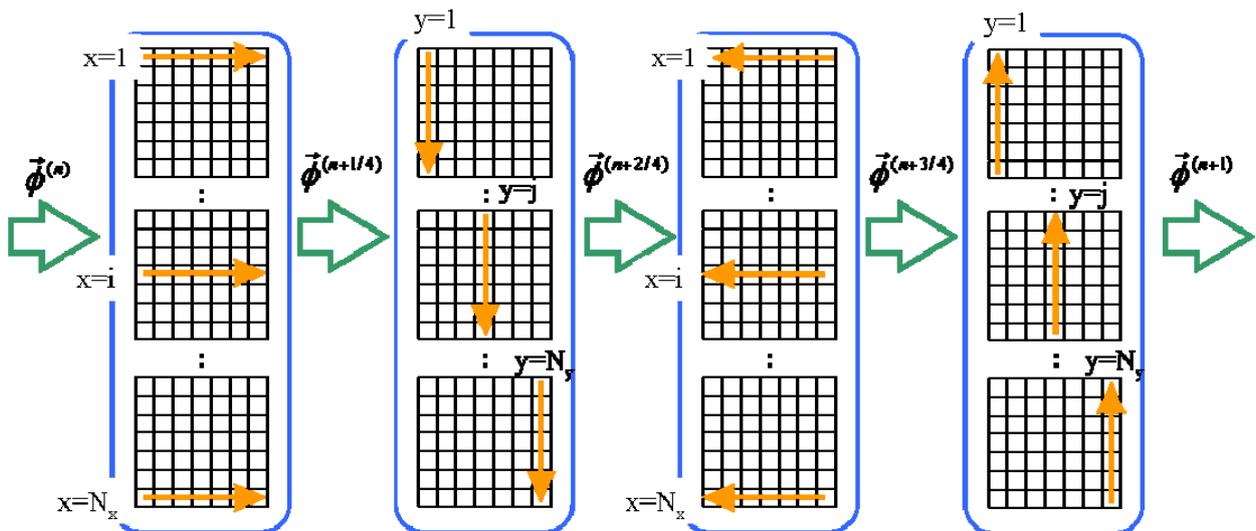


図 2.3.2.1 本研究で用いる ADI 法のフロー

通常の ADI 法では、x 及び y 方向の 1 回ずつのスweepで一回の反復としている。しかし、LU 分解法は直接法であるので、数値誤差が蓄積しやすいという性質がある。そこで本研究では、一度各方向でスweepした後に再度、逆の方向からスweepすることで、数値誤差が偏在化することを抑制している。

以上、本研究で連立方程式を計算する内部反復で用いる ADI 法について述べた。しかし、拡散方程式の右辺には核分裂や散乱の項があり、これらは中性子束 ϕ が真の値でなければ、正確に計算することができない。そこで次節では、右辺に対しても反復を行う外部反復について述べていく。

2.3.3 外部反復

前節までの拡散方程式は、右辺の項を既知の量であるとしていた。しかし、次式に示すように、定常状態の拡散方程式の右辺は既知の量ではなく、未知数である中性子束 ϕ を含んでいる。

$$A_{i,g}^{x-} \phi_{i-1,g} + A_{i,g}^0 \phi_{i,g} + A_{i,g}^{x+} \phi_{i,g} = \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g} \phi_{i,g} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,g} \quad (2.3.3.1)$$

ここで、実効増倍率 k_{eff} という物理量を導入することで、見かけ上、拡散方程式を定常状態として取扱っている。前節の ADI 法でも述べたように、(2.3.3.1)式を計算するためには、中性子束に対して初期値を設定することで、内部反復においては、非斉次の連立一次方程式に帰着させている。そして、内部反復で得られた中性子束を用いて(2.3.3.1)式の右辺を更新することで、より正確な右辺を計算する。この右辺を反復する作業を、一般的に、外部反復と呼ぶ⁵⁾。しかし、外部反復には固有値を計算するという重要な役割もある。

(2.3.3.1)式を行列形式で表記すると、次式に変形することが出来る。

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F} \vec{\phi} \quad (2.3.3.2)$$

ここで、

A : 正味の消滅・散乱を含む行列

F : 核分裂項のみを含む行列

である。

(2.3.3.2)式より、 k_{eff} がちょうど固有値に対応していることが分かる。(2.3.3.2)において

k_{eff} を固有値と見なすことで、(2.3.3.2)式は一般化固有値問題であると考えることができる。そのため、臨界体系の炉心計算は一般化固有値問題に帰着できることになる。

一般化固有値問題及び固有値問題の数値解法には表 2.3.3.1 に示すように多くの種類がある。

表 2.3.3.1 固有値問題の数値解法⁷⁾

一般化固有値問題	非線形固有値問題
べき乗法、QR法、 Jacobi-Davidson法	Newton-Krylov法

表 2.3.3.1 より、固有値問題には多くの数値計算方法があるが、一般に炉心解析に多く用いられるのは、べき乗法である。しかし、商業炉のような体系では、ドップラー効果や温度フィードバック等の効果により、(2.3.3.2)式の行列 \mathbf{A} 、 \mathbf{F} が反復に伴い変化する。そのため、一般化固有値問題が非線形固有値問題になる。このことから、Newton-Krylov法を用いて固有値計算する方法も研究されている⁹⁾。しかし、本研究の目的は過渡解析の開発であるので、本研究では多くの炉心計算コードで採用されており、アルゴリズムも簡易である、べき乗法を固有値計算方法として採用する。以下では、べき乗法の計算理論について記述する。

序論で述べたような炉心安定性解析を行う場合、高次モードの計算を行う場合もあるが、通常炉心解析においては実効増倍率(最大値固有値)の計算を行うために、最大固有値を計算する必要がある。最大固有値を計算する方法として、べき乗法という計算方法がある。なお、べき乗法を応用することで、全ての固有値を計算することも可能であるが、本研究では最大固有値しか求めていないので、以下では最大固有値を計算する目的でべき乗法を述べる。

中性子束分布の初期値は、固有ベクトル \mathbf{u}_i と各固有ベクトルの展開係数 a_i を用いて以下のような線形結合で表記することができる。

$$\begin{aligned} \vec{\phi}^{(0)} &= a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_n \mathbf{u}_n \\ &= \sum_{i=1} a_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \tag{2.3.3.3}$$

(2.3.3.3)式を(2.3.3.2)式に代入すると次式を得ることが出来る。

$$\vec{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(0)} = \frac{1}{k_{eff}} \sum_{i=1} a_i \lambda_i \vec{u}_i \quad (2.3.3.4)$$

ここで、

$$\lambda_i : \text{次数 } i \text{ の固有値 } |\lambda_0| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (2.3.3.5)$$

である。

(2.3.3.4)式の関係を利用することにより、 n 回目の反復では次式になる。

$$\begin{aligned} \vec{\phi}^{(n)} &= \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(n-1)} = \left(\frac{1}{k_{eff}} \right)^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(n-2)} = \dots \\ &= \left(\frac{1}{k_{eff}} \right)^n (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F})^n \vec{\phi}^{(0)} = \left(\frac{1}{k_{eff}} \right)^n \sum_i \lambda_i^n a_i \vec{u}_i \\ &= \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{k_{eff}} \right)^n a_i \vec{u}_i \end{aligned} \quad (2.3.3.6)$$

上記でも述べたように、実効増倍率は最大固有値に対応するために(2.3.3.6)式は次式に表記し直すことができる。

$$\vec{\phi}^{(n)} = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right)^n a_i \vec{u}_i \quad (2.3.3.7)$$

反復回数を無限大まで行い、(2.3.3.5)式の利用すると、(2.3.3.7)式は次式になる。

$$\vec{\phi}^{(\infty)} = a_0 \vec{u}_0 \quad (2.3.3.8)$$

\vec{u}_0 は絶対値最大固有値に対応する固有ベクトルであり、この場合は、基本モードの中性子束分布となる。そのため、このような反復計算を繰り返すことにより、絶対値最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを計算することが可能となる。ただし実際に計算する際には、 $\lambda_0 > 1$ の時は計算中に固有ベクトルの成分が大きくなりすぎ、 $\lambda_0 < 1$ の時は小さくなりすぎるために、数値計算の計算精度が低下するので、固有ベクトルのノルムが 1 になるように規格化の必要がある¹⁰⁾。実際の炉心計算の場合は、次式で規格化を行っている。

$$\frac{1}{k_{eff}} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \sum_{g=1}^G v \Sigma_{f,i,j,k,g} \phi_{i,j,k,g}^{(n)} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = 1 \quad (2.3.3.9)$$

内部反復、外部反復をまとめた定常状態の計算フローを下図に示す。

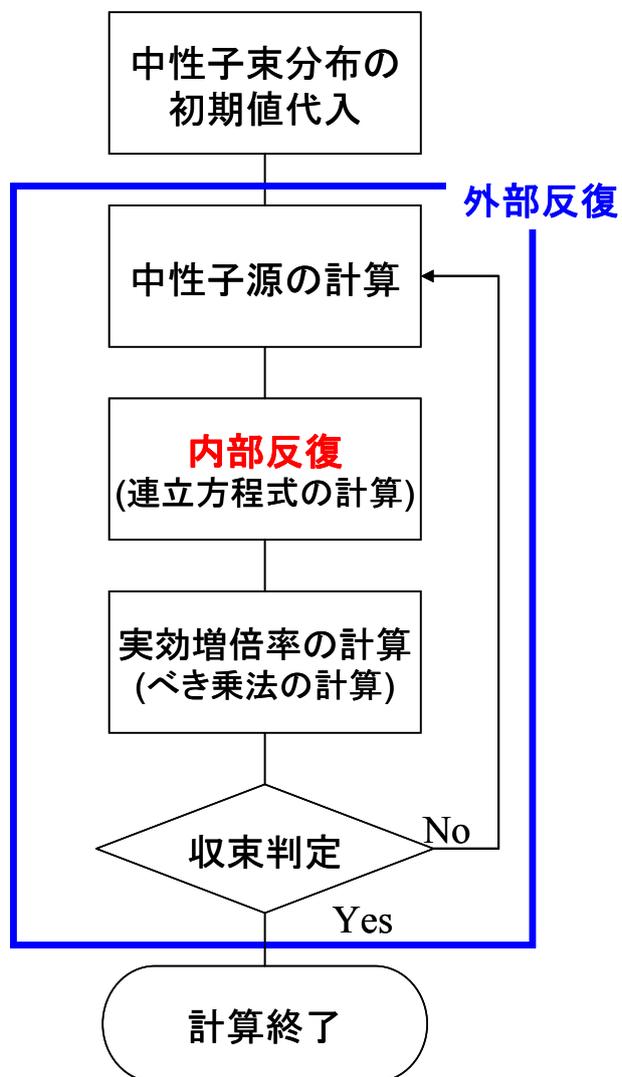


図 2.3.3.1 定常状態の計算フロー

2.4 多項式解析的ノード法

2.4.1 近代ノード法の概要

前節では空間離散化方法として、有限差分法を導入した拡散方程式の数値解法について述べた。しかし有限差分法は、メッシュ幅を増加させた時のメッシュ誤差が大きいという問題がある。しかし、軽水炉のような計算体系では、中性子の平均自由行程が短いので、中性子束分布を精度良く計算するためには 1cm~2cm 程度の詳細メッシュ分割を必要とする¹¹⁾。このようなメッシュ分割を行った際には、炉心体積が3万リットル以上ある PWR 体系では反射体領域を除いても数千万メッシュが必要となり、炉心解析をくり返し行う必要がある炉心設計に用いることが困難な場合がある。そこで、燃料集合体の水平面サイズ程度(20cm)の粗メッシュでも高精度に計算することが可能な近代ノード法が、現在の炉心計算コードでは採用されている。そこで、本研究でも近代ノード法を採用することで、より実際の商用炉心計算に近い条件で、動特性計算法の検討を行う。以下では、近代ノード法の概要について説明する。

近代ノード法のアイデアは図 2.4.1.1 に示すように、メッシュ内の中性子束分布を何らかの関数形で近似することで、有限差分法よりも高精度に計算するものである。

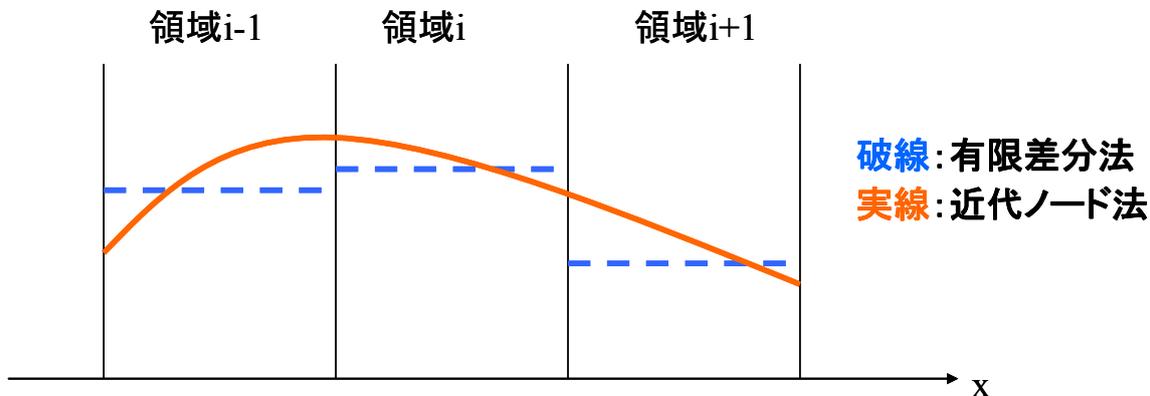


図 2.4.1.1 近代ノード法の概念図

図 2.4.1.1 で示したように、近代ノード法ではメッシュ内の中性子束分布を注目する一次元方向に対して関数近似することで、粗メッシュにしても高精度に計算することが可能となる。なお、注目方向以外は、後述するが二次関数で近似するのが一般的である (Quadratic Transverse Leakage approximation, QTL 近似)。

中性子束分布をどのような関数で近似するかによって、近代ノード法を表 2.4.1.1 のようにいくつかの種類に分別することが出来る。また、表 2.4.1.1 のように一次元方向に対して関数近似するのではなく、多次元を直接扱う Analytical Function Expansion 法も

ある¹²⁾。以下では、表 2.4.1.1 の各手法について言及する。

表 2.4.1.1 近代ノード法の種類

近代ノード法の手法名	使用関数
解析的ノード法(Alytica Nodal Method)	解析解
多項式解析的ノード法(Alytical Polynomial Nodal Method or Semi-Alytic Nodal Method)	解析解+多項式
多項式ノード法(Nodal Expansion Method)	多項式

解析的ノード法は拡散方程式の解析的を用い、横方向漏れに関しては QTL 近似を行う手法である。そのため、近似をは横方向漏れの QTL 近似のみであり、計算精度は非常によい。しかし、解析的ノード法に用いる関数形は、集合体毎の無限増倍率と体系の実効増倍率の大小関係により変更する必要があり、数値的に不安定になる場合がある¹³⁾。また、エネルギー群を多群にした場合の計算コストが高くなるデメリットがある。解析的ノード法を用いている炉心計算コードとしては、SIMULATE-5¹⁴⁾や PARCS⁸⁾などがある。

次に多項式ノード法について述べる。多項式ノード法は、メッシュ内の中性子束分布及び中性子源に多項式を用いて計算する方法であり、一般的に、4 次の多項式を用いることが多い¹⁵⁾。中性子束分布の解が多項式であるため、計算時間が早く多群への拡張も簡単であるために、近代ノード法が開発された初期に用いられた手法である。しかし、メッシュ内の中性子束分布の変化が大きくなると、多項式では精度よく表せない場合がある。また、中性子束分布を多項式で近似するために、部分的に負の中性子束が生じる場合もあるデメリットが存在する。多項式ノード法を用いている炉心計算コードとしては、SKETCH-N¹⁶⁾や ANCK¹⁷⁾などがある。なお、PARCS コードは基本的には解析的ノード法を用いているが、収束過程で不安定なるのを防ぐために、多項式ノード法とのハイブリッドで炉心計算を行う⁸⁾。

最後に、多項式解析的ノード法について述べる。多項式解析的ノード法は、近年の炉心計算コードに多く採用されている。多項式解析的ノード法は、解析的ノード法と多項式ノード法を併せたような手法であり、中性子束分布を解析的に取扱い、中性子源分布については多項式で近似する手法である。多項式解析的ノード法は中性子源分布を多項式で取扱うことで、解析形が常に指数関数になるため、収束は比較的安定であり、また、中性子束分布は解析的に扱うので計算精度がよいという特徴がある。そのため、本研究においても、多項式解析的ノード法を採用することにする。なお、多項式解析的ノード法を採用している炉心計算コードとしては、SCOPE2¹⁸⁾、AETNA¹⁹⁾、NEREUS²⁰⁾がある。但し SCOPE2 は、径方向は中性子源展開を 0 次で展開して、軸方向は多項式ノード法で

計算を行っている¹⁸⁾。次節では、本研究で採用する多項式解析的ノード法について述べていく。

2.4.2 多項式解析的ノード法の基礎式の導出

多群化した3次元拡散方程式は次式である。

$$\begin{aligned} -D_g(\mathbf{r})\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\phi_g(x, y, z) + \Sigma_{r,g}\phi_g(x, y, z) \\ = Q_g(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

近代ノード法に用いる基礎式は、上式を注目方向以外に積分することで導出することができる。以下では、注目方向を x として議論を進める。(2.4.2.1)式を y, z 方向に積分し、メッシュの y, z 平面で平均化すると次式を得ることができる。

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{a,g} \Phi_{x,g}(x) = Q_{x,g}(x) - L_{x,g}(x) \quad (2.4.2.2)$$

ここで、

$$\Phi_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi_g(x, y, z) dy dz \quad (2.4.2.3)$$

$$L_{x,g}(x) = \frac{J_{y+,g}(x) - J_{y-,g}(x)}{\Delta y} + \frac{J_{z+,g}(x) - J_{z-,g}(x)}{\Delta z} \quad (2.4.2.4)$$

$$Q_{x,g}(x) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{g'}(x) + \sum_{g'=g} \Sigma_{s,g \rightarrow g'} \Phi_{g'}(x) \quad (2.4.2.5)$$

$$J_{y,g}(x) = \frac{1}{\Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \left(-D_g \frac{d}{dy} \phi_g(x, y, z) \right) dz \quad (2.4.2.6)$$

$$J_{z,g}(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \left(-D_g \frac{d}{dz} \phi_g(x, y, z) \right) dy \quad (2.4.2.7)$$

である。

多項式解析的ノード法では、(2.4.2.2)式を次式に示すように、右辺の中性子源及び漏れ項を二次多項式で近似することで、中性子束の空間分布を解析的に計算する方法である。

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{r,g} \Phi_{x,g}(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0 \quad (2.4.2.8)$$

(2.5.2.8)式の2階常微分方程式の解析解を計算すると、最終的に次式を得る。

$$\Phi_x(x) = A \sinh(\kappa x) + C \cosh(\kappa x) + \frac{q_2}{\Sigma_r} x^2 + \frac{q_1}{\Sigma_r} x + \left(\frac{q_0}{\Sigma_r} + 2D \frac{q_2}{\Sigma_r^2} \right) \quad (2.4.2.9)$$

ここで、

A, C : (2.5.2.8)式の一般解の未定定数

q_i : i 次の中性子源の展開係数

$$\kappa : \text{拡散距離} (\kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_r}{D}})$$

である。

以上のように多項式解析的ノード法では、右辺を多項式展開することで解析解を計算し、上式を用いて近代ノード法の計算を行う。なお、多項式解析的ノード法の中性子源の展開次数は二次多項式の場合が多いが、四次多項式で近似する場合もある。ただし、中性子源を四次多項式で近似したからといって、特別な場合を除き、計算精度が向上するわけではない²²⁾。

2.4.3 非線形反復による有限差分式の補正

前節では、近代ノード法の基礎式から始まり、最終的に多項式解析的ノード法に用いる解析解を導出した。そこで本節以降では、実際に計算コードに多項式解析的ノード法を実装する方法について述べる。

近代ノード法の実装方法として、まず初めに大別すると、有限差分タイプと応答行列タイプに分別される。さらにこの各手法に対して、二つの実装方法がある。図 2.4.3.1 に近代ノード法の各実装方法及び、その手法を採用した炉心計算コードを示す。

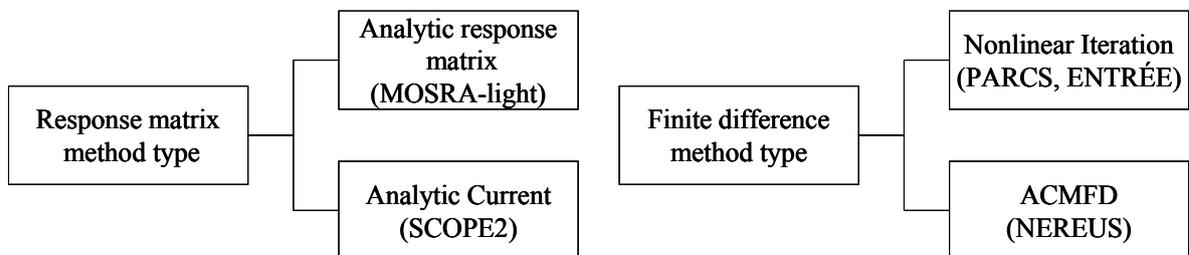


図 2.4.3.1 近代ノード法の実装方法及び採用炉心計算コード^{8, 15, 20, 18, 23)}

図 2.4.3.1 より、本研究では有限差分タイプで計算を行っているので、非線形反復法 (Nonlinear Iteration method) または、解析的粗メッシュ法 (Analytical Coarse Mesh Finite Difference method) のどちらかの実装方法を選択する必要がある。しかし本研究では、より多くの炉心計算コードに採用されているために実績があり、また、収束性が優れている非線形反復法を採用することとする。以下では、非線形反復法を用いた近代ノード法の実装方法について述べる。

有限差分式では、中性子流を次式で近似的に計算を行っていた。

$$J_{i,g}^{x+} = -D^{FD} (\Phi_{x,i+1,g} - \Phi_{x,i,g}) \quad (2.4.3.1)$$

ここで、

$$D^{FD} = \frac{-2D_{i,g}D_{i+1,g}}{D_{i+1,g}\Delta x_i + D_{i,g}\Delta x_{i+1}} \quad (2.4.3.2)$$

である。

しかし、(2.4.3.1)式はメッシュ内の中性子束を一定とした有限差分の式から導出したものであり、精度はよくない。そこで、中性子流をより精度よく計算するために、次式のように、(2.4.3.1)式の右辺に補正項を加えることを非線形反復で行う。

$$J_{i,g}^{x+} = D^{FD} (\Phi_{x,i+1,g} - \Phi_{x,i,g}) + D^{cor} (\Phi_{x,i+1,g} + \Phi_{x,i,g}) \quad (2.4.3.3)$$

ここで、

$$D^{cor} = \left\{ J_{i,x+}^{NODAL} - \frac{-2D_iD_{i+1}}{D_i\Delta x_{i+1} + D_i\Delta x_{i+1}} (\Phi_{x,i+1} - \Phi_{x,i}) \right\} / (\Phi_{x,i+1} + \Phi_{x,i}) \quad (2.4.3.4)$$

$J_{i,x+}^{NODAL}$: ノード法で求めた中性子流

である。

(2.4.3.4)式に注目すると、補正係数 D^{cor} の中に未知数 Φ が含まれていることが分かる。そのため、(2.4.3.3)式の D^{cor} が反復毎に変化するために、反復毎に係数行列が変化することになる。このことから、本手法は非線形反復と呼称されている。なお、(2.4.3.4)式の分母を隣接メッシュの中性子束との差ではなく和としているのは、数値不安定性を回避するためである。

(2.4.3.3)式が最終的に収束すると(2.4.3.3)式は次式になり、有限差分式から求められる中性子流ではなく、近代ノード法で計算した中性子流と等しくなることが分かる。

$$J_{i,g}^{x+} = J_{i,g,x+}^{NODAL} \quad (2.4.3.5)$$

なお、本研究では近代ノード法として多項式解析的ノード法を用いているので、ノード法で求めた中性子流は次式になる。

$$\begin{aligned} J_{i,g,x+}^{NODAL} &= -D_{i,g} \frac{d}{dx} \Phi_{x,i,g} \\ &= -D_{i,g} \left(A_i \kappa_i \cosh(\kappa_i x) + C_i \kappa_i \sinh(\kappa_i x) + \frac{2q_{2,i}}{\Sigma_{r,i}} + \frac{q_{1,i}}{\Sigma_{r,i}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.3.6)$$

本節では近代ノード法の実装方法として、非線形反復法を採用することにした。また非線形反復法は、有限差分の中性子流の式に補正項を加えることで、精度よく中性子流を計算しようと試みていることに言及した。そして、具体的な補正項の式や補正項を算出するための中性子流の計算方法について述べた。しかし、近代ノード法での中性子流を計算するためには、(2.4.3.6)式の各係数が分からなければ計算することができない。そこで次節以降では、多項式解析的ノード法の各係数を計算するための計算方法について言及する。

2.4.4.2 ノード問題

まず初めに、多項式解析的ノード法の未定定数 A 及び C を決定するための方法について述べる。 A 及び C を決定するための方法として、1ノード問題及び2ノード問題による取扱いがある。計算コードへの実装方法としては1ノード問題の方が容易であるが、収束性の観点からいえば、2ノード問題の方が優れていることがフーリエ解析から証明されている²²⁾。そのため本研究では、2ノード問題を基本とし、境界面のみ1ノード問題で計算する方法を実装することにする。まず初めに、境界面以外の下図のような2ノード問題について言及する。また、以下では計算を簡略化するために、座標系の原点が通常のマッシュのような中点ではないことに注意すること。

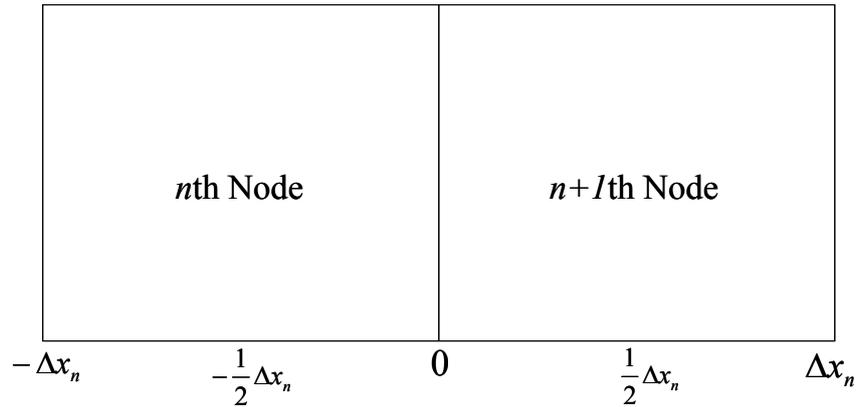


図 2.4.4.1 2 ノード問題の概念図

2 ノード問題では、係数 A_n , C_n を決定するために、隣接する中性子束について計算を行う。そのため、変数としては A_n , C_n , A_{n+1} , C_{n+1} の 4 つの変数がある。4 つの変数を計算するためには、4 つの方程式が必要であるが、2 ノード問題では以下の 4 つの境界条件を利用することで変数を計算する。

$$DF_{n,x+} \Phi_{n,x}(0) = DF_{n+1,x-} \Phi_{n+1,x}(0) \quad (2.4.4.1)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{n+1} \left. \frac{d\Phi_{n+1,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (2.4.4.2)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=-\Delta x} = J_{n,x-} \quad (2.4.4.3)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=\Delta x} = J_{n,x+} \quad (2.4.4.4)$$

ここで、 DF は不連続因子である。

以下では、各境界条件の具体的な計算結果を述べ、最終的に A_n , C_n , A_{n+1} , C_{n+1} の解を示す。

(2.4.4.1)式は 2 ノード問題の中心で中性子束が連続である条件を表している。(2.4.4.1)式を具体的に展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& DF_{n,x+} \left(\begin{array}{l} A_n \sinh(\kappa_n x) + C_n \cosh(\kappa_n x) \\ + \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x^2 + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) \end{array} \right) \\
& = DF_{n+1,x-} \left(\begin{array}{l} A_{n+1} \sinh(\kappa_{n+1} x) + C_{n+1} \cosh(\kappa_{n+1} x) \\ + \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} x^2 + \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} x + \left(\frac{q_{0,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} + 2D_{n+1} \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}^2} \right) \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.4.5}$$

(2.4.4.5)式に2ノード問題の中心座標である $x = 0$ を代入し、 C_n 、 C_{n+1} について整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
DF_{n,x+} C_n - DF_{n+1,x-} C_{n+1} &= DF_{n+1,x-} \left(\frac{q_{0,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} + 2D_{n+1} \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}^2} \right) \\
&\quad - DF_{n,x+} \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.4.6}$$

次に(2.4.4.2)式について考える。(2.4.4.2)式は中性子流が2ノード問題の中心で連続である条件を示している。(2.4.4.2)式を具体的に展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -D_n \left(\begin{array}{l} A_n \kappa_n \cosh(\kappa_n x) + C_n \kappa_n \sinh(\kappa_n x) \\ + 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \end{array} \right) \\
& = -D_{n+1} \left(\begin{array}{l} A_{n+1} \kappa_{n+1} \cosh(\kappa_{n+1} x) + C_{n+1} \kappa_{n+1} \sinh(\kappa_{n+1} x) \\ + 2 \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} x + \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.4.7}$$

(2.4.4.7)式に2ノード問題の中心座標である $x = 0$ を代入し、 A_n 、 A_{n+1} について整理すると次式を得る。

$$-D_n A_n \kappa_n + D_{n+1} A_{n+1} \kappa_{n+1} = D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} - D_{n+1} \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \tag{2.4.4.8}$$

以上が、2ノード問題の中心での境界条件である。一方、(2.4.4.3)、(2.4.4.4)式は2ノード問題の両端での境界条件である。まず初めに、2ノード問題の左端の境界条件である(2.4.4.3)式について考える。(2.4.4.3)式を具体的に展開すると、次式を得る。

$$-D_n \left(\begin{array}{l} A_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) + C_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \\ - 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \end{array} \right) = J_{n,x-} \tag{2.4.4.9}$$

(2.4.4.9)式を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -D_n A_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) - D_n C_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \\
& = J_{n,x^-} - D_n 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}}
\end{aligned} \tag{2.4.4.10}$$

最後に(2.4.4.4)式の右端境界条件を展開すると次式を得る。

$$-D_{n+1} \left(\begin{aligned} & A_{n+1} \kappa_{n+1} \cosh(\kappa_{n+1} \Delta x) + C_{n+1} \kappa_{n+1} \sinh(\kappa_{n+1} \Delta x) \\ & + 2 \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \Delta x + \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \end{aligned} \right) = J_{n+1,x^+} \tag{2.4.4.11}$$

(2.4.4.11)式を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -D_{n+1} A_{n+1} \kappa_{n+1} \cosh(\kappa_{n+1} \Delta x) - D_{n+1} C_{n+1} \kappa_{n+1} \sinh(\kappa_{n+1} \Delta x) \\
& = J_{n+1,x^+} + D_{n+1} 2 \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \Delta x + D_{n+1} \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}}
\end{aligned} \tag{2.4.4.12}$$

以上の議論で、2 ノード問題を用いた時の係数 A_n , C_n , A_{n+1} , C_{n+1} を決定することができる。しかし、このままでは煩雑なので式を整理すると、最終的のような連立一次方程式に帰着させることができる。

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ C_n \\ A_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \tag{2.4.4.13}$$

ここで、

$$\alpha_{12} = DF_{n,x^+} \tag{2.4.4.14}$$

$$\alpha_{14} = -DF_{n+1,x^-} \tag{2.4.4.15}$$

$$\alpha_{21} = -D_n \kappa_n \tag{2.4.4.16}$$

$$\alpha_{23} = D_{n+1} \kappa_{n+1} \tag{2.4.4.17}$$

$$\alpha_{31} = -D_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.18}$$

$$\alpha_{32} = -D_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.19}$$

$$\alpha_{43} = -D_{n+1} \kappa_{n+1} \cosh(\kappa_{n+1} x) \tag{2.4.4.20}$$

$$\alpha_{44} = -D_{n+1} \kappa_{n+1} \sinh(\kappa_{n+1} x) \tag{2.4.4.21}$$

$$\beta_1 = DF_{n+1,x^-} \left(\frac{q_{0,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} + 2D_{n+1} \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}^2} \right) - DF_{n,x^+} \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) \tag{2.4.4.22}$$

$$\beta_2 = D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} - D_{n+1} \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \quad (2.4.4.23)$$

$$\beta_3 = J_{n,x^-} - D_n 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x_n + D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \quad (2.4.4.24)$$

$$\beta_4 = J_{n+1,x^+} + D_{n+1} 2 \frac{q_{2,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \Delta x_{n+1} + D_{n+1} \frac{q_{1,n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} \quad (2.4.4.25)$$

である。

本研究において、上記の四元連立方程式の計算は解析解を用いて計算を行なっている。

以上では、2 ノード問題による係数の計算方法について議論した。以降では、1 ノード問題による境界面での係数の決定方法について言及する。

まず初めに、左端が境界条件である下図の場合について考える。

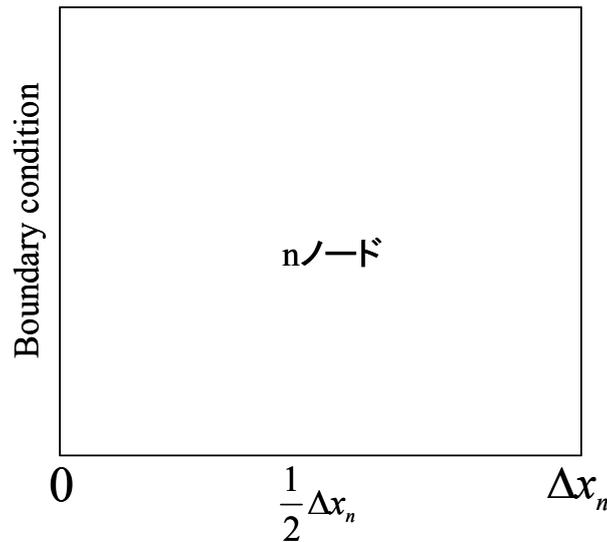


図 2.4.4.2 1 ノード問題の概念図(左端が境界条件)

このときの境界条件はアルベルト値 α を用いることで、以下の2つが与えられている。

$$2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \Phi_{n,x}(0) \quad (2.4.4.26)$$

$$-D_n \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x=\Delta x} = J_{n,\Delta x} \quad (2.4.4.27)$$

まず初めに、(2.4.4.26)式について考える。

(2.4.4.26)式の左辺は以下の手順で導出することができる。炉心表面でのアルベド値を α とすると、入射部分中性子流 J^- と流出中性子流 J^+ には次式が成り立つ。

$$J^- = \alpha J^+ \quad (2.4.4.28)$$

拡散理論に基づくと、境界面における部分中性子流と中性子束は次式の関係がある。

$$J^+ = \frac{1}{4} \Phi - \frac{1}{2} J \quad (2.4.4.29)$$

$$J^- = \frac{1}{4} \Phi + \frac{1}{2} J \quad (2.4.4.30)$$

(2.4.4.29)及び(2.4.4.30)式を(2.4.4.28)式に代入すると、(2.4.4.26)式を得ることが出来る。(2.4.4.26)式を展開すると、次式を得ることができる。

$$2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \left(A_n \kappa_n \cosh(\kappa_n x) + C_n \kappa_n \sinh(\kappa_n x) + 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right) = \left(A_n \sinh(\kappa_n x) + C_n \cosh(\kappa_n x) + \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x^2 + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) \right) \quad (2.4.4.31)$$

(2.4.4.31)式に境界面の $x = 0$ を代入して整理すると、次式になる。

$$2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n A_n \kappa_n - C_n = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) - 2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \quad (2.4.4.32)$$

しかし、(2.4.4.32)式は反射条件の時のアルベド値 $\alpha = 1$ を代入した時に、数値不安定性が起きてしまうので、(2.4.4.32)式の両辺に $(1 - \alpha)$ を乗算する。

$$2(1+\alpha)D_n A_n \kappa_n - (1-\alpha)C_n = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) (1-\alpha) - 2(1+\alpha)D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \quad (2.4.4.33)$$

次に図 2.4.4.2 の右端の条件である、(2.4.4.27)式について考える。(2.4.4.27)式を展開すると次式を得ることが出来る。

$$-D_n \left(A_n \kappa_n \cosh(\kappa_n x) + C_n \kappa_n \sinh(\kappa_n x) + 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right) = J_{n,x+} \quad (2.4.4.34)$$

(2.4.4.34)式に図 2.4.4.2 の右端の座標である $x = \Delta x_n$ を代入し整理する。

$$\begin{aligned}
& -D_n A_n \kappa_n \cosh(\kappa_n \Delta x) - D_n C_n \kappa_n \sinh(\kappa_n \Delta x) \\
& = J_{n,x^+} + D_n \left(2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.4.35}$$

上述した 2 ノード問題と同様に、今回の 1 ノード問題も上記の議論を整理すると、最終的に以下の連立二元方程式の問題に帰着させることが出来る。

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.4.4.36}$$

ここで、

$$\gamma_{11} = 2(1 + \alpha) D_n \kappa_n \tag{2.4.4.37}$$

$$\gamma_{12} = -(1 - \alpha) \tag{2.4.4.38}$$

$$\gamma_{21} = -D_n \kappa_n \cosh(\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.39}$$

$$\gamma_{22} = -D_n \kappa_n \sinh(\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.40}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) (1 - \alpha) - 2D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} (1 + \alpha) \tag{2.4.4.41}$$

$$\eta_2 = J_{n,x^+} + D_n \left(2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right) \tag{2.4.4.42}$$

である。

次に右端が境界条件である、図 2.4.4.3 の場合の 1 ノード問題について考える。

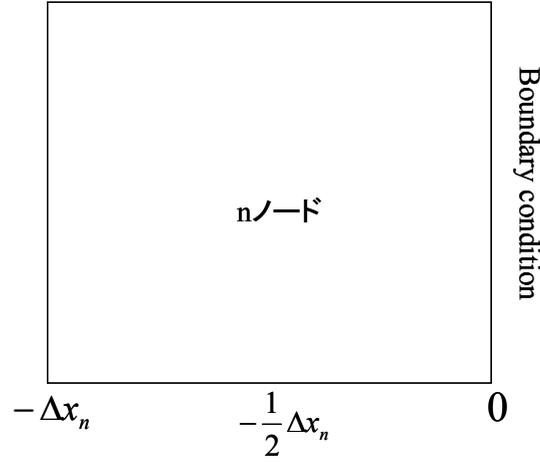


図 2.4.4.3 1 ノード問題の概念図(右端が境界条件)

図 2.4.4.3 の時の境界条件も図 4 と同様に以下の 2 つの式である。

$$-2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \Phi_{n,x}(0) \quad (2.4.4.43)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(-\Delta x_n)}{dx} \right|_{x=-\Delta x_n} = J_{n,-\Delta x_n} \quad (2.4.4.44)$$

まず初めに(2.4.4.43)式について考える。(2.4.4.43)式を展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & -2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \left(A_n \kappa_n \cosh(\kappa_n x) + C_n \kappa_n \sinh(\kappa_n x) + 2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right) \\ & = \left(A_n \sinh(\kappa_n x) + C_n \cosh(\kappa_n x) + \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} x^2 + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} x + \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4.4.45)$$

(2.4.4.45)式に外部境界と隣接している座標の $x = 0$ を代入し、 C_n について整理すると次式を得ることが出来る。

$$-2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n A_n \kappa_n - C_n = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) + 2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \quad (2.4.4.46)$$

ここで、他方の 1 ノード問題と同様に上記の式では数値不安定性が起きてしまうので、上式の両辺に $(1-\alpha)$ を乗算する。

$$\begin{aligned}
& -2(1+\alpha)D_n A_n \kappa_n - (1-\alpha)C_n \\
& = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) (1-\alpha) + 2(1+\alpha)D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}}
\end{aligned} \tag{2.4.4.47}$$

次に図 2.4.4.3 の左端の条件である(2.4.4.44)式について考える。(2.4.4.44)式を展開すると次式を得る。

$$-D_n \left(\begin{array}{l} A_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) + C_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \\ -2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \end{array} \right) = J_{n,x^-} \tag{2.4.4.48}$$

(2.4.4.48)式を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -D_n A_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) - D_n C_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \\
& = J_{n,x^-} + D_n \left(-2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.4.49}$$

(2.4.4.47)及び(2.4.4.49)式より、以下の2元連立方程式を計算すれば係数 A 、 C を得ることが出来る。

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.4.4.50}$$

ここで、

$$\gamma_{11} = -2(1+\alpha)D_n \kappa_n \tag{2.4.4.51}$$

$$\gamma_{12} = -(1-\alpha) \tag{2.4.4.52}$$

$$\gamma_{21} = -D_n \kappa_n \cosh(-\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.53}$$

$$\gamma_{22} = -D_n \kappa_n \sinh(-\kappa_n \Delta x) \tag{2.4.4.54}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{q_{0,n}}{\Sigma_{r,n}} + 2D_n \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}^2} \right) (1-\alpha) + 2(1+\alpha)D_n \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \tag{2.4.4.55}$$

$$\eta_2 = J_{n,x^-} + D_n \left(-2 \frac{q_{2,n}}{\Sigma_{r,n}} \Delta x + \frac{q_{1,n}}{\Sigma_{r,n}} \right) \tag{2.4.4.56}$$

である。

以上より、2ノード問題及び1ノード問題を用いて係数 A_n 、 C_n 、 A_{n+1} 、 C_{n+1} を決定する方法を議論した。上記の議論より、2ノード問題の計算を行うことは、最終的に4元または2元連立方程式を計算すればよいことを確認できた。

上述した2ノード問題や1ノード問題においては、 $q_2 \sim q_0$ は既知の値であるとした。しかし、実際には $q_2 \sim q_0$ は未知の値であり、 $q_2 \sim q_0$ も計算する必要がある。 $q_2 \sim q_0$ は、(2.4.2.2)式の核分裂項と散乱項が含まれた $Q(x)$ と、横漏れの項の $L(x)$ が含まれている。そこで次節では、 $L(x)$ の横漏れ項の計算について述べ、次々節で中性子源の展開について述べる。

2.4.5 横方向漏れ項の計算方法

近代ノード法では、3次元拡散方程式を注目方向以外に積分しているので、横方向漏れ項をなんらかの形で表現する必要がある。横方向漏れ項の計算方法としては、以下の3つの種類がある¹⁾。

1. 平坦近似：横方向漏洩の分布を無視して、ノード内で一定とする
2. バックリング近似：漏洩分布は注目方向の中性子束分布 $\Phi_{x,g}(\mathbf{x})$ に比例すると仮定する
3. QTL 近似：当該領域及び隣接2ノードの漏洩分布を利用して二次式でフィッティングする

上記のうち本研究では、計算精度が最もよいとされ、多くの炉心計算コードでも採用しているQTL 近似(Quadratic Transverse Leakage approximation)を採用する。以下では、横漏れ方向のQTL 近似について言及する。

QTL 近似では、 $L(x)$ を以下のような二次式で表現する。

$$L(x) = l_2 x^2 + l_1 x + l_0 \quad (2.4.5.1)$$

(2.4.5.1)式には3つの係数があるために、これらの係数を求めるためには、3つの束縛条件が必要になる。しかし、当該ノードにおける横方向漏れの情報は、当該ノードの平均横漏れ量のみしか分からないために、(2.4.5.1)式の係数を決定することができない。そこでQTL 近似では当該ノードのみならず、隣接ノードの平均横漏れ量を用いることにより、(2.4.5.1)式の係数を決定する。QTL 近似の概念図 2.4.5.1 に示す。

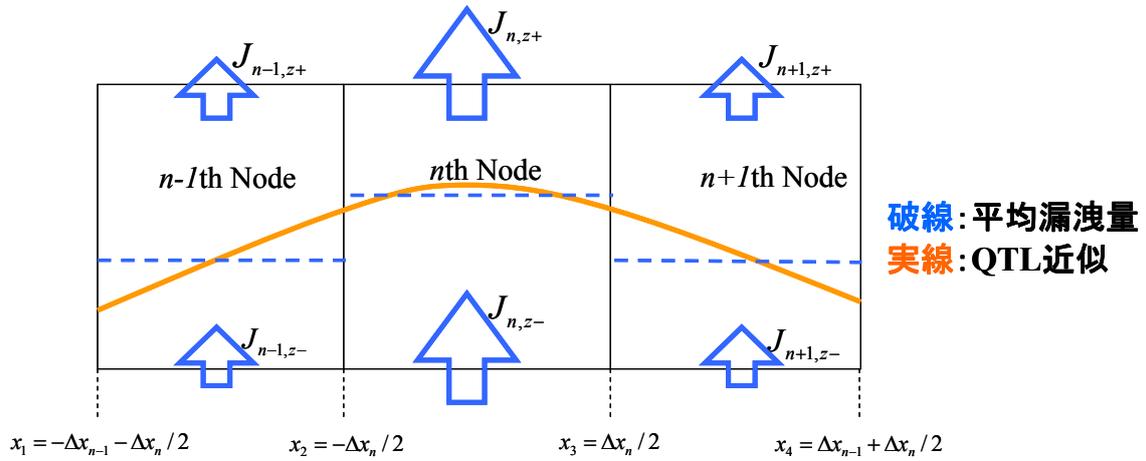


図 2.4.5.1 QTL 近似の概念図

上記より、各ノードの平均漏洩量しか分かっていないため、QTL 近似ではする場合は、以下の 3 つの式のように、各ノードにおける平均漏洩量と QTL 近似した時の各ノードの平均漏洩量が保存するようにする。

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \left(\frac{J_{n-1,y+} - J_{n-1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n-1,z+} - J_{n-1,z-}}{\Delta z} \right) \quad (2.4.5.2)$$

$$\frac{1}{x_3 - x_2} \int_{x_2}^{x_3} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \left(\frac{J_{n,y+} - J_{n,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n,z+} - J_{n,z-}}{\Delta z} \right) \quad (2.4.5.3)$$

$$\frac{1}{x_4 - x_3} \int_{x_3}^{x_4} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \left(\frac{J_{n+1,y+} - J_{n+1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n+1,z+} - J_{n+1,z-}}{\Delta z} \right) \quad (2.4.5.4)$$

上の 3 つの式の左辺を実際に積分し整理すると、最終的に以下の 3 元連立方程式を得ることができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) & \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) & (x_2 - x_1) \\ \frac{1}{3}(x_3^3 - x_2^3) & \frac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2) & (x_3 - x_2) \\ \frac{1}{3}(x_4^3 - x_3^3) & \frac{1}{2}(x_4^2 - x_3^2) & (x_4 - x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ l_1 \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{J_{n-1,y+} - J_{n-1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n-1,z+} - J_{n-1,z-}}{\Delta z} \right) \\ -\left(\frac{J_{n,y+} - J_{n,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n,z+} - J_{n,z-}}{\Delta z} \right) \\ -\left(\frac{J_{n+1,y+} - J_{n+1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n+1,z+} - J_{n+1,z-}}{\Delta z} \right) \end{pmatrix} \quad (2.4.5.5)$$

以上では、横漏れを QTL 近似する方法について述べた。次節では、中性子源 $Q(x)$ の展開方法について述べる。

2.4.6 中性子源の多項式近似

$Q(x)$ を多項式近似する方法として、まず初めに、ノード内の中性子束を多項式で近似する。ノード内の中性子束を多項式で近似するための、拘束条件としては以下のものがある。

ノード平均の中性子束が保存されている、

$$\int_{x_3}^{x_2} \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx \quad (2.4.6.1)$$

ノード左端での表面中性子束が同じである、

$$\Phi(x_2) = f_2 x_2^2 + f_1 x_2 + f_0 \quad (2.4.6.2)$$

ノード右端での表面中性子束が同じである、

$$\Phi(x_3) = f_2 x_3^2 + f_1 x_3 + f_0 \quad (2.4.6.3)$$

ノード左端の表面中性子流が同じである、

$$-D \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} = -D \frac{d}{dx} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) \Big|_{x=x_2} \quad (2.4.6.4)$$

ノード右端の表面中性子流が同じである、

$$-D \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_3} = -D \frac{d}{dx} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) \Big|_{x=x_3} \quad (2.4.6.5)$$

1 次の重み付き残差法である、

$$\int_{x_3}^{x_2} w_1(x) \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} w_1(x) (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx \quad (2.4.6.6)$$

2 次の重み付き残差法である、

$$\int_{x_3}^{x_2} w_2(x) \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} w_2(x) (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx \quad (2.4.6.7)$$

となる。

ここで、

$$x_2 = -\Delta x_n / 2 \quad (2.4.6.8)$$

$$x_3 = +\Delta x_n / 2 \quad (2.4.6.9)$$

$$w_1(x) = \frac{x - \frac{x_3 - x_2}{2}}{x_3 - x_2} \quad (2.4.6.10)$$

$$w_2(x) = \left(\frac{x - \frac{x_3 - x_2}{2}}{x_3 - x_2} \right)^2 - \frac{1}{12} \quad (2.4.6.11)$$

である。

本研究では、中性子源を多項式近似する多項式の次数が二次であるので、上記の拘束条件より 3 つを選択すればよいことになる。なお、展開次数を 4 次などの高次にする場合には、5 つの拘束条件を用いる必要がある。

これらの条件のうち、中性子のバランスを考慮すると(2.4.6.1)式は用いる必要がある。また、残りの二つであるが、以下では計算精度の観点から優れている重み付き残差法を用いる場合が多い²¹⁻²²⁾。なお、本研究で開発した計算コードは、展開方法として表面中性子束を用いた場合と、重み付き残差法の 2 種類の計算方法で計算することが可能である。

2.4.7 座標変換について

本研究で用いる近代ノード法の計算において、2 ノード問題を計算する時と中性子源をフィッティングする時の座標系は異なる。そのため、2 ノード問題を計算する際には、中性子源の係数は座標変換を行う必要がある。以下では、この座標変換について議論を行う。まず初めに、下図のように、2 ノード問題で左側に注目した時について考える。

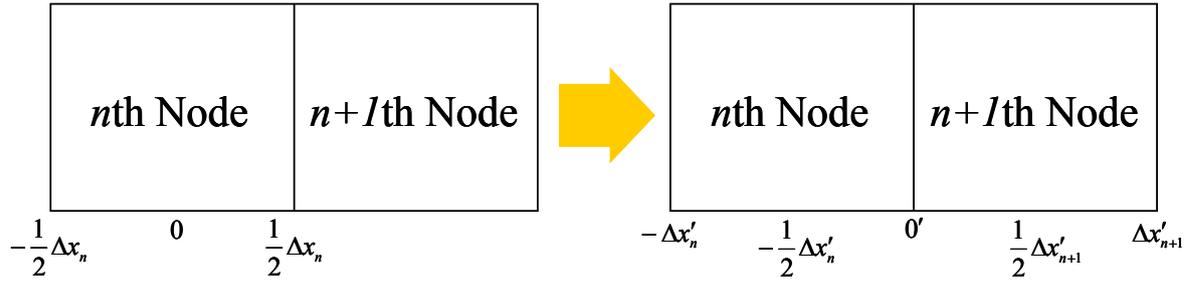


図 2.4.7.1 2 ノード問題(右端が原点)への座標変換

図 2.4.7.1 より、変換前の座標と変換後の座標は以下の関係を持っている。但し、各メッシュの長さは $\Delta x_n = \Delta x'_n$ 及び $\Delta x_{n+1} = \Delta x'_{n+1}$ である。すなわち、メッシュの長さは座標変換前と変換後は等しい。

$$-\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow -\Delta x'_n \quad (2.4.7.1)$$

$$0 \rightarrow -\frac{1}{2}\Delta x'_n \quad (2.4.7.2)$$

$$\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow 0' \quad (2.4.7.3)$$

(2.4.7.1)-(2.4.7.3)式を満たすために、座標変換前の座標に以下のような補正を加えることで、座標変換前と座標変換後の座標が等価になることを考える。(2.4.7.2)式より、座標変換前と座標変換後には以下の関係がある。

$$x'_n = x + \frac{\Delta x_n}{2} \quad (2.4.7.4)$$

このことより、変換後の座標に補正量が必要であることが分かった。そのため、2 ノード問題を計算する際に、中性子源及び横漏れ項は以下のように補正する必要がある。

$$\begin{aligned} & (s_2 - l_2) \left(x + \frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \left(x + \frac{\Delta x_n}{2} \right) + (s_0 - l_0) \\ &= (s_2 - l_2) x^2 + ((s_2 - l_2) \Delta x_n + (s_1 - l_1)) x + (s_2 - l_2) \left(\frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \frac{\Delta x_n}{2} + (s_0 - l_0) \\ &= q_{2,n} x^2 + q_{1,n} x + q_{0,n} \end{aligned} \quad (2.4.7.5)$$

ここで、

x : 座標変換後の座標

s_i : i 次の核分裂及び散乱モーメント

l_i : i 次の横漏れ項モーメント

q_i : i 次の中性子源項モーメント

である。

次に、右側のノードに注目した時の座標変換について議論する。

右側のノードに注目した時の座標変換の概念図は以下の通りである。

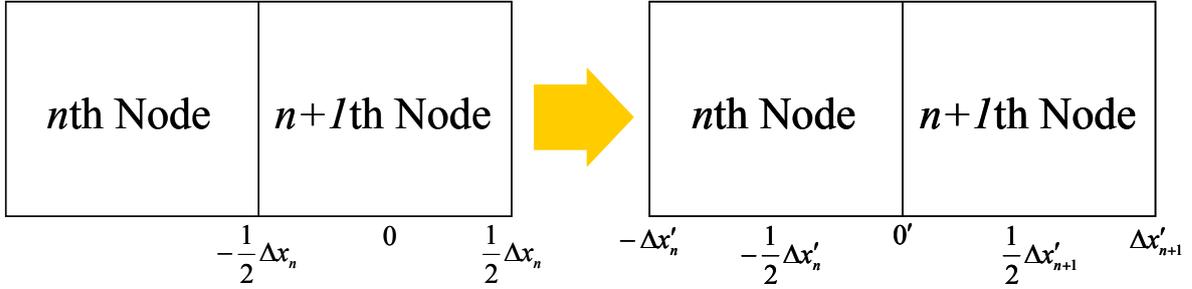


図 2.4.7.2 2 ノード問題(左端が原点)への座標変換

図 2.4.7.2 より、変換前の座標と変換後の座標は以下の関係を持っている。但し、図 2.4.7.1 と同様に、各メッシュの長さは $\Delta x_n = \Delta x'_n$ 及び $\Delta x_{n+1} = \Delta x'_{n+1}$ である。

$$-\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow 0' \quad (2.4.7.6)$$

$$0 \rightarrow \frac{1}{2}\Delta x'_n \quad (2.4.7.7)$$

$$\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow \Delta x'_{n+1} \quad (2.4.7.8)$$

n ノードの座標変換と同様に、 $n+1$ ノードの座標系に注目したときは以下のような座標変換が必要であることが、(2.4.7.6)-(2.4.7.8)式より分かる。

$$\begin{aligned} & (s_2 - l_2) \left(x - \frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \left(x - \frac{\Delta x_n}{2} \right) + (s_0 - l_0) \\ &= (s_2 - l_2)x^2 + (- (s_2 - l_2)\Delta x_{n+1} + (s_1 - l_1))x + (s_2 - l_2) \left(\frac{\Delta x_{n+1}}{2} \right)^2 - (s_1 - l_1) \frac{\Delta x_{n+1}}{2} + (s_0 - l_0) \\ &= q_{2,n+1}x^2 + q_{1,n+1}x + q_{0,n+1} \end{aligned} \quad (2.4.7.9)$$

次に 1 ノード問題の座標変換について考える。2 ノード問題と同様に、1 ノード問題も右側及び左側が境界条件である、2 種類にわけて座標変換を行う必要がある。まず初めに、下図のように、左端が境界条件の場合について考える。

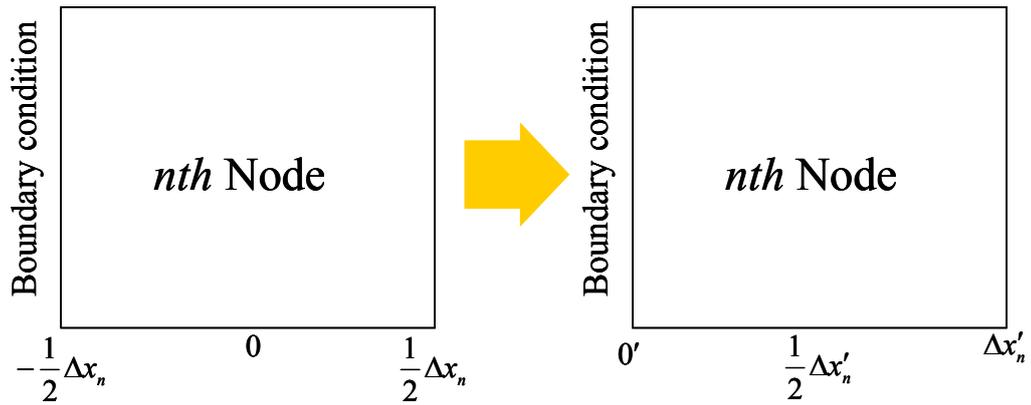


図 2.4.7.3 1 ノード問題(左端が原点)への座標変換

図 2.4.7.3 より、変換前の座標と変換後の座標は以下の関係を持っている。但し、上述した議論と同様に、各メッシュの長さは $\Delta x_n = \Delta x'_n$ 及びである。

$$-\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow 0' \quad (2.4.7.10)$$

$$0 \rightarrow \frac{1}{2}\Delta x'_n \quad (2.4.7.11)$$

$$\frac{1}{2}\Delta x_n \rightarrow \Delta x'_{n+1} \quad (2.4.7.12)$$

(2.4.7.10)-(2.4.7.12)式より、以下の座標変換が必要であることが分かる。

$$\begin{aligned} & (s_2 - l_2) \left(x - \frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \left(x - \frac{\Delta x_n}{2} \right) + (s_0 - l_0) \\ &= (s_2 - l_2)x^2 + (-s_2 + l_2)\Delta x_{n+1} + (s_1 - l_1)x + (s_2 - l_2) \left(\frac{\Delta x_{n+1}}{2} \right)^2 - (s_1 - l_1) \frac{\Delta x_{n+1}}{2} + (s_0 - l_0) \\ &= q_{2,n+1}x^2 + q_{1,n+1}x + q_{0,n+1} \end{aligned} \quad (2.4.7.13)$$

座標変換の最後として、以下の 1 ノード問題について考える。

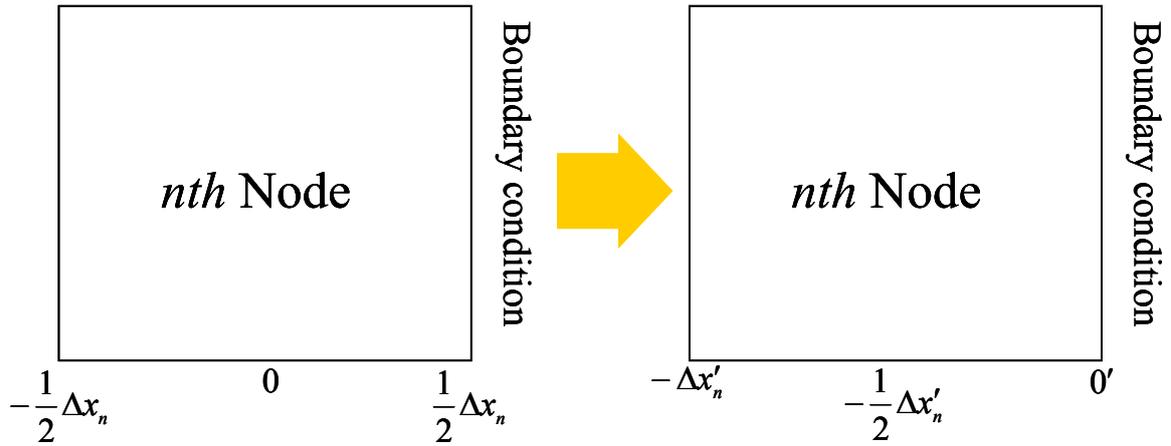


図 2.4.7.4 1 ノード問題(右端が原点)への座標変換

図 2.4.7.4 より、変換前の座標と変換後の座標は以下の関係を持っている。但し、上述した議論と同様に、各メッシュの長さは $\Delta x_n = \Delta x'_n$ 及びである。

$$\frac{1}{2} \Delta x_n \rightarrow 0' \quad (2.4.7.14)$$

$$0 \rightarrow \frac{1}{2} \Delta x'_n \quad (2.4.7.15)$$

$$-\frac{1}{2} \Delta x_n \rightarrow \Delta x'_{n+1} \quad (2.4.7.16)$$

(2.4.7.14)-(2.4.7.16)式より、以下の座標変換が必要であることが分かる。

$$\begin{aligned} & (s_2 - l_2) \left(x + \frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \left(x + \frac{\Delta x_n}{2} \right) + (s_0 - l_0) \\ &= (s_2 - l_2) x^2 + ((s_2 - l_2) \Delta x_n + (s_1 - l_1)) x + (s_2 - l_2) \left(\frac{\Delta x_n}{2} \right)^2 + (s_1 - l_1) \frac{\Delta x_n}{2} + (s_0 - l_0) \\ &= q_{2,n} x^2 + q_{1,n} x + q_{0,n} \end{aligned} \quad (2.4.7.17)$$

以上の座標変換を多項式展開した式に行うことで、2 ノード問題及び 1 ノード問題を適切に計算できる。以上で、ノード法の実装方法についての言及を終える。

2.5 Cuspingモデル

実炉心の3次元計算では、制御棒先端部が離散化ノードの内部に存在することがある。均質ノード炉心計算では、当該ノードを更に詳細に離散化し、部分挿入により生じるノード内非均質性を正確に模擬するのは困難である。最も簡単に制御棒の部分挿入を考慮する方法として、「体積荷重モデル」を用いてノードの均質化核定数を補正する方法がある。しかし、本手法では当該ノードにおける非均質反応率を精度よく再現することが難しく、出力分布及び制御棒価値に誤差を残すこととなる。

この制御棒部分挿入ノードに対して更に詳細な離散化を行い、非均質解析を適用した時に得られる解を ϕ_g^{hete} とする。粗メッシュ計算において反応率を再現する解を得るには、以下の均質化断面積 Σ_g^{hetero} を用いる必要がある。

$$\Sigma_g^{homo} = \frac{\int_{node} \Sigma_g^{hetero} \phi_g^{hetero} dV}{\phi_g^{homo}} \quad (2.5.1)$$

制御棒により生じる非均質性は、軸方向 z のみ現れるため、(2.5.1)式は次式に変形することが可能である。

$$\Sigma_g^{homo} = \frac{\Sigma_g^{CRout} \int_{CRout} \phi_g^{CRout}(z) dz + \Sigma_g^{CRin} \int_{CRin} \phi_g^{CRin}(z) dz}{\int_{CRout} \phi_g^{CRout}(z) dz + \int_{CRin} \phi_g^{CRin}(z) dz} \quad (2.5.2)$$

ここで、 $CRout$ 及び $CRin$ は制御棒引抜き領域及び挿入領域を表すインデックスであり、 Σ_g 及び ϕ_g は非均質核定数及び中性子束分布を表している。この非均質核定数は制御棒挿入領域と未挿入領域でステップ状に変化する分布を有している。3次元炉心計算においては、非均質中性子束分布が求められないため、(2.5.2)式より Σ_g^{homo} を求めることが出来ない。そのため、何らかの近似モデルを適用する必要がある。以下では、「体積荷重モデル」、「中性子束荷重モデル」及び「Cuspingモデル」についての説明を行う。

2.5.1 体積荷重モデル

体積荷重モデルは最も簡単な方法である。非均質中性子束分布が未知であるため、これが制御棒挿入体積割合に比例すると仮定し、以下の式で均質化核定数を求める手法である。

$$\Sigma_g^{homo} = CRF \cdot \Sigma_g^{CRin} + (1 - CRF) \cdot \Sigma_g^{CRout} \quad (2.5.1.1)$$

ここで、 CRF は制御棒割合である。

本手法は最も簡便な手法であるが、非均質中性子束分布を制御棒割合に比例させる点において、極めて大きな近似となるため、十分な解析精度が得られない場合が多い。なお、本研究では本手法を採用している。

2.5.2 中性子束荷重モデル

近代ノード法では、1次元ノード内中性子束分布を考慮している。従って、部分制御棒挿入ノードにおいても、その軸方向中性子束分布は計算されることになる。多項式解析的ノード法における中性子束分布は次式の通りである。

$$\Phi_z(z) = A \sinh(\kappa z) + C \cosh(\kappa z) \frac{q_2}{\Sigma_r} z^2 + \frac{q_1}{\Sigma_r} z + \left(\frac{q_0}{\Sigma_r} + 2D \frac{q_2}{\Sigma_r^2} \right) \quad (2.5.2.1)$$

(2.5.2.1)式を(2.5.2)式に代入すると、次式を得ることができる。

$$\Sigma_g^{homo} = \frac{\Sigma_g^{CRout} \int_{CRout} \Phi_{z,g}(z) dz + \Sigma_g^{CRin} \int_{CRin} \Phi_{z,g}(z) dz}{\int_{node} \Phi_{z,g}(z) dz} \quad (2.5.2.2)$$

ノード内中性子束分布を荷重関数としているため、上式で与えられる均質断面積は(4)式で得られるものよりも、精度がよい場合がある。しかし、この中性子束分布は、均質ノードに対して得られたものであり、当該ノード内部の非均質性を反映したものではない。従って、解の精度としては、改善の余地が残されている。

また、本手法のデメリットとして、均質化断面積に未知数である中性子束 $\Phi_z(z)$ が含まれている。そのため反復毎に断面積を更新する必要があり、収束性が悪化することが考えられる。

2.5.3 Cuspingモデル

Cusping モデルという呼称は、定常状態炉心解析を対象に、K.S. Smith²⁴⁾ により提案された手法であり、制御棒先端部がノード内部に位置する場合、集合体のグリッド・スペーサがノード内部に位置する場合の解析精度を向上させる手法である。

基本概念は、図 2.5.3.1 に示すように、ノード内部に軸非均質性が存在する場合のみ、そのノードを 2 領域に離散化し、簡略な非均質計算を行うことが一般的である^{13, 24)}。

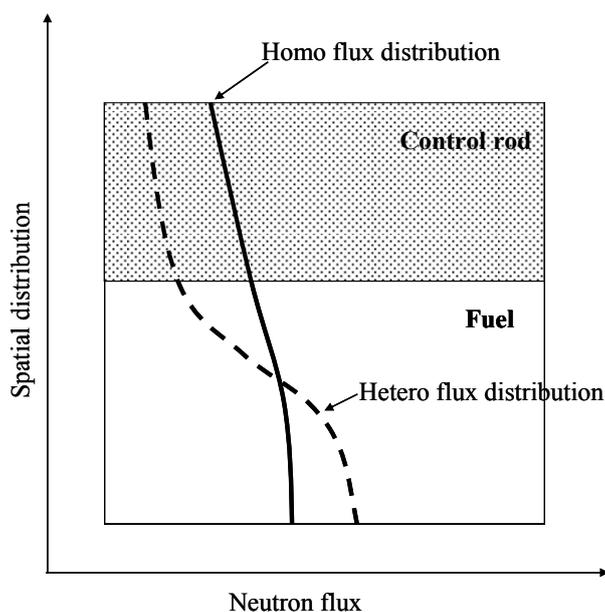


図 2.5.3.1 Cusping モデル概念図

体系は当該ノードの上下ゼロ中性子流境界とする 1 次元問題である。得られた非均質中性子束分布を用いて(2.5.2)式より補正均質核定数を計算する。またこの計算方法は、燃料集合体の核定数均質化に類似していることから、当該ノード境界の非均質中性子束による中性子流を保存させるため、以下の Cusping 不連続因子を算出する。

$$\gamma_g = \frac{\phi_g^{hetero}}{\phi_g^{homo}} \quad (2.5.3.1)$$

炉心計算では、得られた補正均質核定数と Cusping 不連続因子を用いて、三次元計算を行う。ここで、 ϕ_g^{hetero} 、 ϕ_g^{homo} は非均質解及び 3 次元炉心計算で得られる均質解である。

(2.5.3.1)式の不連続因子や補正均質核定数の算出方法としては、様々な計算方法が提案されている^{13,24)}。

2.6 加速法

前節までの議論は、差分化した拡散方程式を計算する方法について議論した。原理的にはどのような群数・計算メッシュ数であったとしても、前節までに説明した理論で計算することは可能である。しかし、実機の炉心計算のように大型の体系では、本節で述べる反復計算の収束性を向上させる加速法を用いないで炉心計算を行うのは、困難である。

2.6.1 Coarse Mesh Finite Difference法

内部・外部反復の加速に使用される加速法である。反復解法の収束性は未知数が少ないほど(メッシュ数・エネルギー群数が少ないほど)良好である。粗メッシュ加速法は、この特徴を利用するもので、中性子拡散方程式の数値解を反復解法で求める場合に、図 2.6.1.1 のように、本来より粗い空間メッシュ・エネルギー群数の中性子拡散方程式を解き、その結果を利用することで、詳細な空間メッシュ・エネルギー群数の収束を速くする方法である。

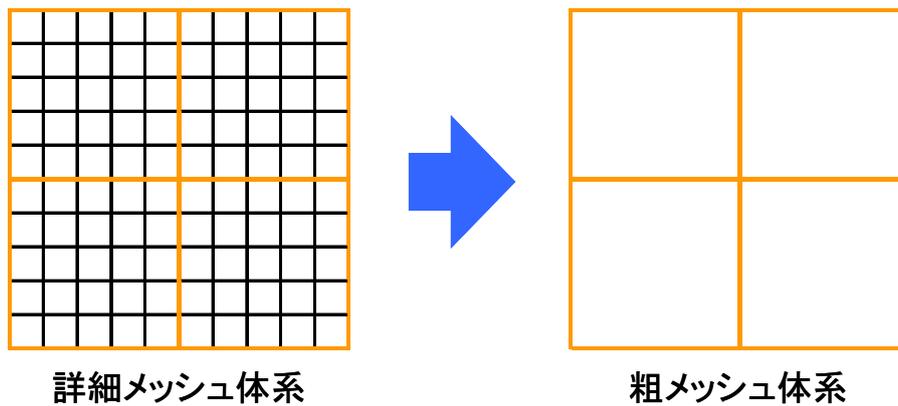


図 2.6.1.1 CMFD 加速の概念図

以下では、Coarse Mesh Finite Difference 法(CMFD 加速)について言及する前に、CMFD 加速の計算に用いる、「縮約」と「均質化」について言及していく。まず初めに、縮約について述べる。

縮約という言葉は、エネルギー群を粗くする際に用いる言葉である。詳細なエネルギー群を粗いエネルギー群数に縮約する際には、詳細エネルギー群数の計算結果を出来る限り再現するように、粗いエネルギー群数の計算で使用する断面積を平均化することを行う。

一方、均質化という言葉は、空間メッシュを粗くする際に用いる言葉である。詳細な空間メッシュを粗い空間メッシュにする均質化する際には、詳細メッシュの計算結果を

出来る限り再現するように、粗い空間メッシュの計算で使用する断面積を平均化することを行う。

CMFD 加速では以上の、縮約・均質化を行うことで、詳細エネルギー群・メッシュを粗エネルギー群・メッシュ数で計算することを行う。以下では、CMFD 加速に用いる各断面積の縮約・均質化方法について述べる。

CMFD 加速では、詳細エネルギー群・メッシュ数の時の中性子の生成/消滅の積分量が元の詳細な結果を保存するように、CMFD 加速の断面積 Σ を定義すればよい。例えば、領域 I 、第 G 群のエネルギー範囲で積分された吸収反応率は次式である。

$$\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \Sigma_{a,i,g} \phi_{i,g} V_i \quad (2.6.1.1)$$

上式の反応率の総和について、領域 I 、第 G 群における反応率が保存されるようにしつつ、吸収断面積が一定であると仮定すると次式を得ることができる。

$$\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \Sigma_{a,i,g} \phi_{i,g} V_i = \Sigma_{a,I,G} \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i \quad (2.6.1.2)$$

上式より、縮約・均質化された吸収断面積は以下式で定義することが分かる。

$$\Sigma_{a,I,G} \equiv \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \Sigma_{a,i,g} \phi_{i,g} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.3)$$

以上では、吸収断面積における縮約・均質化を行ったが、上記の議論と同様な議論で、除去断面積、核分裂断面積、散乱断面積の縮約・均質化は以下の式で定義することができる。

$$\Sigma_{r,I,G} \equiv \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \Sigma_{r,i,g} \phi_{i,g} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.4)$$

$$v\Sigma_{f,I,G} \equiv \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} v\Sigma_{f,i,g} \phi_{i,g} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.5)$$

$$\Sigma_{s,I,G} \equiv \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G'} \Sigma_{s,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,g'} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.5)$$

以上では、各断面積について議論したが、まだ、核分裂スペクトル及び、動特性計算で

必要となる中性子速度の縮約・均質化方法について述べていない。そこで以下では、核分裂スペクトル及び中性子速度の縮約・均質化方法について述べる。

まず初めに、核分裂スペクトルについて議論する。核分裂項を領域 I で積分すると次式を得る。

$$\frac{1}{k_{eff}} \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \chi_g \sum_{g'}^{NG} \nu \Sigma_{f,i,g'} \phi_{i,g'} V_i \quad (2.6.1.6)$$

上式の反応率の総和について、領域 I 、第 G 群における反応率が保存されるようにしつつ、核分裂スペクトルが一定であると仮定すると次式を得ることができる。

$$\frac{1}{k_{eff}} \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \chi_g \sum_{g'}^{NG} \nu \Sigma_{f,i,g'} \phi_{i,g'} V_i = \frac{\chi_{G,I}}{k_{eff}} \sum_{i \in I} \sum_{g'}^{NG} \nu \Sigma_{f,i,g'} \phi_{i,g'} V_i \quad (2.6.1.7)$$

(2.6.1.7)式より、縮約・均質化した場合の核分裂スペクトルを得ることができる。

$$\chi_{G,I} = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \chi_g \sum_{g'}^{NG} \nu \Sigma_{f,i,g'} \phi_{i,g'} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g'}^{NG} \nu \Sigma_{f,i,g'} \phi_{i,g'} V_i} \quad (2.6.1.8)$$

(2.6.1.8)式から、核分裂スペクトルは断面積とは異なり、発生中性子を重みとして縮約・均質化を行うことになる。

次に中性子速度の縮約・均質化について述べる。中性子束 ϕ と中性子密度 n の関係は次式である。

$$\phi = \nu n \quad (2.6.1.9)$$

(2.6.1.9)式を中性子密度について整理すると次式になる。

$$n = \frac{\phi}{\nu} \quad (2.6.1.10)$$

中性子密度を縮約・均質化前と後で保存しつつ、中性子速度が、領域 I 、第 G 群において一定であると仮定すると次式を得ることができる。

$$\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \frac{1}{\nu_g} \phi_{i,g} V_i = \frac{1}{\nu_{G,I}} \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i \quad (2.6.1.11)$$

よって上式より、縮約・均質化した場合の中性子速度として次式を得ることができる。

$$\frac{1}{\nu_{G,I}} = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \frac{1}{\nu_g} \phi_{i,g} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.12)$$

以上より、CMFD 加速に用いる縮約・均質化についての議論を行なった。しかし、CMFD 加速において、縮約・均質化した断面積を用いるだけでは、メッシュ誤差やエネルギー群縮約に伴う誤差のため、詳細メッシュの中性子流を再現することができない。そこで CMFD 加速法では、近代ノード法の非線形反復法と同様に、CMFD 加速中の中性子流に次式のように補正項を加える。

$$J_{I,G}^{x+} = \frac{-2\alpha D_{I,G} D_{I+1,G}}{D_{I,G} \Delta x_{I+1} + D_{I+1,G} \Delta x_I} (\phi_{I+1,G} - \phi_{I,G}) + D_{I,G}^{cor} (\phi_{I+1,G} + \phi_{I,G}) \quad (2.6.1.13)$$

ここで、

$$D_{I,G}^{cor} = \left\{ J_{I,G,x+}^{Fine} - \frac{-2\alpha D_{I,G} D_{I+1,G}}{D_{I,G} \Delta x_{I+1} + D_{I+1,G} \Delta x_I} (\phi_{I+1,G} - \phi_{I,G}) \right\} / (\phi_{I+1,G} + \phi_{I,G}) \quad (2.6.1.14)$$

$J_{i,x+}^{Fine}$: 詳細エネルギー群・メッシュで求めた中性子流

α : 安定化因子

$$D_{I,G} \equiv \frac{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} D_{i,g} \phi_{i,g} V_i}{\sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \phi_{i,g} V_i} \quad (2.6.1.15)$$

である。

なお、拡散係数の縮約・均質化の(2.6.1.15)式は本来ならば中性子流を重みとする必要があるが、(2.6.1.13)式の補正項で、この誤差を取り組むことが出来ているために問題にならない。なお、近代ノード法の非線形反復と同様に、CMFD 加速も反復に伴い係数が変化するために、非線形反復と呼ばれる。

非線形反復は数値的に不安定になる場合があり、計算が発散する場合がある。そこで、Generalized Coarse Mesh Rebalance 法に用いられている安定化因子 α を導入することで、非線形反復に伴う数値不安定性を抑制することが可能である²⁵⁾。参考文献 25)より、空間メッシュの光学距離 $\tau (= \sum_l \Delta x)$ が 1 に比べて小さいときは $\alpha = 1$ に設定すればよい。しかし、もし $\tau > 1$ となる場合は、 $\alpha > \tau$ となるように α を十分に大きな値に設定すれば、CMFD 加速を安定して用いることが可能となる。ただし、 α 値を大きくすると加速計算自体の収束性が悪化し、合計の計算時間が悪化する場合もある。

CMFD 加速の適用方法を以下に示す。

1. 詳細エネルギー群・メッシュで数回の外部反復を実施
2. 上述した式を用いて CMFD 加速の平均断面積・核分裂スペクトル・中性子流の計算を行う

3. (2.5.2.14)式の補正係数を計算
4. 粗エネルギー群・メッシュでの拡散計算の実施
5. 2.で縮約した中性子束 $\phi_{CM,before}$ と 4.で得られた拡散計算後の中性子束 $\phi_{CM,after}$ の結果を詳細計算に反映

$$\tilde{\phi}_{i,g} = \frac{\phi_{CM,after}}{\phi_{CM,before}} \quad (2.6.1.16)$$

6. 1~5 の過程を収束するまで繰り返す。

以上の議論で CMFD 加速について述べたが、CMFD 加速法は数値計算の分野でいうと、幾何的マルチグリッド法に相当する⁷⁾。幾何的マルチグリッド法でよく用いられている方法として、今回の様に一段の粗エネルギー群・メッシュ数だけではなく、更に段数を増やして、計算体系を粗くすることで計算を行う方法が多用されている。段数の設定の仕方として、下図に示すように V サイクルと W サイクルの 2 種類の方法がある⁷⁾。

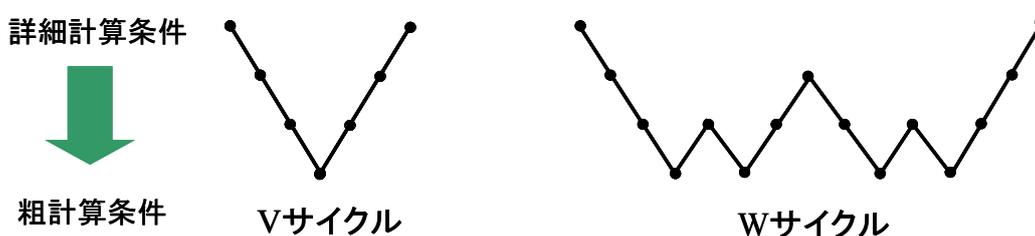


図 2.6.1.2 多段階マルチグリッド法のサイクル概念図

本研究においては一段のサイクルしか用いていないが、AEGIS コード²⁶⁾や CASMO-5 コード²⁷⁾は二段階のマルチグリッド加速を行っている。このように CMFD 加速や GCMR 加速は現在の計算コードに非常に多く採用されており、非常に強力な加速方法である。

2.6.2 Simplified Fixed Source Scaling Factor法

本節では、固定源計算における Simplified Fixed Source Scaling Factor 法²⁹⁾について述べる。Simplified Fixed Source Scaling Factor 法について述べる前に、まず初めに固定源計算について述べる。

固定源計算には次式を用いる。

$$\begin{aligned}
& -\nabla D_g(\mathbf{r})\nabla\phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{r,g}(\mathbf{r})\phi_g(\mathbf{r}) \\
& = \chi_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r})\phi_{g'}(\mathbf{r}) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r})\phi_{g'}(\mathbf{r}) + Q_{ex,g}(\mathbf{r}) \quad (2.6.2.1)
\end{aligned}$$

固有値計算と固定源計算は、求める中性子束の値が相対値か絶対値かと言う点で異なっている。固有値計算ではべき乗法を用いるために、核分裂数を体系全体で1になるように規格化している。そのため固有値計算で求まるのは、体系全体の発生中性子数を1で規格化したときの中性子束分布であるために、中性子束分布の相対値が求まる。一方、固定源計算では体系全体の核分裂数を規格化していないので、中性子束分布の絶対値を計算できる¹。このように、固有値計算と固定源計算は式上では僅かな差異しかないが、その物理的意味は大きく異なる。固定源計算についての言及をしたので、以下では、固定源計算のための加速法のSimplified Fixed Source Scaling Factor法について述べる。

本手法は、Fixed Source Scaling Factor法に基づいている²⁸⁾。固定源問題の特徴として、中性子束分布の形は比較的早く収束するが、中性子束分布の絶対値の収束はみりん開度に依存するという特徴がある。そこで、中性子束分布の絶対値の収束性を向上させるための方法として、Fixed Source Scaling Factor法が用いられている。元々のFixed Source Scaling Factor法は、Galerkin weight法を用いて固定源問題の式のバランスをとっていた。しかし、Fixed Source Scaling Factor法をより簡潔にすることで、計算コスト低減した、Simplified Fixed Source Scaling Factor法が開発された。

固定源問題に対して、演算子を用いて表記すると厳密式は次式になる。

$$\mathbf{L}\phi^{(exact)} = \mathbf{M}\phi^{(exact)} + \mathbf{S} \quad (2.6.2.2)$$

ここで、

L : 消滅演算子

M : 生成演算子

S : 外部中性子源

である。

しかし、 n 回目の反復においては中性子束の真の解が求まっていないので、(2.6.2.2)式のバランスが保持されていない。

$$\mathbf{L}\phi^{(n)} - \mathbf{M}\phi^{(n)} \neq \mathbf{S} \quad (2.6.2.3)$$

そこで、Simplified Fixed Source Scaling Factor法では次式のようなリバランス因子 f を定義する。

¹ そのため、動特性解析においては、定常状態の収束条件よりも厳しくしないと正しい解を得ることができない。

$$f = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{\langle \mathbf{L}\phi^{(n)} - \mathbf{M}\phi^{(n)} \rangle} \quad (2.6.2.4)$$

ここで、

$\langle \rangle$: 全位相空間での積分演算子

である。

そして定義したリバランス因子を用いて n 回目の中性子束を補正する。

$$\tilde{\phi}^{(n)} = f\phi^{(n)} \quad (2.6.2.5)$$

Simplified Fixed Source Scaling Factor 法では、固定源問題の両辺の大きさが保存できるようにリバランス因子 f を定義したので、中性子束分布の絶対値の収束を大幅に向上することが可能である。

2.6.3 各種外挿法

本節では炉心計算のみならず、数値計算の分野で幅広く用いられている外挿法について述べる。外挿は、誤差成分の減少分をより強調することで行う。代表的な外挿方法を表 2.6.3.1 に示す。

表 2.6.3.1 各種外挿法^{3,30)}

**SOR法、Chebyshev法、
Aitken法、Richardson法**

SOR 法は本研究でも用いており、少し詳細に、後述する。そこでまず初めに、Chebyshev 法、Aitken 法、Richardson 法について述べる。

参考文献 3)によれば、Chebyshev 加速法には、Chebyshev 多項式の根を用いる方法と Chebyshev 多項式の漸化式を用いる方法の 2 種類があるが、汎用性の観点から漸化式のタイプの法が優れているとされている。

Aitken 法と Richardson 法は、詳細は異なるが、これらの加速法は無級数をの和の収束性を加速するために、級数の次数を無限大まで足した場合の解を求めるという点では同じである。また、これらの加速法の優れている点としては、過去の解の収束率をメモリ上に保持しとおけば任意の段数の加速法を行えるということである。そのため、これらの加速法がうまく効果を発揮する時は、解の収束率が大きく向上する。しかし、これらの加速法の欠点として、解の収束が滑らかでないと、解が発散することが多々あること

が経験的に分かっている。

最後に SOR 法について述べる。Successive Over Relaxation 法(SOR)法は、実装方法が容易であり、最も基本的な加速法である。SOR 法では次式のように、加速パラメータ ω を用いて、前回からの変化分をより強調することで、収束性を向上させる加速法である。

$$\tilde{\phi}^{(n)} = \phi^{(n-1)} + \omega(\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}) \quad (2.6.3.1)$$

下図に SOR 法の概念図を示す。

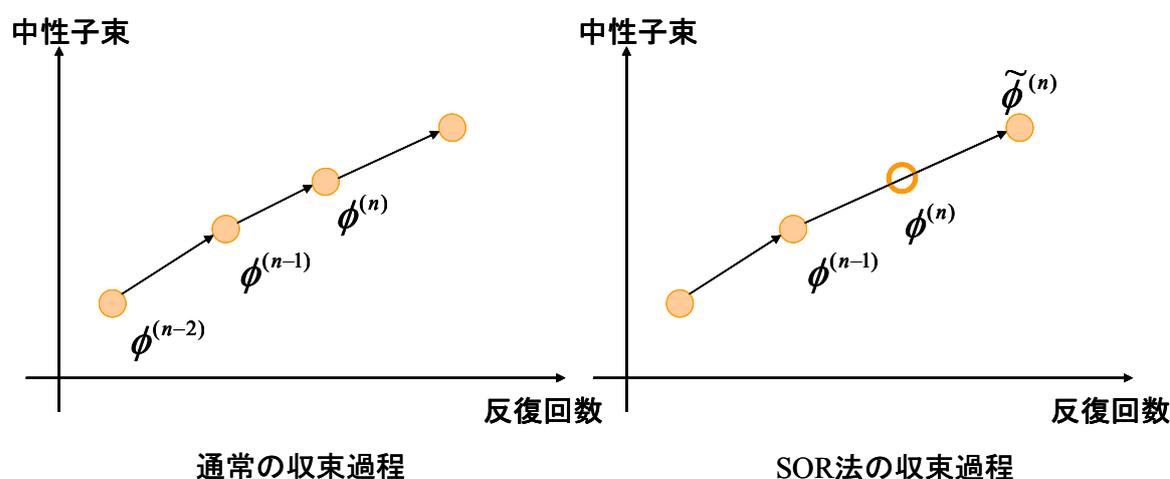


図 2.6.3.1 SOR 法の概念図

SOR 法では、 $\omega > 1$ することで収束率をより向上させることができる。ただし、Gauss-Seidel 法では $\omega < 2$ でないと収束しないことが理論的に証明されている³⁾。そのため、通常、 $1 < \omega < 2$ の範囲が用いられる。ただし、 $1 < \omega < 2$ の範囲でも計算手法や条件によっては計算が不安定になることがある。また SOR 法は、 $0 < \omega < 1$ とすることで、後退加速を行うことができる。後退加速は収束率を低下させるかわりに、より安定して収束させることができるので、Xe に基づくフィードバックのような収束しにくい計算で効果が発揮される⁵⁾。

2.7 本章のまとめ

本章で述べたことを以下にまとめる。

- 中性子輸送方程式には微積分型と積分型の式があり、各式に対しての数値解法を紹介した。
- 中性子束を飛行方向に関して Legendre 多項式を用いて関数展開し、P1 成分まで考慮することで中性子拡散方程式を導出した。

- ・ 中性子拡散方程式に多群近似・有限差分近似を導入することで数値計算が可能な式に式変形を行った。また本研究で採用する拡散方程式の数値解法として、内部反復に ADI 法、外部反復にべき乗法の計算理論について述べた。
- ・ メッシュ誤差が大きい有限差分法に代わり、粗メッシュでも高精度に計算することが可能である近代ノード法の計算理論について述べ、特に、本研究で用いる多項式解析的ノード法と非線形反復法について述べた。
- ・ 制御棒は炉心計算の精度に大きく寄与するために、制御棒の効果をより適切に扱う Cusping モデルについて述べた。
- ・ 詳細な計算を効率よく計算するために、収束性を大幅に向上させることが可能である、加速法について言及した。特に、本研究で用いる CMFD 加速法、Simplified fixed source scaling factor 法、SOR 法について詳細に述べた。

2.8 参考文献

- 1) A. Yamamoto, "A simple and efficient control rod Cusping model for three-dimensional pin-by-pin core calculation," *Nucl. Tech.*, **145**[1], 11-17 (2003).
- 2) 成田正邦, "ボルツマン方程式の起源", 34回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.1 (2002).
- 3) 小林啓祐, 原子炉物理, コロナ社 (1996).
- 4) 山本章夫, "Boltzmann方程式の解法 A. 決定論的手法", 34回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.45 (2002).
- 5) 山本章夫, "拡散方程式の数値解法の基礎", 36回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.47 (2004).
- 6) 田端正久, 萩原一郎, 計算力学ハンドブック, 朝倉書店 (2010).
- 7) 杉原正き, 室田一雄, 線形計算の数理, 岩波数学叢書 (2009).
- 8) T. Downar, D. Lee, Y. Xu, *et al.*, *PARCS v2.6 U.S NRC Core Neutronics Simulator THEORY MANUAL*, School of Nuclear Engineering Purdue University (2004).
- 9) Y. Xu, "A matrix free Newton / Krylov Method for Coupling Complex Multi-physics Subsystems," Thesis, Doctor of Philosophy, Purdue University (2004).
- 10) 平岡和幸, 堀玄, プログラミングのための線形代数, オーム社, (2007).
- 11) 奥村啓介, "近代ノード法と不連続因子の基礎", 36回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.81 (2004).
- 12) N. Z. Cho, J. Lee, "Analytic Function Expansion Nodal (AFEM) Method in hexagonal-Z three- dimensional geometry for neutron diffusion calculation." *J. Nucl. Sci. Technol.*, **43**[11], 1320-1326 (2006).

- 13) 池田秀晃, “3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用”, 博士論文, 大阪大学, (2002).
- 14) T. Bahadir, S. Lindahl, “Studsvik’s next generation nodal code SIMULATE-5,” *ANFM 2009*, South Carolina, April 12-15 (2009).
- 15) 奥村啓介, “MOSRA-Light; ベクトル計算機のための高速3次元中性子拡散ノード法コード,” JAERI-Data/Code 98-025, 日本原子力研究所 (1998).
- 16) V. G. Zimin, H. Ninokata, “Nodal neutron kinetics model based on nonlinear iteration procedure for LWR analysis,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **25**[8], 507-528 (2003).
- 17) S. Aoki, T. Suemura, J. Ogawa, *et al.*, “The Verification of 3 Dimensional Nodal Kinetics Code ANCK Using Transient Benchmark Problems,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[6], 862-868 (2007).
- 18) M. Tatsumi, A. Yamamoto, “Advanced PWR Core Calculation Based on Multi-group Nodal-transport Method in Three-dimensional Pin-by-Pin Geometry,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[6], 376-387 (2003).
- 19) M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, “Development of Kinetics Model for BWR Core Simulator AETNA,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[4], 201-212 (2003).
- 20) T. Iwamoto, M. Yamamoto, “Advanced nodal methods of the few-group BWR core simulator NEREUS,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**[11], 996-1008 (1999).
- 21) , “Advanced nodal methods of the few-group BWR core simulator NEREUS,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**[11], 996-1008 (1999).
- 22) J. I. Yoon, H. G. Joo, “Two-level coarse mesh finite difference formulation with multigroup source expansion nodal method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **45**[7], 668-682 (2008).
- 23) A. Hotta, H. Ninokata, A. J. Baratta, “Development of Parallel Coupling System between three-dimensional nodal kinetic code ENTRÉE and two-fluid plant simulator TRAC/BF1,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **37**[10], 840-854 (2000).
- 24) K. S. Smith, “An analytic nodal method solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equations,” Master of engineer and science, Massachusetts
- 25) A. Yamamoto, Y. Kitamura, T. Ushio, N. Sugimura, “Convergence Improvement of Coarse Mesh Rebalance Method for Neutron Transport Calculations,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**[8], 781-789 (2004).
- 26) A. Yamamoto, N. Sugimura, T. Ushio, “Next Generation of “Advanced” Methods for Light Water Reactor Analysis,” *ANS2005*, California, June. 5-9 (2005).
- 27) J. Rhodes. K. Smith, D. Lee, “CASMO-5 Development and Applications,” *Proc. PHYSOR2006*, Vancouver, Canada, Sept. 10-14, 2006, (2006).

- 28) P. J. Turinsky, R. M. K. AL-Chalabi, P. Engrand, *et al.*, *NESTLE Few-group neutron diffusion equation solver utilizing the nodal expansion method for eigenvalue, adjoint, fixed-source steady-state and transient problems*, Electric Power Research Center, North Carolina State University (1994).
- 29) Y. Ban, T. Endo, A. Yamamoto, Y. Yamane, “Explicit time integration scheme using Krylov subspace method for reactor kinetic equation,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **48**[2], 1-13 (2011).
- 30) 水島二郎, 柳瀬眞一郎, *理工学のための数値計算法*[第2版], 数理工学社 (2009).

第3章 従来の動特性方程式の計算法

3.1 本章の概要

本章及び次章では、本研究における研究目的である、動特性解析手法について述べる。前章の2章では定常状態を考えていたために、対象としていた式は時間微分項を含んでいなかった。しかし、炉心の安全解析においては1章でも述べたように、炉心に反応度が加わった場合の炉心健全性を評価する必要がある。そのため、炉心の安全解析では、定常状態の拡散方程式に時間微分項が追加された、時間依存の拡散方程式の計算を行う必要がある。

詳細は後述するが、動特性計算では時間積分を行う際に、ある時間幅(タイムステップ)を設定する。そのため、解析時間をタイムステップで除算した回数の拡散計算を行う必要があり、定常状態の解析に比べて計算コストが大きいという問題点がある。そのため、計算機の性能が十分でなかった頃には、動特性方程式に非常に大きな近似を導入した一点炉動特性方程式が広く用いられていた。

現在では、近代ノード法や加速法を初めとする計算手法の発展や計算機の発展に伴い、時間依存モデルも従来法の一点炉モデルから、空間依存を考慮した空間依存動特性解析が行われている。しかし、序論でも述べたように現在では、炉心の安全裕度をより適切に評価するために、核計算モデルや熱水力計算モデルの高度化が望まれており、動特性解析手法も同様に高精度・高速な計算手法が望まれている。そこで本章では、現在まで開発されてきた、動特性計算手法について詳細に分析を行うことで、従来法の問題点及び潜在的な近似を明らかにし、新手法を開発するための指針を示す。

3.2 節では空間依存動特性解析の基礎式となる時間依存の拡散方程式の概要及び、これまでの空間依存動特性解析手法の開発経緯について述べる。次に3.3~3.6 節では現在の動特性解析手法の主流となっている θ 法、周波数変換法、SCM法、改良準静近似法について述べる。また、3.7 節では、動特性計算の解析精度に大きな影響を及ぼす遅発中性子先行核密度の計算方法について述べる。

次に3.8 節では、現在の空間依存動特性を商業炉のように、大型な計算体系でも適用することができるようになった要因の一つである、近代ノード法の時間依存の拡張について言及する。3.9 節では、動特性解析を精度良くかつ効率的に計算するためには必要である、自動時間ステップモデルについて述べる。そして最後の3.10 節では、本章のまとめを述べる。

3.2 空間依存動特性方程式

前章では定常状態を考えていたので、拡散方程式に時間微分項が含まれていなかったが、本章では、以下の時間依存拡散方程式について考える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.1) \\ & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.2)$$

定常状態の式とは異なり、(3.2.1)及び(3.2.2)式より時間依存拡散方程式では、中性子束と遅発中性子先行核密度の連立微分方程式になっていることがわかる。そのため、空間依存動特性方程式を計算するという事は、連立微分方程式を計算するという事に帰着する。

なお、(3.2.1)式及び(3.2.2)式の時間微分項をゼロとすると、定常状態の式と等価になり、時間依存拡散方程式と定常状態の拡散方程式の整合性がとれていることも分かる。次節以降では、空間依存動特性方程式の数値解法を述べる前に、動特性解析の基礎となる一点炉動特性方程式について述べる。

3.2.1 一点炉動特性方程式

一点炉方程式は一点と呼称されているので、中性子束が空間分布を有していないように思えるが、実際には空間分布は考慮されている。しかし、一点炉動特性方程式の空間分布の形状は定常状態と同じであるとし、時間と共に変化しないという仮定を用いている。一点炉動特性方程式の概念図を図 3.2.1.1 に示す。

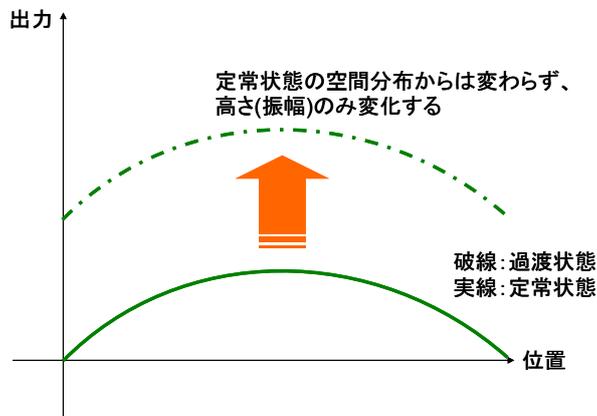


図 3.2.1.1 一点炉動特性方程式の概念図

図 3.2.1.1 より、一点炉動特性方程式では、過渡変化中の中性子束分布の形の変化を無視しており、振幅のみを考慮していることが分かる。以下では、重み関数に随伴中性子束を用いた、実機の解析に用いるための一点炉動特性方程式の導出を行っていく。なお、Appendix にはバックリングを用いた簡易な一点炉動特性方程式の導出を示している。

一点炉動特性方程式は形状の時間依存性を考慮していないが、後述する断熱近似、準静近似及び改良準静近似法のために、中性子束が時間に依存する振幅項 $P(t)$ と形状関数項の $\phi(\mathbf{r}, t)$ の乗算で表すことができる。

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = P(t)\phi_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.1.1)$$

(3.2.1.1)式を(3.2.1)式及び(3.2.2)式の空間依存動特性の式に代入すると次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \left[\phi_g(\mathbf{r}, t) \frac{dP(t)}{dt} + P(t) \frac{d\phi_g(\mathbf{r}, t)}{dt} \right] &= P(t) \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) P(t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) P(t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) & \quad (3.2.1.2) \end{aligned}$$

$$+ (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_g v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) P(t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_m P(t) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'} - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.1.3)$$

(3.2.1.2)の両辺に任意の重み関数 $W_g(\mathbf{r})$ を乗算し、(3.2.1.3)式の両辺には $W_g(\mathbf{r}) \chi_{d,m,g}$ を乗算し、全エネルギー及び空間に関して積分すると次式を得ることができる。なお通常、重み関数としては、体系を一点炉にすることに伴う誤差を低減するために、 λ モードの随伴中性子束を用いるのが一般的である¹⁾。しかし、後述する改良準静近似法で一点炉動特性方程式を導出する場合は、 ω モードの随伴中性子束を用いる場合もある²⁾。

$$\begin{aligned}
\left\langle W_g(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left\langle W_g(\mathbf{r}) \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad - P(t) \left\langle W_g(\mathbf{r}) \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad + P(t) \left\langle W_g(\mathbf{r}) \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad + P(t) \left\langle W_g(\mathbf{r}) (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle W_g(\mathbf{r}) \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad - P(t) \left\langle \frac{W_g(\mathbf{r})}{v_g} \frac{\partial \varphi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.1.4}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle W_g(\mathbf{r}) \chi_{d,m,g} \frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle \\
&= P(t) \left\langle W_g(\mathbf{r}) \chi_{d,m,g} \beta \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\
&\quad - \lambda_m \left\langle W_g(\mathbf{r}) \chi_{d,m,g} C_m(\mathbf{r}, t) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.1.5}$$

ここで、形状関数 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ に以下の規格化条件を課す。

$$\left\langle W_g(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle = const. \tag{3.2.1.6}$$

上記の規格化条件を課すことによって、(3.2.1.4)式の右辺最終項が消去することができる。また、以下の変数を定義する。

$$F(t) \equiv \left\langle W_g(\mathbf{r}) \left[(1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_m \beta_m \chi_{d,m,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right] \right\rangle \tag{3.2.1.7}$$

$$\beta(t) = \sum_m \beta_m(t) \tag{3.2.1.8}$$

$$\beta_m(t) = \frac{1}{F(t)} \left\langle W_g(\mathbf{r}) \left[\chi_{d,m,g} \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right] \right\rangle \tag{3.2.1.9}$$

$$\Lambda(t) = \frac{\left\langle W_g(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle}{F(t)} \quad (3.2.1.10)$$

$$C_m(t) = \frac{\left\langle W_g(\mathbf{r}) \chi_{d,m,g} C_m(\mathbf{r}, t) \right\rangle}{\left\langle W_g(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle} \quad (3.2.1.11)$$

$$\rho(t) = 1 + \frac{1}{F(t)} \left\langle W_g(\mathbf{r}) \left[\begin{array}{l} \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \varphi_g(\mathbf{r}, t) \\ + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right] \right\rangle \quad (3.2.1.12)$$

上式で定義した式を(3.2.1.4)式及び(3.2.1.5)式に代入すると、次式の一点炉動特性方程式を導出することが出来る。

$$\frac{d}{dt} P(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} P(t) + \sum_m \lambda_m C_m(t) \quad (3.2.1.13)$$

$$\frac{d}{dt} C_m(t) = \frac{\beta_m(t)}{\Lambda(t)} P(t) - \lambda_m C_m(t) \quad (3.2.1.14)$$

上記では、後述する改良準静近似法を考慮して、形状関数に時間依存性を含ませたが、一点炉近似の場合では形状関数を定常状態と同じと考えているので、時間依存性を全く考慮していない。そのため、実際の現象を適切に模擬することができない場合もある³⁾。

3.2.2 空間依存動特性方程式の数値解法の現状

本章の概要でも述べたように、現在までに空間依存動特性方程式の解法として様々な手法が開発されてきた。そこで本節では、現在までに開発されてきた動特性方程式について簡単に整理することを目的とする。

現在の動特性方程式の解法としては、直接法と因子化法の二つの種類に大別することができる。因子化法および直接法に分類されている数値解法を表 3.2.2 に示す。

表 3.2.2 空間依存動特性方程式の各種解法

因子化法	直接法
断熱近似法、準静近似法、改良準静近似法	完全陰解法、θ法、SCM法、周波数変換法

以下では、因子化法と直接法の違いについて述べる。

因子化法は前節の一点炉動特性方程式の導出で行ったように、中性子束を振幅関数と形状関数に分離し、振幅関数と形状関数を独立して計算する。従来の因子化法は、振幅関数は時間に対して強く依存し、形状関数は時間に対して弱く依存するか、全く依存しない。また、振幅関数は炉心全体の振幅を一点炉動特性方程式とで取扱うために計算コストが低く、形状関数は隣接メッシュや各エネルギー群のやりとりを考慮するために計算コストが高い。そのため因子化法では、振幅関数の計算時間幅(タイムステップ)を小さくし、形状関数のタイムステップを大きくすることで、計算精度を低下させることなく、高速に計算することを可能としている。しかし、中性子束を振幅関数と形状関数に分離するために、計算アルゴリズムが複雑になる。現在の因子化法の主流として、動特性方程式に対して近似を用いない改良準静近似法が多く用いられている^{1,4)}。ただし後述するが、振幅関数と形状関数を異なるタイムステップで計算するために、改良準静近似法は近似を暗に用いている。

一方、直接法は中性子束を振幅関数と形状関数を独立して計算することは行わず、(3.2.2)式の空間依存動特性方程式を直接取扱う。そのため因子化法のように、時間に強く依存する項と弱く依存する項を別々に取扱うことはできないので、直接法では、計算コストが高い拡散方程式を小さいタイムステップで計算しなければならない。このことから、因子化法に比べて、直接法は計算時間の観点からは劣る。しかし、周波数変換法^{5-7, 11)}や **Stiffness Confinement Method**⁸⁻¹⁰⁾では、中性子束の時間変化を指数関数的に変化するという仮定を用いることによって、粗タイムステップでも計算精度がある程度担保できるような工夫がなされており、現在の多くの炉心計算コードに採用されている⁵⁻¹¹⁾。詳細は後の節で述べるが、周波数変換法や **SCM** も因子化法のように、中性子束を時間に強く依存する項と時間に弱く依存する項に分離するが、それぞれの関数を独立して計算することを行わないために、本論文では直接法に分類している。また、直接法は空間依存動特性方程式を直接に取扱うために計算アルゴリズムが比較的単純であり、現在の炉心計算コードにおいては直接法が主流となっている⁴⁾。

直接法の中でも多くの計算方法が開発・適用されており、現在は、数値安定性が最も優れている完全陰解法または計算精度がある程度優れている θ 法に周波数変換法を組み合わせている炉心計算コードが多数ある^{5-7, 11)}。また、完全陰解法や θ 法よりもより高精度の計算で、他の分野でも用いられている、一般化ルンゲ・クッタ法を用いる動特性計算方法も注目されている¹³⁻¹⁶⁾。

3.2.3 各種数値時間積分法

本節では、次節以降の空間依存動特性方程式の数値解法について述べるまえに、時間依存方程式を計算するための各種数値積分法について述べる。

時間依存の方程式を計算するための方法として、様々な計算手法が開発されてきたが、大きく分けると、陽解法と陰解法の二種類に区別することが可能である。表 3.2.3.1 に陽解法と陰解法に区別した時の各種時間積分法を示す。

表 3.2.3.1 各種数値積分法の分類¹⁷⁾

陽解法	陰解法
オイラー法、古典的ルンゲ・クッタ法、 アダムス・バッシュフォース法	後退オイラー法、陰的ルンゲ・クッタ法、 アダムス・モルトン法

表 3.2.3.1 に表記している後退オイラー法は、炉物理分野では通例として、完全陰解法と呼ばれている場合が多い^{5,13,18,19)}。

古典的ルンゲ・クッタ法は、一般的に知られている 4 次のルンゲ・クッタ法であり、陰的ルンゲ・クッタ法は計算精度及び数値安定性が優れている代わりに、数値積分計算を行う際に計算コストが多いので、大規模な計算には適用しにくい¹⁷⁾。そのため、陰的ルンゲ・クッタ法の優れた数値安定性を確保しつつ、計算コストを低減した半陰的ルンゲ・クッタ法が用いられる場合がある。半陰的ルンゲ・クッタ法の中でも特に有名であるのが、Kaps-Rentop-Shampine 法であり、SPANDEX¹³⁾のような実際の炉心計算コードにも採用されている。また、炉物理分野では Generalized Runge-Kutta と呼ばれる手法が、本手法を指す場合が多い¹³⁻¹⁵⁾。

アダムス・バッシュフォース法及びアダムス・モルトン法は通常、予測子・修正法として用いられ、それぞれ次数は 4 次のものが多く採用されている¹⁷⁾。以下では、陽解法及び陰解法の数値的説明を行なった後に、ルンゲ・クッタ法と多段階法の違いについて述べる。

まず初めに、次式の微分方程式について考える。

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = F(\vec{y}, t) \quad (3.2.3.1)$$

上式のオイラー法で時間微分を近似する場合には、上式を次式に近似する。

$$\frac{\vec{y}(t_{n+1}) - \vec{y}_n}{h} = F(\vec{y}_n, t_n) \Leftrightarrow \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + hF(\vec{y}_n, t_n) \quad (3.2.3.2)$$

ここで、時刻 t_n の \vec{y}_n は既知であるために、未知数 \vec{y}_n は(3.2.3.2)式から直ぐに計算を行うことが可能である。このように、(3.2.3.2)式の右辺に未知数を含まず \vec{y}_{n+1} がような形で

計算できる解法を陽解法という。陽解法概念図を図 3.2.3.1 に示す。

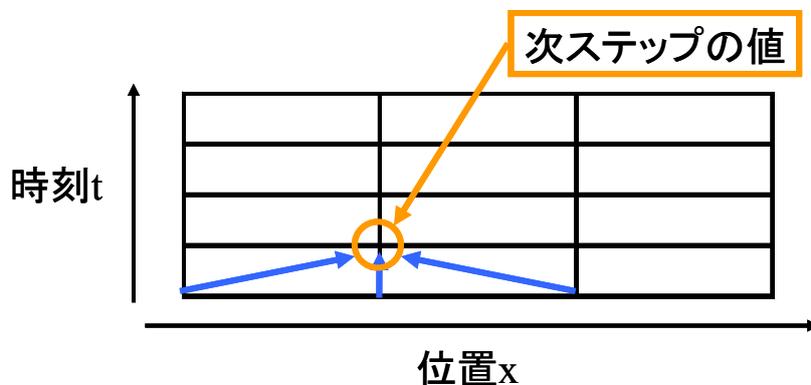


図 3.2.3.1 陽解法概念図

一方、(3.2.3.1)式を陰解法の代表例である、後退オイラー法で時間微分を離散化する場合に次式になる。

$$\frac{\bar{y}(t_{n+1}) - \bar{y}_n}{h} = F(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1}) \Leftrightarrow \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + hF(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (3.2.3.3)$$

(3.2.3.3)式は陽解法の式とは異なり、右辺に未知数 \bar{y}_{n+1} が含まれている。そのため、(3.2.3.3)式を次式のように変形すると、後退オイラー法は左辺が未知数であり右辺が既知である、連立一次方程式に帰着できることが分かる。

$$\bar{y}_{n+1} - hF(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1}) = \bar{y}_n \quad (3.2.3.4)$$

図 3.2.3.2 に陰解法概念図を示す。

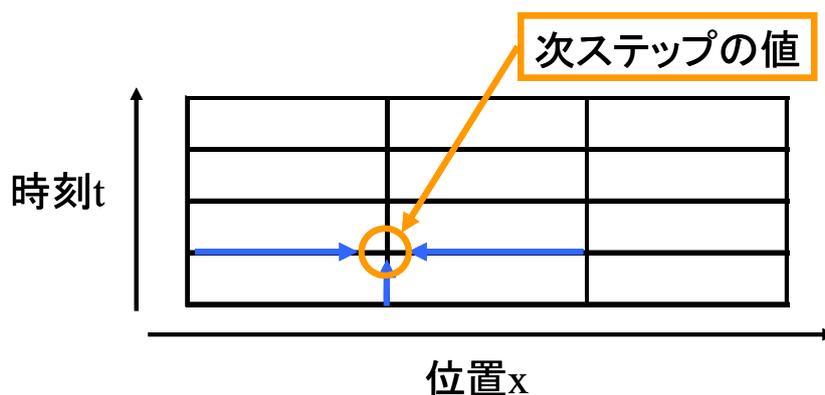


図 3.2.3.2 陰解法概念図

図 3.2.3.2 を見ると、陰解法は時刻 t_{n+1} における空間的なバランスを計算していると考え

られる。このことから陰解法のイメージとしては、 t_{n+1} における平衡状態の方程式をたて、この平衡状態の方程式を満足する \bar{y}_{n+1} を計算によって求める方法であるといえる。したがって陰解法は、原子炉の解析において非常に重要なフィードバックの考慮を陽的に行えていることになり、このような非線形方程式では陰解法系統の手法が効果を発揮する場合が多い¹⁷⁾。しかし陰解法の欠点としては、タイムステップ毎に連立方程式を計算する必要があることから、タイムステップ毎の計算コストが陽解法に比べて大きいということが挙げられる。次に陽解法と陰解法の数値安定性について言及する。

数値安定性を考えるために、次式の簡易的な動特性方程式について考える。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + Q(t) \quad (3.2.3.5)$$

(3.2.3.5)式に対して、時間微分をオイラー法で空間微分を中心差分で近似を行い、行列形式で表記すると次式になる。

$$\vec{\phi}(t_n + 1) = \mathbf{A} \vec{\phi}(t_n) + \vec{b}(t_n) \quad (3.2.3.6)$$

(3.2.3.6)式の式は以前の時間の値を用いて、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(t_n) &= \mathbf{A} \vec{\phi}(t_{n-1}) + \vec{b}(t_{n-1}) \\ &= \mathbf{A} (\mathbf{A} \vec{\phi}(t_{n-2}) + \vec{b}(t_{n-2})) + \vec{b}(t_{n-1}) \\ &= \dots = \mathbf{A}^{t_n} \phi(t_0) + (\mathbf{A}^{t_n-1} \vec{b}(t_0) + \mathbf{A}^{t_n-2} \vec{b}(t_1) + \dots + \vec{b}(t_{t_n-1})) \end{aligned} \quad (3.2.3.7)$$

いま、行列 \mathbf{A} の固有値を λ_i に対応する固有ベクトル \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$)とし、初期ベクトル $\vec{\phi}(t_0)$ を次式のように展開する。

$$\vec{\phi}(t_0) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (3.2.3.8)$$

ここで、

α_i : 展開係数

である。

(3.2.3.8)式の展開を用いると、(3.2.3.7)式中の $\mathbf{A}^{t_n} \vec{\phi}(t_0)$ の項は次式になる。

$$\mathbf{A}^{t_n} \vec{\phi}(t_0) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \mathbf{A}^{t_n} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \lambda_i^{t_n} \mathbf{v}_i \quad (3.2.3.9)$$

これより、もし初期ベクトル $\vec{\phi}(t_0)$ 中に誤差が含まれていた場合には、 t_n においては以

下の状況が考えられる。

- 全ての i に対して $|\lambda_i| \leq 1$ ならば、初期誤差は拡大しない
- ある i に対して $|\lambda_i| > 1$ ならば、初期誤差は t_n につれて拡大していく

このことから、前者の場合には解は安定になり、後者の場合には不安定になる。

詳細は Appendix にて述べているが、行列 \mathbf{A} の固有値は解析的に次式で与えられている。

$$\lambda_l = 1 - 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M} \quad (l = 1, 2, \dots, M-1) \quad (3.2.3.10)$$

ここで、

$$r = v \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \quad (3.2.3.11)$$

である。

この固有値は全て 1 以下であるから、安定であるためには、最小の固有値が -1 以上であればよい。最小固有値は $1 - 4r \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M}$ であるから、これを $1 - 4r$ と近似すると、以下の二つの条件を得ることができる。

- $1 - 4r \geq -1$ 、すなわち $r = v \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ のとき、陽解法は安定
- $1 - 4r < -1$ 、すなわち $r = v \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$ のとき、陽解法は不安定

このことより陽解法の数値不安定性は、タイムステップ幅及びメッシュ幅に依存し、タイムステップが大きい又は、メッシュ幅が小さい時は不安定になることが分かる。

一方、詳細は省略するが、後退オイラー法の係数行列の固有値は次式で与えられている²⁰⁾。

$$\lambda_l = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M}} \quad (l = 1, 2, \dots, M-1) \quad (3.2.3.12)$$

上式より、後退オイラー法の場合は固有値 λ_l が必ず $\lambda_l < 1$ となるために、任意のタイムステップ幅やメッシュ幅に対して安定であることが分かる。

原子炉物理学における動特性方程式は、中性子速度が非常に大きいために、絶対値最大の固有値の値は非常に大きい。そこで、動特性解析には計算コストが高い陰解法を用いることによってタイムステップ幅をある程度大きくした方が、陽解法で詳細なタイムステップ幅で計算するよりも高速に計算できるために、陰解法系統の数値計算方法を用

いるのが一般的である。次節では、動特性方程式に用いられる陰解法として θ 法についての言及を行う。

次に多段階法とルンゲ・クッタ法の違いについて述べる。多段階法及びルンゲ・クッタ法は、共に計算精度を向上させるために、現ステップの中性子束 $\phi(t_n)$ と次ステップの中性子束 $\phi(t_{n+1})$ 以外の中性子束を用いる。しかし、多段階法とルンゲ・クッタ法では用いる中性子束の時刻が異なる。多段階法及びルンゲ・クッタ法の概念図を図 3.2.3.3 及び 3.2.3.4 に示す。

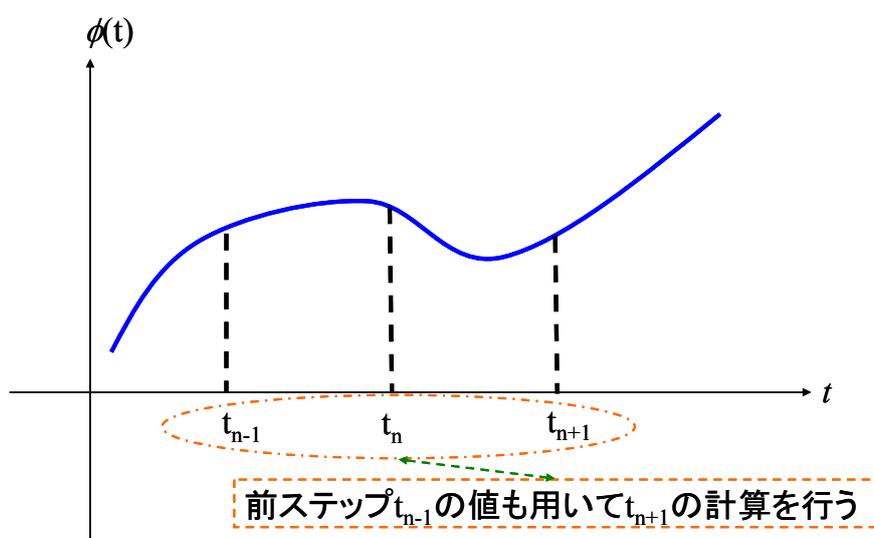


図 3.2.3.3 多段階法の概念図

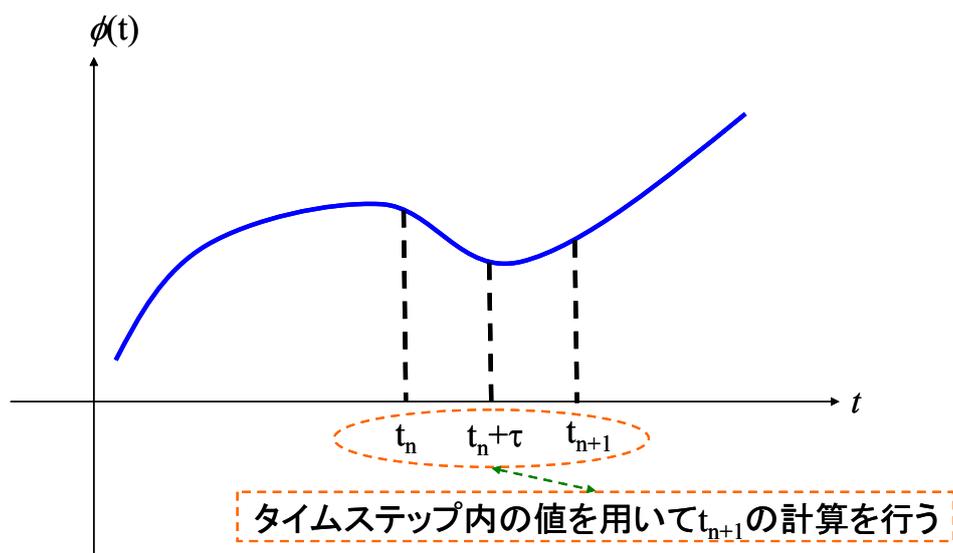


図 3.2.3.4 ルンゲ・クッタ法の概念図

図 3.2.3.3 より多段階法は、計算精度を向上させるために、以前の時刻の値を用いることで計算精度を向上させることを試みていることが分かる。一方、図 3.2.3.4 のルンゲ・クッタ法では、計算精度を向上させるために、タイムステップ内の中性子束を逐次計算することで計算精度を向上させていることが分かる。

計算コストの観点からいえば、タイムステップ内の関数を逐次計算するルンゲ・クッタ法よりも、前ステップの値をそのまま用いることができる多段階法の方が優れている。一方、計算精度の観点から言えば、タイムステップ内の関数を逐次評価するルンゲ・クッタ法の方が優れている。多段階法では、関数が滑らかに変化しない場合は低次の数値計算法よりも却って精度が低下する場合がある¹⁷⁾。そのため、高次の多段階法を用いる場合には注意が必要である。

3.3 θ 法

3.3.1 θ 法の概要

θ 法は、パラメータ θ を変更することにより、以下の 3 種類の計算方法に大別される。

- $\theta=0$: 陽解法
- $\theta=0.5$: クランク・ニコルソン法
- $\theta=1$: 完全陰解法

上記のように θ 法は、 θ の値を変更することで様々な計算方法に変更できるために、 θ 法は動特性解析手法として、現在の炉心計算コードに多く採用されている^{5,6)}。

3.3.2 θ 法の基礎式の導出

以下では、 θ 法の導出を簡略化するために、次式のように空間依存動特性法手式を簡略化して表記する。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = R_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.3.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_g(\mathbf{r}, t) = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.2.3.2)$$

である。

(3.2.3.1)式は左辺に時間微分項を含んでいるために、計算機で直接計算することは困難である。そのため θ 法では、(3.2.3.1)式を次式のように近似的に取扱う。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \approx \theta R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) + (1 - \theta) R_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.3.3)$$

以下では、 θ 法を実際の炉心計算コードに実装するための式変形を行う。まず初めに、左辺に次ステップ、右辺に既知の関数を移行する。

$$\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)}{v_g \Delta t} - \theta R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) = (1 - \theta) R_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{v_g \Delta t} \quad (3.2.3.4)$$

(3.2.3.4)式の両辺を θ で除算する。

$$\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)}{\theta v_g \Delta t} - R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) R_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} \quad (3.2.3.5)$$

(3.2.3.5)式の $R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ を具体的に展開する。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\ & + \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \right] \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\ & - \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} P(t + \Delta t) \\ & - \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) R_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} \end{aligned} \quad (3.2.3.6)$$

ここで、

$$P(t + \Delta t) = \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \quad (3.2.3.7)$$

である。

詳細は、3.7節の遅発中性子先行核密度の計算方法で述べるが、遅発中性子先行核は次式で計算されることが多い。

$$C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \mu_m C_m(\mathbf{r}, t) + \eta_m P(t) + \xi_m P(t + \Delta t) \quad (3.2.3.8)$$

(3.2.3.8)式を(3.2.3.6)式に代入すると次式に整理することが出来る。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\ & = \chi'_{p,g} P(t + \Delta t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) + Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.2.3.9)$$

ここで、

$$\Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \right] \quad (3.2.3.10)$$

$$\chi'_{p,g} = \chi_{p,g}(1 - \beta_{eff}) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m \xi_m \quad (3.2.3.11)$$

$$Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (\mu_m C_m(\mathbf{r}, t) + \eta_m P(t)) + \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) R_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} \quad (3.2.3.12)$$

である。

(3.2.3.9)式に注目すると、修正した除去断面積、核分裂スペクトル及び中性子源を用いることによって、 θ 法で差分化した動特性方程式は固定源問題と同じ式になっていることが確認できる。そのため陰解法システムを用いた場合、動特性方程式を計算するということは、固定源問題を計算することに帰着する。このことから、炉心計算コードに動特性計算機能を付加する場合は、既存の固定源問題のルーチンに修正した断面積を与えることによって、計算することが可能となる。以下では、(3.2.3.12)式の $R(\mathbf{r}, t)$ の計算方法について述べる。

$R(\mathbf{r}, t)$ は既知の項であるために、(3.2.3.2)式をそのまま計算すればよい。しかし、(3.2.3.2)式の右辺第一項は中性子流の項であり、隣接メッシュの参照を行うことや、外部境界条件を考慮するために例外処理を行う必要がある。しかし、このような処理を計算機上で行うと計算速度や並列計算する場合に不都合がおこることが考えられる。そこで参考文献 5)に基づき、(3.2.3.2)式に対して式変形を用いることで、上記の問題が起らない $R(\mathbf{r}, t)$ の計算方法について述べる。

一つ前のステップの θ 法で差分化した動特性方程式は次式である。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) + \Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & = \chi'_{p,g} P(t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (3.2.3.13)$$

(3.2.3.13)式を拡散の項について整理すると次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) = -\Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \chi'_{p,g} P(t) \\ & \quad + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (3.2.3.14)$$

(3.2.3.14)式を(3.2.3.2)式に代入し、整理すると次式を得る。

$$R_g(\mathbf{r}, t) = \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (C_m(\mathbf{r}, t) - \xi_m P(\mathbf{r}, t)) - Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t - \Delta t) \quad (3.2.3.15)$$

(3.2.3.15)式に注目すると拡散の項が消滅しており、先に述べた問題を回避しつつ θ 法で計算できることが分かる。

3.3.3 θ 法の特徴

θ 法の概要でも述べたように、 θ 法はパラメータ θ を変更することで様々な計算手法と等価になる。特に $\theta=0.5$ の時、クランク・ニコルソン法と呼ばれる。陰解法の計算精度がタイムステップ幅に対して1次であるのに対して、クランク・ニコルソン法の計算精度は2次であるために、高い計算精度を有する。以下では、陰解法の計算精度が1次であり、クランク・ニコルソン法の計算精度が2次である証明を行う。

空間に関して差分化した動特性方程式に対して行列形式を用いると、次式で表現することができる。

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{\psi}(t) \quad (3.2.3.16)$$

ここで、

$\vec{\psi}(t)$: 各メッシュの中性子束及び遅発中性子先行核からなるベクトル

$\mathbf{A}(t)$: 動特性方程式の係数行列

である。

(3.2.3.16)式の係数行列 $\mathbf{A}(t)$ の時間依存性を無視すると、(3.2.3.16)式は解析的に計算することができ、次式の解析解が得られる。

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp(\Delta t \mathbf{A}) \vec{\psi}(t) \quad (3.2.3.17)$$

(3.2.3.17)式の右辺には、指数部に行列がある形になっており、この項を指数行列または行列の指数関数(Matrix Exponential)という。指数行列の性質及び計算方法については次章や Appendix について詳細に言及するが、指数行列の近似計算方法として、次式の有理多項式を用いた Padé 近似法がある。

$$\exp(\Delta t \mathbf{A}) \approx [D_{pq}(\Delta t \mathbf{A})]^{-1} N_{pq}(\Delta t \mathbf{A}) \quad (3.2.3.18)$$

ここで、

$$D_{pq}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)! p!}{(p+q)! j! (p-j)!} (-\mathbf{A} \Delta t)^j \quad (3.2.3.19)$$

$$N_{pq}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)! p!}{(p+q)! j! (p-j)!} (\mathbf{A} \Delta t)^j \quad (3.2.3.20)$$

である。

Padé 近似の[0,1]次展開して(3.2.3.17)式を計算した式を(3.2.3.21)式に示し、[1,1]展開を(3.2.3.22)式に示す。

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A}} \vec{\psi}(t) \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A}) \vec{\psi}(t + \Delta t) = \vec{\psi}(t) \quad (3.2.3.21)$$

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A}}{\mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A}} \vec{\psi}(t) \quad (3.2.3.22)$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A} \right) \vec{\psi}(t + \Delta t) = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A} \right) \vec{\psi}(t)$$

Padé 近似の展開の結果、(3.2.3.21)及び(3.2.3.22)式はそれぞれ、完全陰解法とクランク・ニコルソン法に対応していることが分かる。参考文献 21)より、Padé 近似の打ち切り誤差は $O(x^{p+q+1})$ であるので、完全陰解法の誤差は $O(x^2)$ 、クランク・ニコルソン法の誤差は $O(x^3)$ となる。このことから、クランク・ニコルソン法は時間に対して2次の精度を有し、完全陰解法より数学上、高精度であることを示した。

上記のことより、計算精度を向上させたい場合は θ 法において $\theta=0.5$ とすればよい。しかし、必ずしも $\theta=0.5$ の時のクランク・ニコルソン法が万能というわけではない。ステップ状のように強い反応度が瞬間的に投入される場合には、図 3.3.2.1 のように、クランク・ニコルソン法では解が時間と共に振動してしまう現象があり、計算精度が著しく低下する場合がある。

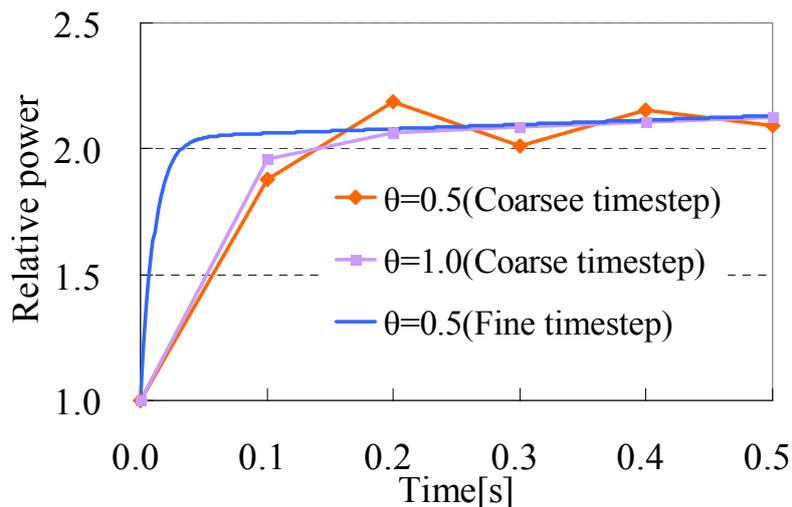


図 3.3.2.1 クランク・ニコルソン法の振動現象
(解析対象：TWIGL ベンチマーク問題²²⁾：ステップ状)

そのため、この振動現象を抑制するために、精度あまり高くない完全陰解法をあえて採用する場合もある²³⁾。また、 θ 法は計算精度が θ の値に大きく依存するために θ の値を固定するのではなく、逐次に θ の値を評価をする場合もある。

3.4 周波数変換法

3.4.1 周波数変換法の概要

前節の θ 法とは異なり、周波数変換法は動特性方程式を差分化する方法ではなく、解くべき動特性方程式を変形することで、粗タイムステップでも比較的精度よく計算を行うことを試みている手法である。周波数変換法の特徴上、中性子束が時間に対して指数関数上に変化する場合は精度よく計算を行えるため、現在の炉心計算コードで広く採用されている^{5-7,11)}。

3.4.2 周波数変換法の基礎式の導出

周波数変換法の導出を行う前に、まず初めに一点炉動特性方程式の解析解について考える。先に導出した一点炉動特性方程式の(3.2.1.13)及び(3.2.1.14)式の解析解は、一般的に得るのが困難である。そのため、一点炉動特性方程式の係数の時間依存性を便宜的に無視すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda}P(t) + \sum_m^M \lambda_m C_m(t) \quad (3.4.2.1)$$

$$\frac{d}{dt}C_m = \frac{\beta_m}{\Lambda}P(t) - \lambda_m C_m(t) \quad (3.4.2.2)$$

(3.4.2.1)及び(3.4.2.2)式の連立微分方程式は解析的に計算することができ、中性子束に関する解析解は、次式のような指数関数の重ね合わせで表現することが可能である。

$$P(t) = \sum_{i=1}^{M+1} A_i \exp(w_i t) \quad (3.4.2.3)$$

以上のことから、中性子束の時間依存性は指数関数を用いて表現できることが分かった。周波数変化法では、中性子束の時間変化が指数関数状であることを利用して、中性子束を以下のように分離することを行っている。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \exp(w(\mathbf{r}, t)t) \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (3.4.2.4)$$

ここで、

$\exp(w(\mathbf{r}, t)t)$: 時間に対して強く依存する項

$\tilde{\phi}(\mathbf{r}, t)$: 時間に対して弱く依存する項

$$w(\mathbf{r}, t) : \text{周波数} \left(w(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\phi(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \quad (3.4.2.5)$$

である。

(3.4.2.4)式のように周波数変換法では、中性子束の時間依存性で指数関数状であると仮定することで、粗タイムステップを用いても計算精度が保つ試みが行われている。以下では、実際の周波数変換法を用いた動特性方程式に対して、 θ 法で離散化した場合の実装方法について言及する。

空間依存動特性方程式(3.2.3.1)式に、周波数変換法の基礎式である(3.4.2.4)式を代入すると次式を得る。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \exp(w_g(\mathbf{r}, t)t) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = R_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.4.2.6)$$

(3.4.2.5)式の周波数の定義式は、計算機で直接計算するのは困難であるために、通常、次式のタイムステップの平均値を近似的に用いる。

$$w_g(\mathbf{r}, t) \approx \bar{w}_g(\mathbf{r}) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} w_g(\mathbf{r}, t') dt'}{\Delta t} \quad (3.4.2.7)$$

(3.4.2.7)式を実際に計算すると次式になる。

$$\begin{aligned} \bar{w}_g(\mathbf{r}) &= \frac{\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \ln(\phi_g(\mathbf{r}, t')) dt'}{\Delta t} = \frac{[\ln(\phi_g(\mathbf{r}, t'))]_t^{t+\Delta t}}{\Delta t} \\ &= \frac{\ln(\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)) - \ln(\phi_g(\mathbf{r}, t))}{\Delta t} = \frac{\ln(\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) / \phi_g(\mathbf{r}, t))}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.4.2.8)$$

このことから、(3.4.2.8)式は時間依存性を有しておらず、上記の周波数の計算方法ではタイムステップ内の周波数の変化を無視していることになる。そのため、(3.4.2.6)式は次式に変形できることになる。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(R_g(\mathbf{r}, t) - \frac{w_g(\mathbf{r})}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \right) \exp(-w_g(\mathbf{r})t) \quad (3.4.2.9)$$

θ 法を用いて(3.4.2.9)式を時間に対して差分化する。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_g} \frac{\tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \\
&= \theta \left(R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \frac{w_g(\mathbf{r})}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \right) \exp(-w_g(\mathbf{r})(t + \Delta t)) \quad (3.4.2.10) \\
&+ (1 - \theta) \left(R_g(\mathbf{r}, t) - \frac{w_g(\mathbf{r})}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \right) \exp(-w_g(\mathbf{r})t)
\end{aligned}$$

(3.4.2.10)式の両辺に $\exp(w_g(\mathbf{r})(t + \Delta t))$ を乗算し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\theta v_g \Delta t} + \frac{w_g(\mathbf{r})}{v_g} \right) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\
&= \left[\left(\frac{1}{\theta v_g \Delta t} - \frac{w_g(\mathbf{r})}{v_g} \right) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) (R_g(\mathbf{r}, t)) \right] \exp(w_g(\mathbf{r})\Delta t) \quad (3.4.2.11)
\end{aligned}$$

ここで、(3.4.2.11)式の左辺の周波数 $w_g(\mathbf{r})$ と右辺の周波数 $w_g(\mathbf{r})$ に注目すると、変数に時間がないために、同じ時刻の周波数を用いればよいように思える。実際に PARCS コード⁶⁾では両辺の周波数に同時刻の周波数を用いている。しかし、 θ 法の離散化手法を厳密に考えるならば、(3.4.2.11)式の左辺と右辺での用いるべき周波数の時刻は異なるはずである。そこで、次ステップの周波数を $w_g^{t+\Delta t}(\mathbf{r})$ とし、前ステップの周波数を $w_g^t(\mathbf{r})$ とすると、 θ 法に基づいた周波数変換法は正しくは次式になる。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\theta v_g \Delta t} + \frac{w_g^{t+\Delta t}(\mathbf{r})}{v_g} \right) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - R_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\
&= \left[\left(\frac{1}{\theta v_g \Delta t} - \frac{w_g^t(\mathbf{r})}{v_g} \right) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) (R_g(\mathbf{r}, t)) \right] \exp(w_g(\mathbf{r})\Delta t) \quad (3.4.2.12)
\end{aligned}$$

なお、この式の方法を採用している炉心計算コードとしては、SCOPE2 コードがある⁵⁾。本研究では、(3.4.2.11)及び(3.4.2.12)式の二種類の周波数変換法の実装を行い、計算精度を比較した結果、周波数の時間依存性を考慮した(3.4.2.12)式の方が高精度であることが分かっている。

(3.4.2.12)式を展開し、整理すると最終的に次式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
& -\nabla D_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\
&= \chi'_{p,g} P(t + \Delta t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) + Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t) \quad (3.4.2.13)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) + \frac{w_g^{t+\Delta t}(\mathbf{r})}{v_g} + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \right] \quad (3.4.2.14)$$

$$\chi'_{p,g} = \chi_{p,g}(1 - \beta_{eff}) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m \xi_m \quad (3.4.2.15)$$

$$Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (\mu_m C_m(\mathbf{r}, t) + \eta_m P(t)) \\ + \exp(w_g(\mathbf{r}) \Delta t) \left[\left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) R_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} \right] \quad (3.4.2.16)$$

$$R_g(\mathbf{r}, t) = \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{\theta v_g \Delta t} + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (C_m(\mathbf{r}, t) - \xi_m P(\mathbf{r}, t)) \\ - Q_{ex,g}(\mathbf{r}, t - \Delta t) \quad (3.4.2.17)$$

である。

θ 法の式と同様に、(3.4.2.13)式より、周波数変換法に対して θ 法を用いた動特性方程式も固定源問題に帰着できることを確認した。また、(3.4.2.14)~(3.4.2.17)式より、周波数変換法に θ 法を適用した式は、 θ 法の式と似たような式であり、比較的容易に実装することが可能である。また、周波数の値をゼロとすると、従来の θ 法と等価になる。

上記で言及した周波数変換法は、最終的に中性子束についての式を導出した。一方で(3.4.2.4)式より、時間に対して弱く依存する項についての式を導出することも可能であり、AETNAコードが採用している⁷⁾。なお本研究では、以下の理由から中性子束についての式である(3.4.2.13)式を採用することにする。

中性子束についての式を用いることによって、反復に伴い次ステップの周波数を評価し直すことが可能となる。そのため、外部反復毎に周波数を更新することで、次式に示す周波数変換法の見かけ上の時間微分値を小さくすることが可能である。

$$\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t) \exp(w_g(\mathbf{r}) t)}{\Delta t} \quad (3.4.2.18)$$

見かけ上の微分値が小さくなるということは、時間差分化に伴う誤差を小さくすることができ、結果として、計算精度を向上する可能性がある。また、中性子束についての式を用いることにより、従来から炉心計算の精度向上に大きく寄与している不連続因子⁶⁾を直接用いることができるメリットもある。以上のことから、本研究では中性子束についての式を周波数変換法として用いることにする。なお、外部反復毎に周波数を再評価しなおし、見かけ上の時間微分項を小さくするという試みは、後述するSCMと同様である。

3.4.3 周波数変換法の特徴

周波数変換法の詳細について上述してきたが、周波数変換法は以下の大きな仮定を用いている。

1. 中性子束が時間に対して単項の指数関数状に変化している
2. タイムステップ内における周波数の時間依存性を考慮していない

これらのことから、周波数変換法は必ずしも万能ではなく、計算条件によってはかえって計算精度が θ 法よりも低下する場合がある。以下では、上記の二つの大きな仮定について言及する。まず初めに、1.について検討を行う。

簡単のために以下では、一点炉動特性方程式を用いて考える。一点炉動特性方程式の解析解である(3.4.2.3)式は、指数関数の重ね合わせであった。また、他領域とのやりとりを考慮した、二点炉動特性方程式の解析解も指数関数の重ね合わせである²⁴⁾。そのため、実際の中性子束の時間変化は指数関数の重ね合わせであることが考えられる。しかし周波数変換法では、指数関数の重ね合わせを次式のように、単項の指数関数で近似している。

$$P(t) = \sum_{i=1}^{M+1} A_i \exp(w_i t) \approx C \exp(\omega t) \quad (3.4.2.19)$$

このことから、即発臨界のように即発中性子のみが中性子束の時間変化にほぼ寄与すると考えられる場合もしくは、安定ペリオドで変化する場合、周波数変換法の計算精度はよい。しかし、図 3.3.2.1 のように中性子束の時間依存性が即発中性子から遅発中性子先行核に移行する時は、本来ならばこれらの二つの周波数について考慮しなければならないが、周波数変換法ではこれらを正確に考慮しないために、 θ 法よりも計算精度が低下する問題がある。そのため、周波数変換法を用いることで、必ずしも計算精度が向上するとは限らない。なお、計算精度の比較は、6章の検証計算で確認を行う。次にタイムステップ内における、周波数の時間依存性について述べる。

タイムステップ内の周波数の時間依存性を考えるために、詳細タイムステップで計算した場合と、粗タイムステップで計算した場合の周波数の時間依存性を図 3.4.3.1 に示す。

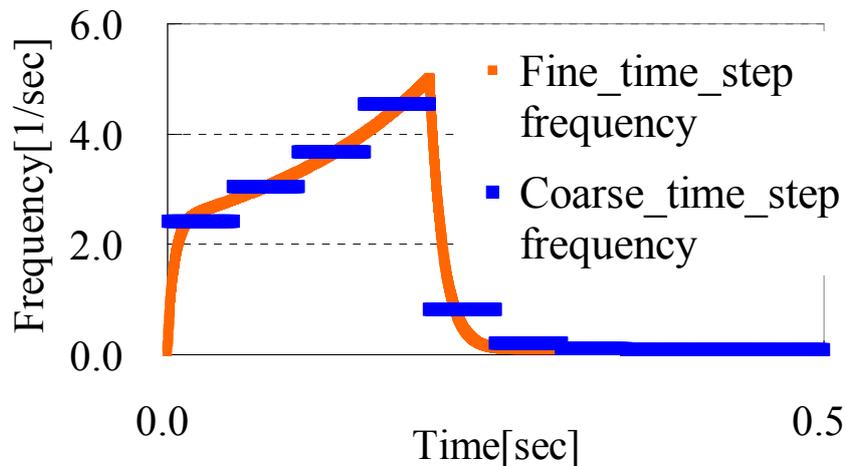


図 3.4.3.1 周波数の時間依存性
(計算体系：TWIGL ベンチマーク：ランプ状)

図 3.4.3.1 より、詳細タイムステップの場合、周波数はほぼ連続的に変化しているのに対して、粗タイムステップの場合、周波数は離散的に変化していることを確認できる。この周波数の離散的な変化の原因は、(3.4.2.7)式より、タイムステップ内で周波数が一定であるという仮定を暗に用いていることが挙げられる。そのため、タイムステップ幅が大きくなった場合は、周波数の離散化誤差が大きくなり、結果として、中性子束の計算精度も低下する可能性がある。そこで本研究では、タイムステップ内の周波数の時間依存性をより正確に考慮した、周波数関数近似法を新たに開発した。この周波数関数近似法については、次章で述べる。

3.5 Stiffness Confinement Method

3.5.1 Stiffness Confinement Methodの概要

周波数変換法と同様に、本手法も中性子束の時間変化が指数関数状で変化するという仮定を用いている。しかし、周波数変換法と異なる点としては、中性子束と遅発先行核密度の動的周波数を用いていることで、時間依存の方程式を定常状態の方程式に帰着させている。本手法を採用している炉心計算コードとしては、SPNOVA-K⁹⁾や ANCK¹⁰⁾などがある。

3.5.2 Stiffness Confinement Methodの基礎式の導出

Stiffness Confinement Method(SCM)を導出するために、以下の二つの動的周波数を定義する。

$$w_{p,g}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\phi_g(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.5.2.1)$$

$$w_{d,m}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{C_m(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.5.2.2)$$

(3.5.2.2)式を遅発中性子先行核密度の式である(3.2.2)式に代入し整理すると、次式を得ることができる。

$$C_m(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_m}{w_{d,g}(\mathbf{r}, t) + \lambda_m} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5.2.3)$$

(3.5.2.3)式を中性子束に関する式である(3.2.1)式に代入し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) + \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{w_{p,g}(\mathbf{r}, t)}{\nu_g} \right] \phi_g(\mathbf{r}, t) = \\ & + \left[(1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} + \sum_m \frac{\chi_{d,m,g} \lambda_m \beta_m}{w_{d,m}(\mathbf{r}, t) + \lambda_m} \right] \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_{\substack{s,g' \rightarrow g \\ g' \neq g}} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.5.2.4)$$

さらに、除去断面積、核分裂スペクトルを次式のように補正する。

$$\Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t) = \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{w_{p,g}(\mathbf{r}, t)}{\nu_g} \quad (3.5.2.5)$$

$$\chi'_{p,g} = \left[(1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} + \sum_m \frac{\chi_{d,m,g} \lambda_m \beta_m}{w_{d,m}(\mathbf{r}, t) + \lambda_m} \right] \quad (3.5.2.6)$$

上式で補正した式を用いると、SCM の最終的に次式になる。

$$\begin{aligned} & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) + \Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & = \chi'_{p,g} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{\substack{s,g' \rightarrow g \\ g' \neq g}} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.5.2.7)$$

(3.5.2.7)式より、空間依存動特性方程式に SCM を用いると、最終的に実効増倍率が1の時と固有値計算の式と等価になる。そのため、SCM は定常状態の固有値問題のルーチンをそのまま用いることが可能であり、他の動特性計算手法とは異なる計算方法で時間積分を行う。また、SCM は一点炉動特性方程式の数値解法としても用いられている場合がある⁸⁾。なお、参考文献 10)では本論文とは異なり、核分裂断面積に補正を加えて

SCM の計算を行っているが、本論文では、即発中性子と遅発中性子先行核のスペクトルの違いを考慮するために、上述のような補正を行なった。以下では、SCM の計算方法について言及する。

空間依存動特性方程式に対して SCM を用いることで、定常状態の固有値問題に帰着させることができた。

$$\begin{aligned}
 & -\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) + \Sigma'_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\
 & = \frac{\chi'_{p,g}}{k} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{3.5.2.8}$$

SCM では(3.5.2.8)式の見かけ上の固有値 k を 1 になるように中性子束の収束を行っていく。ここで問題となるのが、通常固有値計算では中性子束の絶対値を計算するのではなく、相対値を計算するという点である。しかし、動特性計算で計算したいのは、絶対値である。そのため、SCM 法では動的周波数を次式のように、shape part と amplitude part に成分を分解する。

$$w(\mathbf{r}, t) = w_s(\mathbf{x}, t) + w_a(t) \tag{3.5.2.9}$$

Shape part は $w_s(\mathbf{x}, t)$ を(3.5.2.8)式の中性子束が常に規格化されるように反復を行って決定し、固有値が 1 から差異がある場合にはこれをペリオドに換算し、その逆数を $w_a(t)$ に加算することで、中性子束の高さを決定する。そして、固有値が 1 に収束するまでこの手順を繰り返し行う。

3.5.3 Stiffness Confinement Method の特徴

上述したが、SCM は他の手法とは異なり、最終的に固有値問題に帰着する動特性計算手法であり、非常に興味深い手法である。しかし、SCM は周波数変換法と同様に、中性子束の時間依存性を単項式の指数関数で近似している。そのため、中性子束の時間変化が指数関数状に変化しない場合には、計算精度が低下すると考えられる。

3.6 改良準静近似法

3.6.1 改良準静近似法の概要

上述した θ 法、周波数変換法、SCM は直接法であった。一方、本節では、空間依存動特性方程式を振幅関数と形状関数に分離し、それぞれの関数を独立して計算を行う因子化法について言及する。現在の炉心計算コードで採用されている因子化法としては、導出に近似を用いていない改良準静近似法が用いられている。改良準静近似法では、時間依存性が強く計算コストが低い振幅関数を詳細なタイムステップで計算を行い、時間依存性が弱く計算コストが高い形状関数を粗いタイムステップで計算することで、計算精度を低下させることなく高速に計算することが可能である。

3.6.2 改良準静近似法の基礎式の導出

改良準静近似法の基礎式は、本章の3.2.1節の一点炉動特性方程式で導出を行なった、(3.6.2.1)及び(3.6.2.2)式の振幅関数と、(3.2.1.2)式の両辺を振幅関数 $P(t)$ で除算した(3.6.2.3)式である。

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)}P(t) + \sum_m \lambda_m C_m(t) \quad (3.6.2.1)$$

$$\frac{d}{dt}C_m(t) = \frac{\beta_m(t)}{\Lambda(t)}P(t) - \lambda_m C_m(t) \quad (3.6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\varphi_g(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi_g(\mathbf{r}, t) \\ &- \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{v_g} \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} \right] \varphi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ &+ (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{P(t)} \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.6.2.3)$$

また、改良準静近似法の形状関数は、以下の規格化条件が課せられる。

$$\left\langle W_g(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \varphi_g(\mathbf{r}, t) \right\rangle = const. \quad (3.6.2.4)$$

一点炉動特性方程式の節でも述べたが、(3.6.2.1)式の係数や(3.6.1.4)式の重み関数 $W(\mathbf{r})$ には、 λ モードの随伴方程式を用いることが一般的である²³⁾。しかし、小林氏による研究²⁾では ω モードの随伴方程式を用いることで、計算精度が向上することが示されている。

改良準静近似法の形状関数である(3.6.2.3)式に注目すると、通常の時間依存拡散方程式と類似していることに気付く。しかし、時間依存拡散方程式とは異なり、(3.6.2.3)式には、振幅関数の時間変化を考慮する項が追加されており、また遅発中性子先行核も振幅関数で除算されている。このため、(3.6.2.3)式は中性子束の相対的な時間変化を表すものであり、まさに、中性子束分布の形状のみを表す式である。以上が、改良準静近似法の導出であるが、改良準静近似法が分類される因子化法には、その他の手法として断熱近似と準静近似がある。現在の炉心解析には、断熱近似と準静近似はあまり用いられていないが、動特性解法の歴史的な意味からもこれら二つの手法を以下で言及していきたいと思う。

改良準静近似では中性子束を以下のように仮定していた。

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = P(t)\varphi_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.6.2.4)$$

一方、準静近似と断熱近似は中性子束を次式のように分離する。

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = P(t)\varphi_g(\mathbf{r}) \quad (3.6.2.5)$$

上式より、準静近似と断熱近似は、中性子束を時間に依存する項と空間に依存する項に完全に変数分離できると仮定している。そのため、準静近似と断熱近似では用いる形状関数が改良準静近似とは異なる。まず初めに、準静近似に用いる形状関数について述べる。準静近似では中性子束を(3.6.2.5)式のように分離しているので、形状関数は時間微分項がなくなった次式で与えられる。

$$\begin{aligned} 0 = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi_g(\mathbf{r}) \\ & - \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{v_g} \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} \right] \varphi_g(\mathbf{r}) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}) \\ & + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{1}{P(t)} \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.6.2.6)$$

一方、断熱近似では、準静近似の振幅関数の時間微分及び遅発中性子先行核を考慮せず、以下の定常状態の拡散方程式を形状関数として用いる。

$$\begin{aligned} 0 = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi_g(\mathbf{r}) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \varphi_g(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{g'}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.6.2.7)$$

以上が断熱近似と準静近似の基礎式である。断熱近似と準静近似は中性子束を(3.6.2.5)式のように分離しているため、形状関数は時間に対して全く依存していないように見えるが、実際には(3.6.2.6)式や(3.6.2.7)式の形状関数をタイムステップ毎に計算しているために、形状関数の時間依存性は考慮している。ただし、タイムステップ内においては、形状関数を一定と仮定しているために、時間 t の依存性を表記していない。本節で述べた手法及び前節までで述べた直接法の概要を表 3.6.2.1 に示す。

表 3.6.2.1 各種法のモデルの概要

	直接法	因子化法			一点炉
		改良準静近似	準静近似	断熱近似	
タイムステップ内の空間分布の変化	○	○	×	×	×
中性子束分布の空間分布に対する遅発先行核の考慮	○	○	○	×	×
各種パラメータ(断面積、反応度)の時間変化	○	○	○	○	×
中性子束の空間分布の時間変化	○	○	○	○	×
初期分布	○	○	○	○	○

表 3.6.2.1 より、因子化法の中では改良準静近似法のみが、時間依存拡散方程式に対して近似を用いていないことが分かる。そのため、現在の炉心解析に用いられている因子化法は改良準静近似法が主流となっている。また、参考文献 25)に書かれているが、改良準静近似法(Improved quasi-static method)を準静近似法(quasi-static method)と記述する論文もいくつかあるので、名前で判断することなく、中性子束の変数分離の方法を見ることで、手法を確認する必要がある。

3.6.3 改良準静近似法の特徴

改良準静近似法の特徴は、時間依存拡散方程式に近似を用いずに中性子束を振幅関数と形状関数について独立に計算することである。振幅関数は時間に対して強く依存し、また、一点炉方程式であるので、計算コストは非常に低い。そのため、改良準静近似法では振幅関数のタイムステップ幅を詳細にしている。一方、形状関数は時間依存拡散方程式に類似しているために計算コストが高いが、時間に対して弱く依存しているために、粗タイムステップで計算しても計算精度に与える影響は大きくない。以上のことから、改良準静近似法では、振幅関数を詳細なタイムステップで計算を行い、形状関数を粗タイムステップで計算を一般的に行なっている。

上述したように、改良準静近似法は振幅関数を詳細タイムステップで計算を行い、形状関数を粗タイムステップで計算している。そのため、粗タイムステップ内では形状関数の更新を行っていない。しかし、振幅関数に用いる係数は形状関数を用いて算出するために、振幅関数の詳細タイムステップにおける形状関数を何らかの近似によって計算しなければならない。

改良準静近似法は、計算精度を低下させずに高速に計算が行える手法として、炉心解析コードに採用されている^{4,26)}。しかし、参考文献 4)により、必ずしも高速に計算でき

る改良準静近似法が、現在の動特性手法の主流であるとは言えない。改良準静近似法の欠点の一つとして、計算アルゴリズムが複雑であるという問題点がある。参考文献 23) に基づいた通常の改良準静近似法の計算フローを図 3.6.2.1 に、直接法の計算フローを図 3.6.2.2 に示す。図 3.6.2.1 と図 3.6.2.2 を比較して分かるように、直接法と比べ改良準静近似法の計算フローは複雑になっている。そのため、計算コードのプログラミングが煩雑になることや、各ステップのパラメータの感度が計算結果に及ぼす効果が複雑になる。これらのことから、現在の炉心計算コードでは直接法を好まれる場合がある。

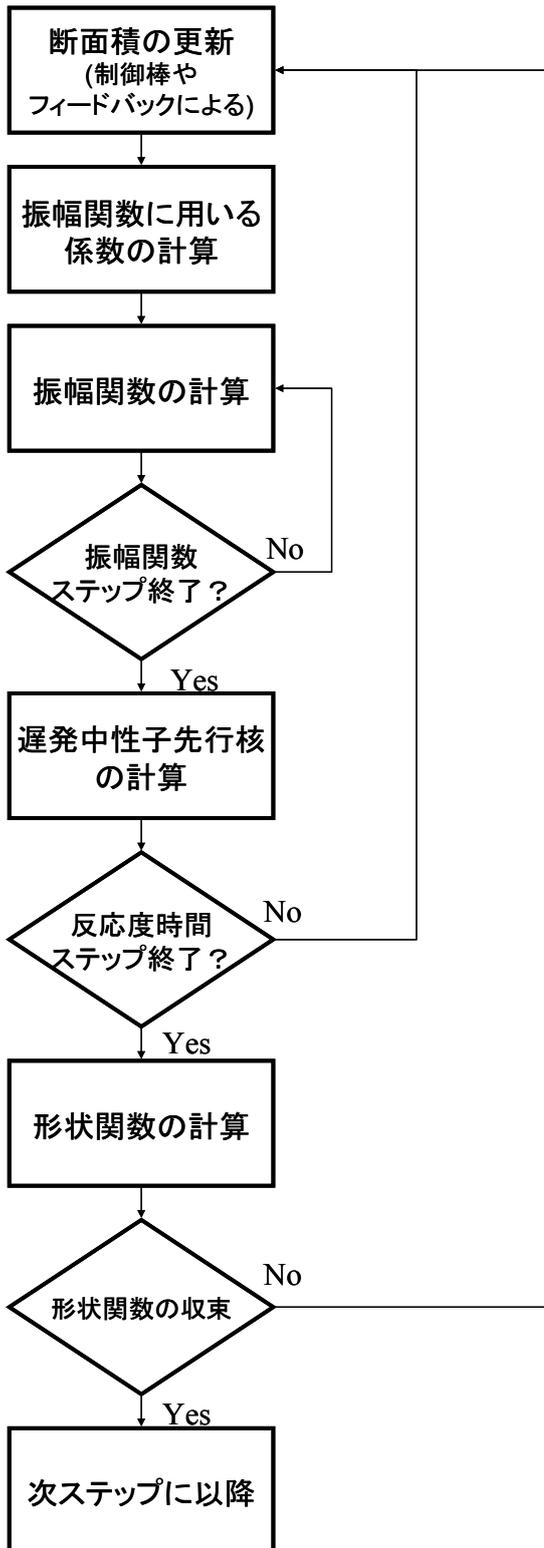


図 3.6.2.1 改良準静近似法の計算フロー

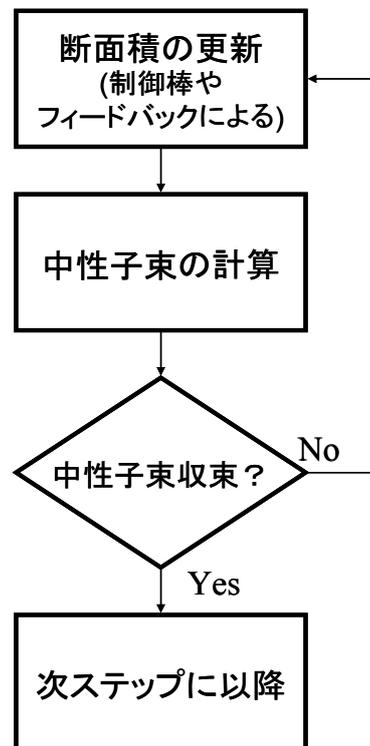


図 3.6.2.2 直接法の計算フロー

3.7 遅発中性子先行核密度の計算方法

本節では、動特性計算の計算精度に影響を与える遅発中性子先行核密度の計算方法について述べる。前節までの中性子束の時間積分法は、時間に関して差分化を行っていた。しかし、現在の動特性解析において、遅発中性子先行核密度の計算は中性子束とは異なり、核分裂源を関数近似することで遅発中性子先行核密度を解析的に計算することが主流となっている。以下では、動特性解析の歴史的な経緯を踏まえて、時間微分を離散化した場合の計算方法から述べる。なお、前節までに導出した θ 法及び周波数変換法の式は、既に核分裂源に線形近似を用いて解析的に遅発中性子先行核を取扱っている。

3.7.1 時間微分項を離散化した場合

遅発中性子先行核密度の式は次式である。

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (3.7.1.1)$$

(3.7.1.1)式を完全に解析的に計算することは困難であるために、(3.7.1)式の時間微分項を差分化して取扱うことを行う。(3.7.1.1)式を θ 法で差分化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) - C_m(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \\ &= \theta \left[\beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) \right] \\ & \quad + (1 - \theta) \left[\beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (3.7.1.2)$$

(3.7.1.2)式を整理すると、 θ 法で離散化した最終的な式を得ることができる。

$$\begin{aligned} C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) &= \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_m \Delta t}{1 + \theta\lambda_m \Delta t} C_m(\mathbf{r}, t) \\ & \quad + \frac{\beta_m \Delta t}{1 + \theta\lambda_m \Delta t} \left[\begin{aligned} & \theta \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\ & + (1 - \theta) \beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.7.1.3)$$

しかし、上記のように時間微分項を差分化する場合、離散化誤差が大きいことや計算結果が振動する場合がある。このことから、現在の動特性解析にはこの方法はあまり用いられていない。なお、この遅発中性子先行核密度の計算方法としては、QUANDRYコード²⁷⁾が採用している。

3.7.2 核分裂源を関数近似した場合

本節では、現在の炉心計算コードで多く採用されている、中性子源を関数近似で仮定することで、遅発中性子先行核を解析的に計算する方法について述べる。以降では、遅発中性子先行核密度の式である(3.7.1.1)式の解析解を導出することを試みる。

まず初めに、(3.7.1.1)式の両辺に $e^{\lambda_m t}$ を乗算する。

$$e^{\lambda_m t} \frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = e^{\lambda_m t} \beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - e^{\lambda_m t} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (3.7.2.1)$$

(3.7.2.1)式を整理すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\lambda_m t} C_m(\mathbf{r}, t) \right) = e^{\lambda_m t} \beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (3.7.2.2)$$

(3.7.2.2)式を $t \sim t + \Delta t$ で積分する。

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{\partial}{\partial t'} \left(e^{\lambda_m t'} C_m(\mathbf{r}, t') \right) = \beta_m \int_t^{t+\Delta t} dt' \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t') \phi_{g'}(\mathbf{r}, t') e^{\lambda_m t'} \quad (3.7.2.3)$$

(3.7.2.3)式を整理すると次式を得る。

$$C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) = C_m(\mathbf{r}, t) e^{-\lambda_m \Delta t} + \beta_m \int_t^{t+\Delta t} dt' \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t') \phi_{g'}(\mathbf{r}, t') e^{-\lambda_m (t+\Delta t-t')} \quad (3.7.2.4)$$

以上より、遅発中性子先行核の解析解を導出することができた。しかし、一般的に、(3.7.2.4)式の右辺第二項目の核分裂源の時間依存性の厳密解が分からないために、(3.7.2.4)式を計算することは困難である。そこで、(3.7.2.4)式の核分裂源に対して関数近似を適用する。現在の主流な方法は、核分裂源を次式のように線形近似する方法である。

$$\begin{aligned} \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t') \phi_{g'}(\mathbf{r}, t') &= \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \left[\nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \nu \Sigma_{f, g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right] (t' - t) \end{aligned} \quad (3.7.2.5)$$

(3.7.2.5)式を(3.7.2.4)式に代入すると最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} C_m(t + \Delta t) &= C_m(t) e^{-\lambda_m \Delta t} \\ &+ \frac{\beta_m}{\lambda_m} \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_m \Delta t)}{\lambda_m \Delta t} - \exp(-\lambda_m \Delta t) \right) \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f, g}(t) \phi_g(t) \\ &+ \frac{\beta_m}{\lambda_m} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\lambda_m \Delta t)}{\lambda_m \Delta t} \right) \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f, g}(t + \Delta t) \phi_g(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.7.2.6)$$

以上より、(3.7.2.6)式を用いることで、次ステップの遅発中性子先行核密度を計算する

ことが可能である。上式では、核分裂源を線形として仮定したが、核分裂源を次式のよ
うに2次関数として扱う方法もあり、PARCSコード⁶⁾がこの手法を採用している。

$$\sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(t') \phi_g(t') = f_2 t'^2 + f_1 t' + f_0 \quad (3.7.2.7)$$

なお、 $f_2 \sim f_0$ は次式を満足する。

$$f_2 \Delta t^2 + f_1 \Delta t + f_0 = \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(t + \Delta t) \phi_g(t + \Delta t) \quad (3.7.2.8)$$

$$f_2 (\tau - t)^2 + f_1 (\tau - t) + f_0 = \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(\tau) \phi_g(\tau) \quad (3.7.2.9)$$

$$f_0 = \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(t) \phi_g(t) \quad (3.7.2.10)$$

ここで τ は、通常、前々ステップの時間を用いる。しかし、この場合は核分裂源の近似
が多段階法になるので、3.2.3節で述べたように、必ずしも計算精度が向上するわけ
ではない。(なお因子化法の場合には、本研究において τ として、タイムステップ内の時
刻を用いることで計算精度を向上できることを確認している。)(3.7.2.7)式を(3.7.2.4)式
に代入すると、最終的に次式を得る。

$$C_m(t + \Delta t) = \exp[-\lambda_m \Delta t] \left[C_m(t) + \beta_m \left(-\frac{2}{\lambda_m^3} f_2 + \frac{1}{\lambda_m^2} f_1 - \frac{1}{\lambda_m} f_0 \right) \right] \\ + \left[\frac{2 - 2\lambda_m \Delta t + (\lambda_m \Delta t)^2}{\lambda_m^3} f_2 + \frac{-1 + \lambda_m \Delta t}{\lambda_m^2} f_1 + \frac{1}{\lambda_m} f_0 \right] \quad (3.7.2.11)$$

以上より、核分裂源を二次多項式で近似した時の遅発中性子先行核の解析解を導出した。

なお、定常状態($t = 0$)から過渡計算を行う際の遅発中性子先行核密度の計算は、
(3.7.1.1)式の左辺の微分項をゼロとした次式で与えられる。

$$C_m(\mathbf{r}, 0) = \frac{\beta_m \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, 0) \phi_{g'}(\mathbf{r}, 0)}{\lambda_m} \quad (3.7.2.12)$$

3.8 近代ノード法の時間依存方程式への拡張

本節では、近代ノード法を時間依存方程式に拡張した時に伴う問題点と、その改善方法について述べる。

動特性方程式を近代ノード法の基礎式である注目方向以外に積分した式に対し、 θ 法で差分化すると次式になる。なお、今回は注目方向を x 方向とした。

$$\begin{aligned}
 & -D_g(x, t + \Delta t) \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) + \Sigma'_{r,g} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) \\
 & = \sum_{\substack{s, g' \rightarrow g \\ g' \neq g}} \Sigma_{s, g' \rightarrow g} \Phi_{g',x}(x, t + \Delta t) + \chi'_g P_x(x, t + \Delta t) + L_{g,x}(x, t + \Delta t) \\
 & + Q_{ex,g}(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 Q_{ex,g}(x, t) & = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1}{v\Delta t} \Phi_{g,x}(x, t) + (1 - \theta) R_{g,x}(x, t) \right\} \\
 & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (\mu_m C_{m,x}(x, t) + \eta_m P_x(x, t))
 \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

$$\chi'_{p,g} = \left\{ \chi_{p,g} (1 - \beta_{eff}) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m \xi_m \right\} \tag{3.8.3}$$

$$\Sigma'_{r,g}(x, t) = \left\{ \Sigma_{r,g}(x, t + \Delta t) + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \right\} \tag{3.8.4}$$

$$\begin{aligned}
 R_{g,x}(x, t) & = \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \Phi_{g,x}(x, t) \\
 & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m (C_{m,x}(x, t) - \xi P_x(x, t)) \\
 & - Q_{ex,g}(x, t - \Delta t)
 \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

$$P_x(x, t) = \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \Phi_{x,g}(x, t) \tag{3.8.6}$$

$$\eta_m = \frac{\beta_m}{\lambda_m} \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_m \Delta t)}{\lambda_m \Delta t} - \exp(-\lambda_m \Delta t) \right) \tag{3.8.7}$$

$$\xi_m = \frac{\beta_m}{\lambda_m} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\lambda_m \Delta t)}{\lambda_m \Delta t} \right) \tag{3.8.8}$$

である。

空間の差分化方法が有限差分法の場合は、(3.8.1)式をそのまま取り扱っても、ヌルトランジェント(反応度が 0)の計算を適切に行うことが可能である。しかし、本研究で用

いている多項式解析的ノード法では、(3.8.1)式をそのまま用いてもヌルトランジェントを適切に計算することができない。つまり、定常状態から過渡状態への連続性を保持することが出来ていないことになる。そこで以下では、多項式解析的ノード法を用いた場合においても、ヌルトランジェントでも適切に計算できるように、(3.8.1)式に対して式変形を行う。

多項式解析的ノード法において、(3.8.1)式を用いてヌルトランジェントが適切に扱えない理由として、左辺の中性子束を(3.8.9)式のように解析的に扱い、右辺を(3.8.10)式のように多項式で近似する点が挙げられる。ここで、右辺の展開次数を2次とした。

$$\Phi_x(x) = A \sinh(\kappa x) + C \cosh(\kappa x) + \frac{q_2}{\Sigma_r} x^2 + \frac{q_1}{\Sigma_r} x + \left(\frac{q_0}{\Sigma_r} + 2D \frac{q_2}{\Sigma_r^2} \right) \quad (3.8.9)$$

$$\Phi_x(x) = f_2 x^2 + f_1 x + f_0 \quad (3.8.10)$$

そのため、多項式解析的ノード法で計算する場合、(3.8.1)式の右辺の中性子束と左辺の中性子束は等しくならない。ここで、ヌルトランジェント(反応度が0)の場合を考える。

ヌルトランジェントの時は摂動が加わっていないので、 $\Phi_x(x, t + \Delta t) = \Phi_x(x, t)$ となり、(3.8.1)式は整理すると定常状態の拡散方程式と全く同様の式になるはずである。しかし、多項式解析的ノード法では、ヌルトランジェントの場合には以下の式になる。

$$\begin{aligned} & -D_g(x, t + \Delta t) \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) \\ & + \left\{ \Sigma_{r,g}(x, t + \Delta t) + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \right\} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) \\ & = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{g',x}(x, t + \Delta t) + \chi_g P_x(x, t + \Delta t) + L_{g,x}(x, t + \Delta t) \\ & \quad + \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

ここで、(3.8.11)式の左辺の最終項と右辺の最終項が打ち消し合わないのは、左辺では中性子束を解析的に取扱い、右辺では多項式で近似しているためである。このことから、多項式解析的ノード法では、有限差分法の定式化をそのまま用いるとヌルトランジェントが計算できない。そのため、近代ノード法の過渡解析では、(3.8.1)式を変形した次式を用いることが多い。

$$\begin{aligned}
& -D_g(x, t + \Delta t) \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) + \Sigma_{r,g} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t) \\
& = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{g',x}(x, t + \Delta t) + \chi'_g P_x(x, t + \Delta t) + L_{g,x}(x, t + \Delta t) \quad (3.8.12) \\
& + Q_{ex,g}(x, t) - \frac{1}{\theta v_g \Delta t} \Phi_{g,x}(x, t + \Delta t)
\end{aligned}$$

有限差分タイプの θ 法と比べ、(3.8.12)式は除去断面積の補正分を右辺に移行させただけである。しかし、移行することで $\Phi_x(x, t + \Delta t)$ を多項式展開することになり、ヌルトランジェント時の Q_{ex} の多項式と打ち消しあうために、ヌルトランジェントが適切に計算可能となる。ただし、(3.8.12)式は(3.8.1)式に比べて仮想的な自群散乱の項が増えるために、収束性が低下することや、ヌルトランジェントを適切に計算できなくても過渡計算の計算精度にあまり影響ないことを確認したために、本研究では(3.8.12)式を用いずに、有限差分タイプと同様の(3.8.1)式を近代ノード法でも用いて過渡計算を行なっている。

3.9 自動タイムステップモデル

炉心動特性解析において、高精度な計算を効率的に行うためには、タイムステップ幅の選定は非常に重要な計算条件の一つになる。出力の変化割合が一定と見なせる単純な過渡解析においては、固定タイムステップを事象解析全体にわたり適用しても、計算精度上及び計算時間で問題ない。しかし、即発臨界の解析においては、事象の時間に応じてその解析精度を維持するために必要な時間タイムステップ幅は異なる。事象を通じて必要となる最も詳細なタイムステップ幅を固定して用いることで、計算精度を保持することも可能であるが、この場合、計算時間は長くなる。

以上のことより、多くの炉心計算コードは、タイムステップ幅を適宜設定する Automatic time-step size control(自動タイムステップモデル)を実装している。Automatic time-step size control で代表的なものとして、以下の3つの方法がある¹³⁾。

1. 埋め込み型ルンゲ・クッタ法を用いることで、誤差を計算する方法
 2. 詳細タイムステップと粗タイムステップの計算結果を比較する、Step-doubling 法
 3. 動的周波数により、中性子束の時間変化割合からタイムステップ幅を設定する方法
- 以下では、上の3つの方法について言及する。まず初めに、埋め込み型ルンゲ・クッタ法について言及する。

3.9.1 埋め込み型

Runge-Kutta-Fehlberg-4,5 法(埋め込み型ルンゲ・クッタ法という、本手法を指すことが多い)は、元々は6段5次のルンゲ・クッタ法であるが、係数を変更することで4

次の計算も行える特徴を有している。そのため、5次と4次の結果の差を用いることで、計算精度を担保する手法である。そこで、この方法を Generalized Runge-Kutta 法 (Kaps-Rentop Runge-Kutta 法)にも適用することで、自動タイムステップ幅を行う研究もあり²⁸⁾、SPANDEX コード¹³⁾が本手法を採用している。4次と3次の Gneralized Runge-Kutta の式を(3.9.1)及び(3.9.2)式に示す。

$$y_{4th} = y(t + \Delta t) = y(t) + \sum_{i=1}^4 c_i [k_i(t + \Delta t)] \quad (3.9.1)$$

$$y_{3rd} = \hat{y}(t + \Delta t) = y(t) + \sum_{i=1}^3 \hat{c}_i [k_i(t + \Delta t)] \quad (3.9.2)$$

ここで、

c_i : 4次で展開した時の展開係数

\hat{c}_i : 3次で展開した時の展開係数

である。

(3.9.1)及び(3.9.2)式は誤差がそれぞれ5次と4次であるので、厳密解と数値解には次式の関係がある。

$$y_{exact} = y_{4th} + \Delta t^5 [g_{5th}(t + \Delta t)] + \dots = y_{3rd} + \Delta t^4 [g_{4th}(t + \Delta t)] + \dots \quad (3.9.3)$$

ここで、

$[g_{5th}(t + \Delta t)]$: 5次成分の係数

$[g_{4th}(t + \Delta t)]$: 4次成分の係数

である。

そのため、ルンゲ・クッタ法による打ち切り誤差は次式で評価することが可能である。

$$\text{Err} = \max_n \left| \frac{y_{m,4th} - y_{m,3rd}}{y_{m,scal}} \right| = \max_n \left| \frac{\Delta t^4 [g_{4th}(t + \Delta t)] + \dots}{y_{m,scal}} \right| \quad (m = 1, \dots, N) \quad (3.9.4)$$

なお、参考文献28)では $y_{m,scal}$ として $y_{m,4th}$ を用いている。(3.9.4)式より時間積分が精度

よく行えることを確認するためには、ユーザーが設定する誤差 ε よりも Err が小さくなればよい。このことから、次ステップ幅 $\Delta t'$ を決定するためには、次ステップの時刻 t' において次式を満たすようなタイムステップを設定すればよいことになる。

$$\max_n \left| \frac{\Delta t'^4 [g_{4th}(t')] + \dots}{y_{m,scal}} \right| < \varepsilon \quad (m = 1, \dots, N) \quad (3.9.5)$$

ここで、次式のように高次の成分が時間に対して変化しないと近似する。

$$g_{4th}(t') \approx g_{4th}(t + \Delta t) \quad (3.9.6)$$

(3.9.6)式の仮定を用い、(3.9.5)式を(3.9.4)式に代入することで、以下の自動タイムステップ幅の式を得ることが出来る。

$$\Delta t' \leq \Delta t \left(\frac{\varepsilon}{\text{Err}} \right)^{1/4} \quad (3.9.7)$$

(3.9.7)式を用いることで、埋め込み型ルンゲ・クッタに対応した数値積分法の自動タイムステップ幅の設定を行えることが出来る。ただし、本手法は高次と低次の計算結果をそれぞれ求める必要がある。一回のタイムステップ幅に2回の計算を行う必要があるために、計算コストがある程度多くなる。次に Step-doubling 法について述べる。

3.9.2 Step-doubling法

Step-doubling 法は、古くから数値計算の分野で用いられてきた方法であり、最も簡単な方法であるために、どのような数値積分法にも適用可能である。Step-doubling 法は、詳細な計算と粗な計算の差異がユーザーの設定以下になるように試みる点では、先に述べた埋め込み型ルンゲ・クッタ法の方法と考え方は同様である。ただし、Step-doubling 法で用いる比較は、次式に示すように、タイムステップが $0.5\Delta t$ と Δt の比較を行う。

$$\text{Err} = |y_{\Delta t}(t) - y_{\Delta t/2}(t)| \quad (3.9.8)$$

そして後は、先の埋め込み型ルンゲ・クッタ法と同様に、(3.9.8)式で算出した差異が、以下のようにユーザーが設定した差異 ε 以下の場合には、 $y_{\Delta t}(t)$ か $y_{\Delta t/2}(t)$ の計算結果を採用する。なお、差異が ε 以上の場合はそのタイムステップを棄却し、タイムステップ幅を詳細にして再度計算を行う。

$$\text{Err} \leq \varepsilon \quad (3.9.9)$$

そして、次のタイムステップ幅は次式を用いて算出を行う。

$$\Delta t^{NEW} = \Delta t \left(\frac{\varepsilon}{\text{Err}} \right)^{1/p} \quad (3.9.10)$$

ここで、(3.9.10)式の p は数値積分法の誤差の次数であり、完全陰解法の場合は $p = 2$ となるので、(3.9.10)式は次式になる。

$$\Delta t^{NEW} = \Delta t \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{Err}}} \quad (3.9.11)$$

なお、参考文献 18)ではタイムステップ幅の棄却回数を低減するために、以下の式を用いて次のタイムステップ幅を決定する。

$$\Delta \tilde{t}^{NEW} = \Delta t \min \left(\text{Facmax}, \max \left(\text{Facmin}, \text{Safety} \frac{\Delta t^{NEW}}{\Delta t} \right) \right) \quad (3.9.12)$$

参考文献 18)では、Facmax = 2, Facmin = 0.5, Safety = 0.8-0.9 と設定している。以上が Step-doubling 法であるが、Step-doubling 法はタイムステップ中に 3 回の計算を行う必要があり、Step-doubling 法を用いることで却って計算コストが低下する場合がある¹³⁾。そのため、池田²³⁾は計算コストが非常に低い、改良準静近似法における振幅関数に本手法を用いている。最後に、動的周波数を用いる自動タイムステップモデルについて述べる。

3.9.3 動的周波数を用いた方法

本手法は、DIF3D-K コード²⁹⁾が採用している手法であり、前述した 2 つの手法とは異なり、計算コストを増加させることなく、自動タイムステップ幅を行える手法である。DIF3D-K コードは次式で自動的にタイムステップ幅が決められている。

$$\Delta t^{NEW} = \frac{(\omega \Delta t)_{\max}}{\max_i |\omega_i|} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.9.13)$$

ここで、

$(\omega \Delta t)_{\max}$: ユーザーが決める値

$|\omega_i|$: 参考文献 13)ではペリオドの逆数(動的周波数)

i : ノード番号

である。

(3.9.13)式の物理的な意味を考えると、動的周波数の逆数はペリオド時間 T なので、(3.9.13)式は次式に変形できる。

$$\Delta t^{NEW} = (\omega \Delta t)_{\max} T \quad (3.9.14)$$

(3.9.14)式より、DIF3D-K で用いられている方法は、ペリオドを $(\omega \Delta t)_{\max}$ 倍する時間を次ステップとして採用する方法であることが分かる。例として、 $(\omega \Delta t)_{\max}$ を 0.01 とすることは、ペリオドの 1/100 のタイムステップで計算するということである。この方法は、反応度が高くなる程、短いタイムステップ幅を選定するため、物理的に理にかなった方法である。また、本手法は、計算コストを増加させることなく、自動タイムステップ幅を設定することが可能である。

3.10 本章のまとめ

本章で述べたことを以下にまとめる。

- 定常状態とは異なり、動特性解析では、中性子束と遅発中性子先行核密度からなる連立微分方程式を計算する必要がある。
- 炉心の時間依存性を表す最も基本的なものとして、時間依存拡散方程式を位相空間に積分することで、一点炉動特性方程式を導出した。
- 様々な数値積分法について紹介し、陽解法と陰解法の計算方法や数値安定性の違いについて述べた。
- 空間依存動特性方程式の解法において直接法に分類され、現在主流の解法として、 θ 法、周波数変換法、SCMの基礎式の導出、特徴などについて詳細に述べた。
- 空間依存動特性方程式の解法として、因子化法についても述べ、改良準静近似法の基礎式を導出することで、他の因子化法である、準静近似や断熱近似との違いについても述べた。
- 遅発中性子先行核密度の計算方法として、 θ 法で差分化した式と核分裂源を関数近似した時の遅発中性子先行核の計算式について述べた。また、関数近似の方法としては、核分裂源を線形近似及び二次近似した時の場合について述べた。
- 近代ノード法を時間依存に拡張した時の問題点及び改善点について述べた。
- 自動時間ステップもでるとして、埋め込み型ルンゲ・クッタ法、Step-doubling法、DIF3D-Kに採用されている各種法について言及した。埋め込み型ルンゲ・クッタ法及びStep-doubling法は計算コストが増加するが、DIF3D-Kの方法は、計算コストが増加しないことを示した。

3.11 参考文献

- 1) Y. Ishii, A. Fushimi, S. Arita, H. Ochi, "Plant simulation system for developing ABWR automatic power regular system," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **46**[1], 41-48 (2009).
- 2) K. Kobayashi, "A rigorous weight function for neutron kinetics equation of the quasi-static method for subcritical systems," *Ann. Nucl. Energy*, **32**, 763-776 (2005).
- 3) L. M. Grossman, J. P. Hennart, "Nodal diffusion methods for space-time neutron kinetics," *Prog. Nucl. Energy*, **49**[3], 181-216 (2007).
- 4) H. Ikeda, T. Takeda, "Development and Verification of an Efficient Spatial Neutron Kinetics Method for Reactivity-Initiated Event Analyses," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **38**, pp.492-502 (2001).
- 5) T. Endo, M. Tatsumi, "Study on kinetic transport solvers for pin-by-pin core calculation," *Proc. PHYSOR2008*, Interlaken, Switzerland, Sept. 14-19, 2008, (2008). [CD-ROM]

- 6) T. Downar, D. Lee, Y. Xu, *et al.*, *PARCS v2.6 U.S NRC Core Neutronics Simulator THEORY MANUAL*, School of Nuclear Engineering Purdue University (2004).
- 7) M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, “Development of Kinetics Model for BWR Core Simulator AETNA,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[4], 201-212 (2003).
- 8) Y. A. Chao, A. Attard, “A Resolution of the Stiffness Problem of Reactor Kinetics,” *Nucl. Sci. Eng.*, **90**, 40-46 (1985).
- 9) Y. A. Chao, P. Huang, “Theory and performance of the fast-running multidimensional pressurized water reactor kinetics code, SPNOVA-K,” *Nucl. Sci. Eng.*, **103**, 415-419 (1989).
- 10) S. Aoki, T. Suemura, J. Ogawa, *et al.*, “The Verification of 3 Dimensional Nodal Kinetics Coade ANCK Using Transient Benchmark Problems,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[6], 862-868 (2007).
- 11) G. Grandi, L. Belblidia, C. Jönsson, “BWR stability analyses with SIMULATE-3K benchmark against measured plant data,” *Prog. Nucl. Energy*, **52**, (2010). [in print]
- 12) P. J. Turinsky, R. M. K. AL-Chalabi, P. Engrand, *et al.*, *NESTLE Few-group neutron diffusion equation solver utilizing the nodal expansion method for eigenvalue, adjoint, fixed-source steady-state and transient problems*, Electric Power Research Center, North Carolina State University (1994).
- 13) T. M. Sutton, B. N. Aviles, “Diffusion theory methods for spatial kinetics calculation,” *Prog. Nucl. Energy*, **30**[2], 119-182 (1996).
- 14) B. N. Aviles, T. M. Sutton, D. J. Kelly, III, *A variable Timestep Generalized Runge-Kutta Method for the Numerical Integration of the Space-Time Diffusion Equations*, DE-AC12-76-SN-00052, General Electric Company Knolls Atomic Power Laboratory, Schenectady, New York (1991).
- 15) A. E. Aboanber, Y. M. Hamada, “Generalized Runge-Kutta method for two- and three-dimensional space-time diffusion equations with a variable time step,” *Ann. Nucl. Energy*, **35**[6], 1024-1040 (2008).
- 16) W. M. Stacey, *Nuclear Reactor Physics*, John Wiley and Sons, New York, (2001).
- 17) 日本機械学会編, 数値積分法の基礎と応用, コロナ社 (2003).
- 18) V. G. Zimin, H. Ninokata, “Nodal neutron kinetics model based on nonlinear iteration procedure for LWR analysis,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **25**[8], 507-528 (2003).
- 19) A. Hotta, “Development and verification of a BWR core simulation system for space and time dependent coupled phenomena,” Thesis, Doctor of Engineering in Nuclear Engineering, Tokyo Institute of Technology (2001).

- 20) W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *et al.*, 丹慶勝一, 佐藤俊郎, 小林誠 訳, Numerical recipes in C, 技術評論社 (2004).
- 21) N. J. Higham, *Functions of Matrices*, SIAM, Philadelphia (2008).
- 22) L. A. Hageman, J. B. Yasinsky, "Comparison of alternating direction time differencing method with other implicit method for the solution of the neutron group diffusion equations," *Nucl.Sci.Eng.*, **38**[8], 8-32 (1969).
- 23) 池田秀晃, "3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用", 博士論文, 大阪大学, (2002).
- 24) A. B. Morante, "The kinetics behavior of a reactor composed of G loosely coupled cores: integral formulation," *J. Nucl. Eng.*, **18**, 547-559 (1964).
- 25) S. Dulla, E. H. Mund, P. Ravetto, "The quasi-static method revisited," *Prog. Nucl. Energy*, **50**, 908-920 (2008).
- 26) Y. Ishii, H. Sano, Y. Fukasawa, "Verification of a Three-dimensional Multi-energy Group Kinetic Analysis Model by Using BWR Critical Operation Data," *J. Nucl. Eng.*, **36**[9], 755-760 (1999).
- 27) K. Smith, "An analytical nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equation," Nuclear engineer and Master of Science, Massachusetts institute of technology, (1976).
- 28) A. E. Aboanber, Y. M. Hamada, "Generalized Runge-Kutta method for two- and three-dimensional space-time diffusion equations with a variable time step," *Ann. Nucl. Energy*, **35**[6], 1024-1040 (2008).
- 29) T. A. Taiwo, H. S. Khilil, J. E. Cahalan, E. E. Morris, Time-step selection considerations in the Analysis of Reactor transients with DIF3D-K, W-31-109-ENG-38, Reactor Analysis Division Argonne National Laboratory, (1993).

第4章 動特性方程式の新しい計算手法

4.1 本章の概要

本章では本研究の中核となる、本研究で新たに検討、適用及び開発を行った動特性計算手法について述べる。本研究で新たに提案する動特性方程式の解法は、以下の二つを開発方針とした。

1. 時間積分法の計算コストが少なく、高速に計算できる方法
2. 時間積分法の計算コストは高いが、精度がよいため粗タイムステップで計算できる方法

また前章で述べたように、現在の動特性計算方法には多くの手法があり、統一化されていないため、各手法に特化したコーディングがされている。そのため、従来の動特性計算方法を統一的に扱える手法を新たに開発することで、全ての計算方法を用いることが可能となり、計算コードの簡略化が実現できる。

そこで本章は、本論文の1章でも述べたように、以下の目的を達成可能な計算手法の開発を目的とする。

- ・ 現行の動特性計算手法に対して高速かつ高精度な動特性計算手法の開発
- ・ 従来の動特性計算手法を統一的に扱える動特性計算理論の構築

本章では数値解法の種類として、大別して、指数行列の計算方法である Krylov 部分空間法と Contour Integrals 法、従来の手法を高度化及び一般化した周波数関数近似法と Multigrid Amplitude Function 法について述べる。

4.2 節では、Krylov 部分空間法の計算方法について述べる。Krylov 部分空間法の計算手順は、行列を直交変換することで行列を圧縮する過程と圧縮した指数行列を評価する過程に分けることができる。そこで、4.2 節では4.2.2 で行列を圧縮する過程について述べ、4.2.3 及び 4.2.4 で圧縮した指数行列の評価方法について述べる。

4.3 節では、Contour Integrals 法について述べる。Contour Integrals 法の計算方法としては、複素周回積分を用いた方法と逆ラプラス変換を用いた方法があり、両方法について言及する。

4.4 節では、周波数変換法を一般化した周波数関数近似法について言及する。4.4.3 では、一点炉方程式から出発し、動的周波数の関数形を理論的に検証する。理論的に検証した関数形を用いて、周波数関数近似法の実際の式を導出する。

4.5 節では、従来の動特性計算手法を統一化した、Multigrid Amplitude Function 法について言及する。本手法は、本研究の要となる手法である。

4.2 Krylov部分空間法

4.2.1 Krylov部分空間法の概要

現在の多くの炉心計算コードには、連立一次方程式を効率的に計算するための解法として、内部反復に Krylov 部分空間系の数値解法が用いられている。しかし、本節で述べる Krylov 部分空間法はこれとは全く異なり、指数行列の計算方法としての Krylov 部分空間法について言及する。なお、連立解法の解法と指数行列の解法に同じ Krylov 部分空間法という名前が用いられているのは、計算過程で同じ概念が用いられているためである。Krylov 部分空間法の概要について述べる前に、指数行列について述べる。

前章でも述べたように、空間依存動特性方程式を空間に関して差分化した式を行列形式で表記すると、次式になる。

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{\psi}(t) \quad (4.2.1.1)$$

ここで、

$\vec{\psi}(t)$: 各メッシュにおける中性子束及び遅発中性子先行核密度のベクトル

$\mathbf{A}(t)$: 動特性方程式の係数行列

である。

(4.2.1.1)式の $\mathbf{A}(t)$ の時間依存性を無視すると、(4.2.1.1)式に対して次式のような解析解を得ることが可能である。

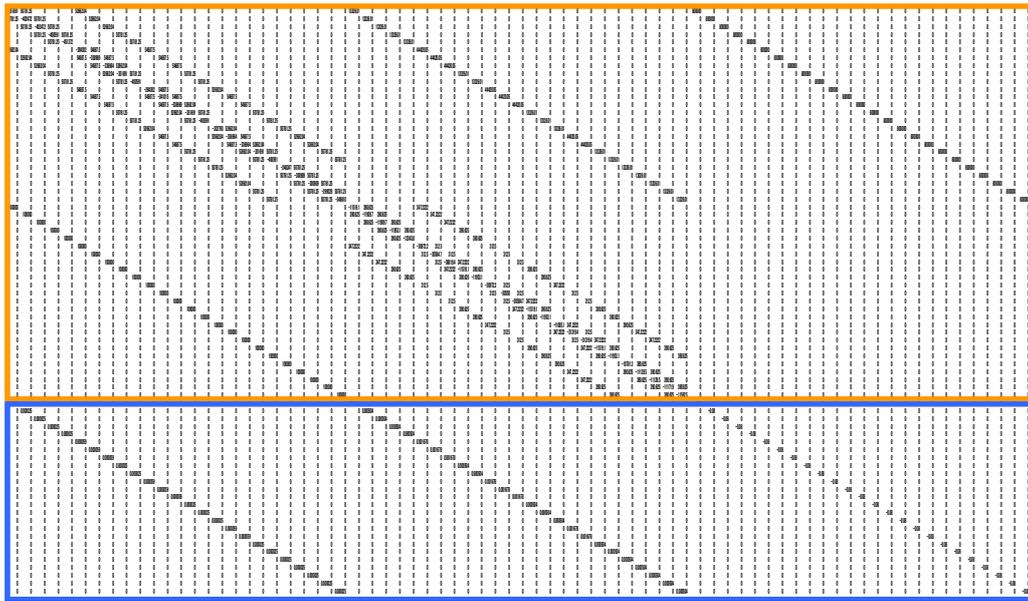
$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp[\Delta t \mathbf{A}] \vec{\psi}(t) \quad (4.2.1.2)$$

解析解は、(4.2.1.2)式のように行列が指数部にある、指数行列(Matrix Exponential)になる。なお、Matrix Exponential は指数行列ではなく、行列の指数関数と訳される場合もある。指数行列の定義は次式に示すような、無限級数和で与えられている。

$$\exp[\mathbf{A}] \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots = \sum_k \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (4.2.1.3)$$

指数行列の計算方法としては、テイラー展開法(指数行列法)、Padé 近似法、Schur 分解法などがある¹⁻³⁾。しかし、これらの手法は小規模密行列の指数行列に適した手法である。しかし、動特性方程式に用いる係数行列は、図 4.2.1.1 に示すように、大規模疎行列である。大規模疎行列の指数行列を効率よく計算する方法として、Krylov 部分空間法があり、学術分野や工学分野などに用いられて成功を収めている^{20,21)}。炉物理分野では Krylov 部分空間法を用いることで、燃焼方程式を高速かつ高精度に計算できることが示されており、実際の商用コードに採用されている²⁰⁾。このような背景から、本研究では Krylov 部分空間法を動特性方程式への適用を試みた。

中性子束に対する係数



遅発中性子に対する係数

図 4.2.1.1 動特性方程式の係数行列

Krylov 部分空間法を動特性方程式に適用すると、以下の二点がメリットになると考えられる。

1. 空間及びエネルギー群に関して反復を行う必要がない(連立方程式を計算する必要がないため)
2. 大規模疎行列問題を小規模密行列に変換することができる

1つ目のメリットは、Krylov 部分空間法の計算スキームが陽解法であることによる。前章で述べたように、陽解法は連立方程式を計算することなく数値積分が可能であるので、空間及びエネルギー群に関して反復を行う必要がない。このことから、陽解法の計算スキームに分類される Krylov 部分空間法は、反復計算を行う必要がない。2つ目のメリットとしては、Krylov 部分空間法を用いることで、大規模疎行列問題を小規模密行列問題に変換できる点がある。例として、本研究においては、Krylov 部分空間法を用いて 96000 × 96000 行列を 70 × 70 行列に変換している。これらの点から、Krylov 部分空間法を動特性方程式に適用することで、高速な時間積分ができる可能性がある。

4.2.2 Krylov部分空間法の基礎式の導出

Krylov 部分空間は、次式に示すような行列とベクトルの積の基底からなるベクトル空間である。

$$K_m(\Delta t \mathbf{A}, \vec{\psi}(t)) = \text{Span}\{\vec{\psi}(t), (\Delta t \mathbf{A})\vec{\psi}(t), (\Delta t \mathbf{A})^2 \vec{\psi}(t), \dots, (\Delta t \mathbf{A})^{m-1} \vec{\psi}(t)\} \quad (4.2.2.1)$$

ここで、

K_m : 次元 m の Krylov 部分空間

Span : 基底ベクトルが張るベクトル空間

である。

指数行列としての Krylov 部分空間法の計算手順は、以下の3つのステップに分けることができる。

1. 部分空間への変換(大規模疎行列から小規模密行列への圧縮)
2. 部分空間内の指数行列の計算(圧縮された小規模密行列の指数行列の計算)
3. 元の空間への拡張

手順1. において、対称行列には Lanczos 法、非対称行列には Arnoldi 法を用いることで、部分空間への変換を行う。なお、対称行列の場合においても、数値計算の誤差から Lanczos 法で生成する基底の直交性が崩れやすいために、Arnoldi 法を用いる場合もある⁵⁾。動特性方程式は図 4.2.1.1 からも確認できるように、行列が非対称であるために Arnoldi 法を用いる。

Arnoldi 法で生成される Krylov 部分空間の直交基底ベクトル $\mathbf{V}_m = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m]$ を用いると、元の行列との関係は次式でになる⁵⁾。

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} \mathbf{v}_i \quad (1 \leq j \leq m) \quad (4.2.2.2)$$

ここで、 $m \times m$ 行列 \mathbf{H}_m を以下で定義する。

$$(H_m)_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & (i \leq j+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.2.2.3)$$

(4.2.2.3)式で定義した成分からなる行列 \mathbf{H}_m は Hessenberg 行列と呼ばれる。(4.2.2.2)及び(4.2.2.3)式から次式の関係式が得られる³⁾。

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{H}_m + h_{m+1,m} \vec{v}_{m+1} \vec{e}_m^T \quad (4.2.2.4)$$

ここで、

\vec{e}_m : m 番目の要素は 1 であり、それ以外の成分は全て 0 のベクトルである。

(4.2.2.4)式の両辺に左から \mathbf{V}_m^T を乗算すると次式を得ることができる

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m \quad (4.2.2.5)$$

次ステップの中性子束と遅発中性子先行核からなるベクトル $\vec{\psi}(t + \Delta t)$ の最適な近似 $\vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t)$ は、次式に示す最小自乗残差 γ が最小になるように計算を行えばよい。

$$\gamma = \|\vec{\psi}(t + \Delta t) - \vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t)\|_2 \quad (4.2.2.6)$$

ここで、

$$\|\cdot\|_2 : \text{ユークリッドノルム}$$

である。

(4.2.2.6)式の最小自乗残差を最小にする $\vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t)$ は、Moore-Penrose の逆行列を用いることで、次式のように得ることができる⁶⁾。

$$\vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t) = \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \vec{\psi}(t) \quad (4.2.2.7)$$

1 つ目の基底ベクトルは $\vec{v}_1 = \vec{\psi}(t)/\beta$ であるので、(4.2.2.7)式は(4.2.2.8)式に変形することが可能となる。

$$\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \vec{\psi}(t) = \beta \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \vec{v}_1 = \beta \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \mathbf{V}_m \vec{e}_1 \quad (4.2.2.8)$$

ここで、

$$\beta = \|\vec{\psi}(t)\|_2 \quad (4.2.2.9)$$

である。

次に、(4.2.2.8)式における $\mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \mathbf{V}_m$ のテイラー展開を考えると、次式のように変形することができる。

$$\mathbf{V}_m^T \exp[\Delta t \mathbf{A}] \mathbf{V}_m = \exp[\Delta t \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m] = \exp[\Delta t \mathbf{H}_m] \quad (4.2.2.10)$$

(4.2.2.10)式を(4.2.2.8)式に代入すると最終的に次式を得る。

$$\vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t) = \beta \mathbf{V}_m \exp[\Delta t \mathbf{H}_m] \vec{e}_1 \quad (4.2.2.11)$$

参考文献3)によると、以下の(4.2.2.11)式を修正した式を用いることで、計算精度を向上させることが可能である。

$$\vec{\psi}_{approx}(t + \Delta t) = \beta \mathbf{V}_{m+1} \exp[\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}] \vec{e}_1 \quad (4.2.2.12)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{H}}_{m+1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \mathbf{H}_m & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \\ \hline \end{array} \right] \quad (4.2.2.13)$$

である。

(4.2.1.2)及び(4.2.2.12)式を比較すると、Krylov 部分空間法を用いることで、行列サイ

ズ $n \times n$ の大規模問題が $(m+1) \times (m+1)$ の小規模問題に帰着していることが分かる。このことから、Krylov 部分空間法は、大規模行列問題に対して直交変換を用いて小規模行列問題にすることで、効率的に計算することが可能である方法と確認できる。

また、(4.2.2.11)式には部分空間数 m とタイムステップ幅 Δt の二種類のパラメータがあることが確認できる。このことから、Krylov 部分空間法の計算精度は部分空間数 m とタイムステップ幅 Δt に関連することが分かる。

4.2.3 Padé近似法

前節では Arnoldi 法を用いることで、大規模疎行列問題を小規模密行列に変換することができた。しかし、(4.2.2.12)式には小規模密行列の指数行列が残っているために、この指数行列を評価する必要がある。そのため本研究では、変換した後の指数行列の計算方法として、Padé 近似法を及び Scaling and Squaring 法を用いる。Padé 近似法では、次式のように有理多項式を用いて指数行列を近似する。

$$\exp(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) \approx [D_{pq}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})]^{-1} N_{pq}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) \quad (4.2.3.1)$$

ここで、

$$N_{pq}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)! p!}{(p+q)! j! (p-j)!} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^j \quad (4.2.3.2)$$

$$D_{pq}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)! q!}{(p+q)! j! (q-j)!} (-\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^j \quad (4.2.3.3)$$

である。

Padé 近似法はテイラー展開法よりも級数の収束性がよいため、少ない次数で優れた計算精度が可能であることから、計算効率がよい方法である。また、Padé 近似法には展開時数が p と q の二つがあるが、計算精度や計算効率の観点から $p=q$ の場合を使うのが一般的である¹⁾。参考文献3)より、上記した Padé 近似法の式よりも次式の Padé 近似法を用いることで、計算コストを低減することが可能である。そのため本研究では、次式の Padé 近似法の式を用いる。

$$\exp(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) \approx \begin{cases} \mathbf{I} + 2[D_p^{even}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})]^{-1} N_p^{even}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) & \text{if } p \text{ is even} \\ -\mathbf{I} - 2[D_p^{odd}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})]^{-1} N_p^{odd}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) & \text{if } p \text{ is odd} \end{cases} \quad (4.2.3.4)$$

ここで、

$$D_p^{even}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \sum_{k=0}^{p/2} c_{2k} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} - \Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1} \sum_{k=0}^{p/2-1} c_{2k+1} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} \quad (4.2.3.5)$$

$$N_p^{even}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1} \sum_{k=0}^{p/2-1} c_{2k+1} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} \quad (4.2.3.6)$$

$$D_p^{odd}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1} \sum_{k=0}^{(p-1)/2} c_{2k+1} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} - \sum_{k=0}^{(p-1)/2} c_{2k} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} \quad (4.2.3.7)$$

$$N_p^{odd}(\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}) = \sum_{k=0}^{(p-1)/2} c_{2k} (\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1})^{2k} \quad (4.2.3.8)$$

$$c_0 = 1 \quad (4.2.3.9)$$

$$c_k = c_{k-1} \frac{p+1-k}{(2p+1-k)k} \quad (4.2.3.10)$$

である。

以上が、一般に使われる Padé 近似法の計算方法であるが、これらの手法は評価する行列のノルムが大きくないときに適用することが可能である。しかし、空間依存動特性方程式に含まれている中性子速度は非常に大きいため、行列のノルムが非常に大きくなってしまふ。そのため、次節で述べる Scaping and Squaring 法を用いることで、行列のノルムを小さくする。

4.2.4 Scaling and Squaring法

テイラー展開や Padé 近似法は行列ノルムが大きくなると、精度よく計算するために非常に大きな展開次数を必要とする。この問題に対処するために、Scaling and Squaring 法を用いることができる。Scaling and squaring 法は、次式に示す指数行列の性質を利用した方法である。

$$\exp[\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1}] = \left\{ \exp[\Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1} / 2^j] \right\}^{2^j} \quad (4.2.4.1)$$

(4.2.4.1)式に注目すると、行列を 2^j で除算することで、指数行列のノルムが小さくなっていることが分かる。そのため、Scaling and Squaring 法を用いることで、効率的に計算することが可能となる。なお、(4.2.4.1)式の j の評価方法としては様々な方法があるが、本研究では参考文献 3)の以下の式を用いる。

$$\left\| 2^{-j} \Delta t \bar{\mathbf{H}}_{m+1} \right\|_{\infty} \leq 1/2 \quad (4.2.4.2)$$

ここで、

$$\left\| \cdot \right\|_{\infty} : \text{無限ノルム}$$

である。

4.3 Contour Integrals法

4.3.1 Contour Integrals法の概要

前節で述べた Krylov 部分空間法と同様に、Contour Integrals 法も指数行列を計算するための計算手法である。Contour Integrals 法を日本語訳すると「複素周回積分法」であり、名前の通り本手法では複素数の計算を行う必要がある。

Contour Integrals 法の計算方法については、大別して、以下の二つの計算方法がある。

1. コーシーの積分公式を計算する Contour Integrals 法⁷⁻⁹⁾
2. 逆ラプラス変換を計算する Contour Integrals 法¹⁰⁻¹³⁾

そのため、本節の Contour Integrals 法では、コーシーの積分公式を用いる方法と逆ラプラス変換を計算する Contour Integrals 法について述べる。まず初めにコーシーの積分公式を用いた Contour Integrals 法について述べる。

4.3.2 コーシーの積分公式を用いたContour Integral法

コーシーの積分公式の定義は以下である。また、コーシーの積分公式の概念図を図 4.3.2.1 に示す。

- 関数 $f(z)$ は領域 D で正則であるとする。単純閉曲線(自身と交わらない閉じた曲線) C とその内部がすべて D に含まれているとき、 C の内部にある任意の点 a について(4.3.2.1)式が成り立つ¹⁴⁾。

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad (4.3.2.1)$$

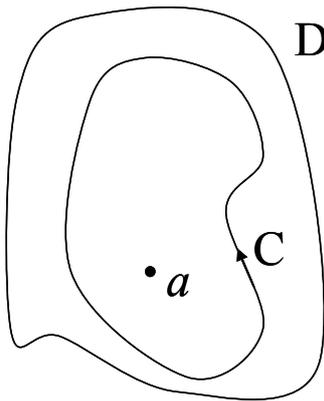


図 4.3.2.1 コーシーの積分公式の概念図

上記の場合では、 a がスカラー量であったために、積分経路で a の周りについて周回積分を行えばよい。しかし、前節の(4.2.1.2)式に示すように、断面積の時間依存性を考慮しない動特性方程式の解析解は、指数行列で表現されている。そこで、コーシーの積分

公式を用いて指数行列を評価するためには、(4.3.2.1)式の $f(z)$ を $\exp[z]$ にし、 a を $\Delta t\mathbf{A}$ とすることで評価することが可能である⁷⁾。

$$\exp[\Delta t\mathbf{A}] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp[z]}{z\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{A}} dz \quad (4.3.2.2)$$

(4.3.2.1)式とは異なり、(4.3.2.2)式の場合には特異点が行列に対応していることが分かる。参考文献⁷⁾より、(4.3.2.2)式を評価するためには、図 4.3.2.2 に示すように、行列 $\Delta t\mathbf{A}$ の全ての固有値 λ_i を積分経路 C の内部に含む必要がある。

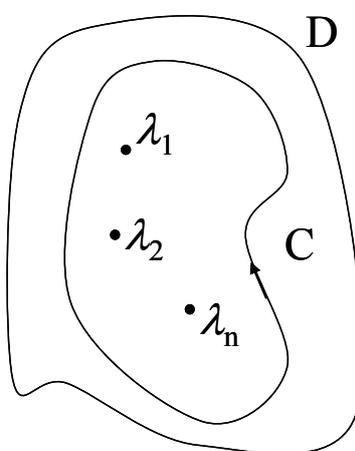


図 4.3.2.2 指数行列を評価するための積分経路の概念図

以下では、積分経路を単純円とした場合、(4.3.2.2)式を実際の計算機で計算させるための式変形を示す。

積分経路 C を次式のように、半径 r 、中心 z_0 と設定する。

$$z(\theta) = z_0 + re^{i\theta} \quad (4.3.2.3)$$

(4.3.2.3)式を(4.3.2.2)式に代入し、変数変換を行うと次式を得ることができる。

$$\exp[\Delta t\mathbf{A}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp[z(\theta)]}{z\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{A}} re^{i\theta} d\theta \quad (4.3.2.4)$$

ここで、(4.3.2.3)式の関係を用いて(4.3.2.4)式を次式に変形する。

$$\exp[\Delta t\mathbf{A}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp[z(\theta)]}{z\mathbf{I} - \Delta t\mathbf{A}} (z(\theta) - z_0) d\theta \quad (4.3.2.5)$$

計算機においては、(4.3.2.5)式のような積分を直接計算することは困難であるので、(4.3.2.6)式を用いて、積分を近似的に計算する。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b) \right) \quad (4.3.2.6)$$

なお、積分を近似する方法としては台形公式以外に、シンプソン公式を用いることも可能である。(4.3.2.6)式の台形公式を(4.3.2.5)式に適用すると、最終的に次式を得ることができる。

$$\exp[\Delta t \mathbf{A}] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\exp[z(\theta_j)]}{z \mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A}} (z(\theta_j) - z_0) \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}, j = 1, \dots, N \quad (4.3.2.7)$$

コーシーの積分公式を用いた Contour Integrals 法は、(4.3.2.7)式を用いることで指数行列を評価することが可能である。また、本手法を動特性方程式に適用することを考えると、(4.3.2.7)式を用いることで、動特性方程式の係数行列 $\Delta t \mathbf{A}$ の指数行列を評価した後に、中性子束及び遅発中性子 $\vec{\psi}(t)$ を乗算する必要がある。以上が、コーシーの積分公式を用いた Contour Integrals 法である。次節では、逆ラプラス変換を用いた Contour Integrals 法について述べる。

4.3.3 逆ラプラス変換を用いた Contour Integral 法

以下では、次式の空間に関して離散化した空間依存動特性方程式に対し、ラプラス変換を用いて解析解の計算を行う。

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{A} \vec{\psi}(t) \quad (4.3.3.1)$$

(4.3.3.1)式の両辺に対してラプラス変換を行うと、次式を得ることができる。

$$L\left(\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt}\right) - L(\mathbf{A} \vec{\psi}(t)) = sY - \vec{\psi}_0 - \mathbf{A}Y = Y(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \vec{\psi}_0 = 0 \quad (4.3.3.2)$$

$$Y = \frac{\vec{\psi}_0}{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (4.3.3.3)$$

ここで、

$\vec{\psi}_0$: $\vec{\psi}(t)$ の初期値

である。

(4.3.3.3)式に対して逆ラプラス変換を行うと、次式を得ることができる。

$$\vec{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{\vec{\psi}_0}{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} ds \quad (4.3.3.4)$$

(4.3.3.4)式に注目すると、複素周回積分になっていることが分かる。そのため、この時の積分経路 C は行列 \mathbf{A} の全固有値を含まなければならない。この理由は、前節で述べ

たコーシーの積分公式と同様である。以下では、逆ラプラス変換を数値計算するための変換を行う。

積分経路 C を変数 θ の関数とする。

$$C: z = z(\theta) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (4.3.3.5)$$

(4.3.3.5)式を用いて、(4.3.3.4)式を次式に変形する。

$$\vec{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z(\theta)t} \frac{\vec{\psi}_0}{(z(\theta)\mathbf{I} - \mathbf{A})} z'(\theta) d\theta \quad (4.3.3.6)$$

前節と同様に、計算機では積分を直接扱うのは困難であるために、台形公式を用いて近似的な計算を行う。

$$\vec{\psi}(t) \approx \frac{h}{2\pi i} \sum e^{z(\theta)t} \frac{\vec{\psi}_0}{(z(\theta)\mathbf{I} - \mathbf{A})} z'(\theta) \quad (4.3.3.7)$$

逆ラプラス変換を用いて、指数行列を計算する方法は最近開発されたものではなく、参考文献1)によると、以前から存在した手法である。しかし、計算精度の観点から、以前はあまり注目されていなかったが、近年の研究によって精度よく指数行列を計算することが可能になってきている¹¹⁻¹³⁾。逆ラプラス変換の積分は、一般にブロムウィッチ積分と呼ばれ、積分経路の設定によって計算精度が異なる。そこで以降では、逆ラプラス変換の Contour Integrals 法を精度よく計算するための積分経路について述べる。

逆ラプラス変換の積分経路の方法として、図 4.3.3.1 に示すような Hankel contour が一般的に用いられる。

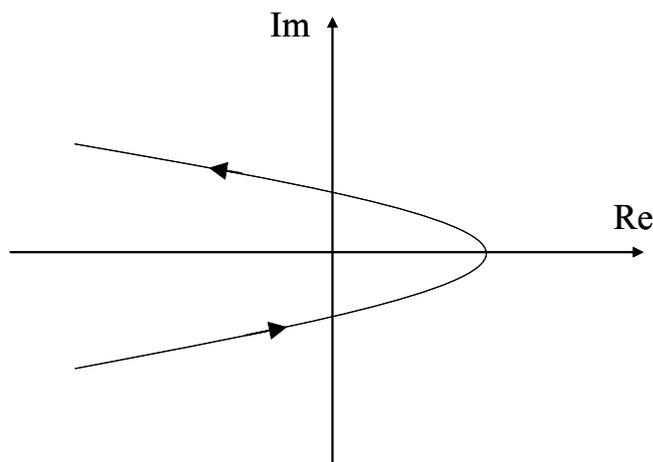


図 4.3.3.1 Hankel contour の概念図

積分経路を Hankel contour にすることによって、 $\text{Re } z = -\infty$ になるにつれて係数 e^{zt} の効果で被積分関数が急激に減衰するので、台形公式を用いて積分計算するのに Hankel contour は有効である。

数値計算をするためには、具体的な Hankel contour の関数が必要となる。Hankel contour の設定の仕方は代表的なもので、(4.3.3.8)式の Cotangent contour、(4.3.3.9)式の Parabolic contour、(4.3.3.10)式の Hyperbolic contour の 3 種類がある^{10,13)}。

$$z(\theta) = \sigma + \mu(\theta \cot \theta + \nu i \theta) \quad (4.3.3.8)$$

$$z(\theta) = \mu(i\theta + 1)^2 \quad (4.3.3.9)$$

$$z(\theta) = \mu(1 + \sin(i\theta - \alpha)) \quad (4.3.3.10)$$

(4.3.3.8)~(4.3.3.10)式の最適な係数 μ 、 ν 、 α に関しては議論されており、参考文献 10) によると以下の通りである。

$$z(\theta) = N[0.5017\theta \cot(0.6407\theta) - 0.6122 + 0.2645i\theta] \quad (4.3.3.11)$$

$$z(\theta) = N[0.1309 - 0.1194\theta^2 + 0.2500i\theta] \quad (4.3.3.12)$$

$$z(\theta) = 2.246N[1 - \sin(1.1721 - 0.3443i\theta)] \quad (4.3.3.13)$$

(4.3.3.11)~(4.3.3.13)式を実際にグラフにプロットしたものを図 4.3.3.2 に示す。なお、(4.3.3.11)~(4.3.3.13)式の N については、参考文献 10) より $N = 32$ を用いた。

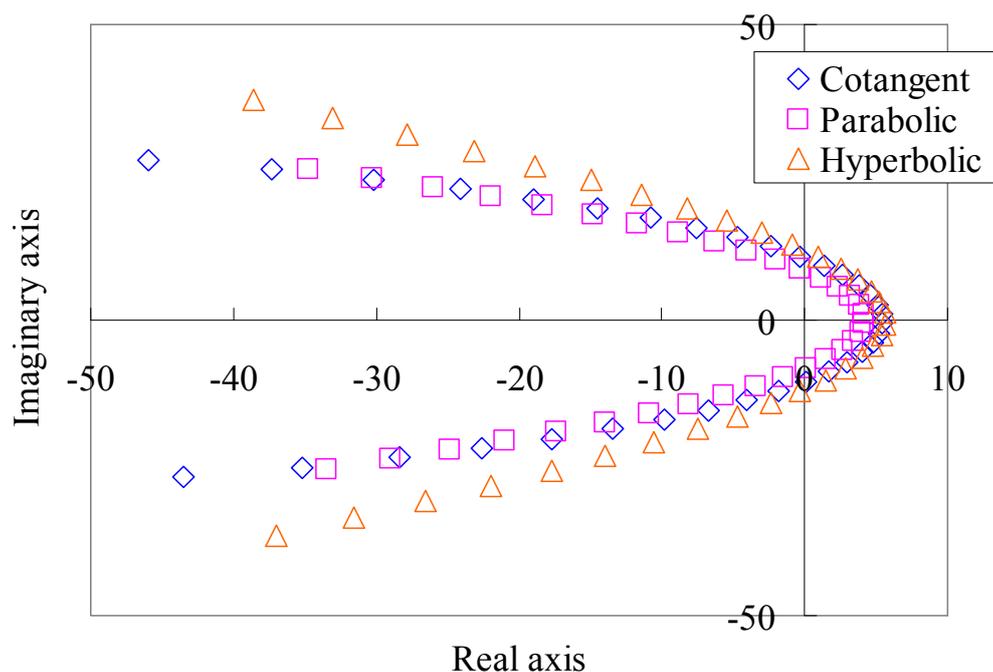


図 4.3.3.2 (4.3.3.11)~(4.3.3.13)式を用いた積分経路

図 4.3.3.2 から、(4.3.3.11)~(4.3.3.13)式を用いることで、Hankel contour を再現できていることを確認できる。そのため、逆ラプラス変換を用いた Contour Integrals 法は、このような積分経路を(4.3.3.7)式に代入することで、指数行列の計算を行えることができる。

4.3.4 Contour Integrals法の問題点

コーシーの積分公式及び逆ラプラス変換の Contour Integral 法は、計算理論上、行列 \mathbf{A} の全ての固有値を積分経路内に含まなければいけない。そのため、Contour Integral 法を動特性方程式に適用して効果的であるか否かは、動特性方程式の固有値の分布に強く依存することが分かる。例として、図 4.3.4.1 に動特性方程式の固有値分布の例を示す。なお、固有値の算出には Mathematica を用いた。

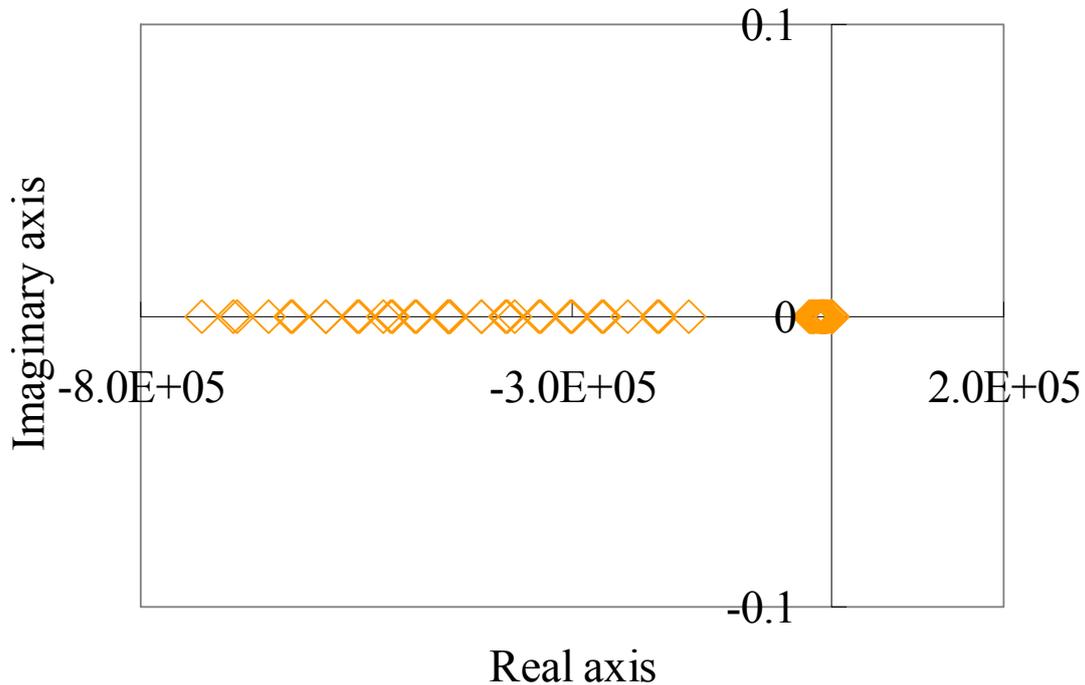


図 4.3.4.1 動特性方程式の係数行列の固有値の分布

図 4.3.4.1 より、動特性方程式の係数行列 \mathbf{A} の固有値は、 $O(10^5)$ から $O(10^0)$ という非常に幅広い固有値(全て実数)を持っていることが確認できる。上図の場合、コーシーの積分公式を用いた Contour Integral 法では、(4.3.2.3)式の半径 r は 3.7×10^5 という非常に大きな値が必要となる。一方、逆ラプラス変換を用いた Contour Integral 法の方も、 N のパラメータサーベイを行った結果、こちらの方も 5.8×10^5 といった非常に大きな値が必要となることが分かった。

このように積分区間が非常に大きくなると、台形公式で積分を計算精度よく求めるためには、非常に多くの刻み幅が必要となる。それに伴い、非常に多くの計算時間も必要となることが予想される。実際に参考文献 7)では、動特性方程式のように非常に大きな

固有値を持つ場合には、Contour Integral 法の計算精度はあまり期待できないと記述されている。

また、本手法の 2 つ目の難点として、行列 \mathbf{A} の固有値が既知でないと使えないということである。一般に、行列の固有値を求める計算は計算時間を多く必要とし、本手法を動特性方程式に適用して、本手法の有用性を確認することは難しいことが考えられる。そのため、本研究では Contour Integrals 法は検討の結果、動特性計算に適用しないこととした。

4.4 周波数関数近似法

4.4.1 周波数関数近似法の概要

前節までの Krylov 部分空間法及び Contour Integrals 法は指数行列の計算方法として、動特性方程式に適用されていないため、動特性方程式に適用するという意味では新規性があった。しかし、手法自体を新たに開発したというわけではない。

一方、本節及び次節で新たに提案する周波数関数近似法と Multigrid Amplitude Function 法は、本研究において新たに開発した手法である。なお、周波数関数近似法及び Multigrid Amplitude Function 法は、両手法ともに指数行列は用いずに、差分法を用いて動特性計算を行う。本節では、周波数関数近似法について述べる。

前章の周波数変換法の節において、従来の周波数変換法はタイムステップ内で周波数が一定であるという仮定を暗に用いていることを示した。よって、従来の周波数変換法は、タイムステップ幅が粗くなった場合に周波数の離散化誤差が増加していることを示し、この結果より、中性子束の計算精度も低下する可能性を示唆した。

そこで、本研究で新たに開発する周波数関数近似法は、タイムステップ内でも周波数は変化しているとするので、より厳密な周波数変換法の式を導出することを試みた。しかし、周波数は中性子束の微分量であるので、厳密な周波数の関数形を把握するのは、困難である。そこで本研究においては、周波数の時間依存性を関数近似することで、周波数の時間依存性を考慮することを提案した。このことから、本手法の考え方は近代ノード法による空間離散化誤差低減方法と近いものがある。

4.4.2 周波数関数近似法の基礎式の導出

従来法の周波数と今回新たに提案する手法を比較するために、タイムステップ内における式を以下に示す。従来法を(4.4.2.1)式に、提案法を(4.4.2.2)式に示す。

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \exp(w_g(\mathbf{r})t) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t) \quad (4.4.2.1)$$

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \exp(w_g(\mathbf{r}, t)t) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t) \quad (4.4.2.2)$$

上式からも分かるように、本節で新たに提案する手法は、周波数のタイムステップ内における時間依存性を考慮した、より厳密な物理モデルを採用している。以下では、周波数関数近似法の基礎式を導出する。

(4.4.2.2)式を空間依存動特性方程式である(3.2.1)式に代入すると、次式を得る。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(R_g(\mathbf{r}, t) - \frac{w'_g(\mathbf{r}, t)t + w_g(\mathbf{r}, t)}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \right) \exp(-w_g(\mathbf{r}, t)t) \quad (4.4.2.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_g(\mathbf{r}, t) = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4.4.2.4)$$

である。

従来法の(3.4.2.9)式と比較すると、今回提案した(4.4.2.3)式には周波数の微分値が新たに右辺に追加されていることが分かる。そのため、今回の手法は周波数の微分値を考慮している手法であるということが確認できる。なお、周波数の微分値をゼロとすると、本手法は従来の周波数変換法と等価になることから、本手法は従来の周波数変換法を一般化した手法であるといえる。以下では、(4.4.2.3)式に θ 法を適用することで、計算機に実装する方法について述べる。

(4.4.2.3)式に θ 法を適用すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_g} \frac{\tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, \Delta t) - \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ = & \theta \left(\frac{R_g(\mathbf{r}, \Delta t) - \frac{w'_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)(t + \Delta t) + w_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, \Delta t)}{\partial t} \right) \exp(-w_g(\mathbf{r}, t + \Delta t)(t + \Delta t)) \\ & + (1 - \theta) \left(R_g(\mathbf{r}, t) - \frac{w'_g(\mathbf{r}, t)t + w_g(\mathbf{r}, t)}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \right) \exp(-w_g(\mathbf{r}, t)t) \end{aligned} \quad (4.4.2.5)$$

上式には時間 t が直接含まれており、時間が増加するに伴い(4.4.2.5)式の t が大きくなるために、数値的に不安定になる場合が考えられる。そこで、時間 t を $t = 0$ になるように相対時間を調整し、整理すると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_g} \frac{\phi_g(\mathbf{r}, \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t) \exp(w_g(\mathbf{r}, \Delta t) \Delta t)}{\partial t} \\
& = \theta \left(R_g(\mathbf{r}, \Delta t) - \frac{w'_g(\mathbf{r}, \Delta t) \Delta t + w_g(\mathbf{r}, \Delta t)}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, \Delta t) \right) \\
& \quad + (1 - \theta) \left(R_g(\mathbf{r}, t) - \frac{w'_g(\mathbf{r}, t) t + w_g(\mathbf{r}, t)}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \right) \exp(w_g(\mathbf{r}, \Delta t) \Delta t)
\end{aligned} \tag{4.4.2.6}$$

上式より、周波数関数近似法を計算機で計算するための式を導出することができ、実際に動特性計算することが可能となる。また、(4.4.2.6)式より、本手法は従来の周波数変換法の式とあまり差異が少ないため、比較的容易に実装することが可能である。

4.4.3 周波数を関数近似するための検討

前節では、タイムステップ内における周波数の時間依存性を考慮した、周波数変換法を導出した。前節で示した(4.4.2.6)式には周波数の時間微分項が含まれており、時間微分項を正確に計算するためには、周波数の関数形を把握する必要がある。そこで、本節では、周波数の関数形について議論を行う。

周波数は次式に示すように、中性子束の関数である。

$$w_g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\phi_g(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{4.4.3.1}$$

上式より、周波数の関数形を知るためには、中性子束の関数形を知る必要がある。しかし、そもそも動特性解析は中性子束の時間変化を求めるために行うものなので、これでは本末転倒である。一般体系における中性子束の時間変化を知るのは困難であるために、以下の一点炉動特性方程式を用いることにする。

$$\frac{d}{dt} N(t) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(t) + \sum_m \lambda_m C_m(t) \tag{4.4.3.2}$$

$$\frac{d}{dt} C_m(t) = \frac{\beta_m}{\Lambda} N(t) - \lambda_m C_m(t) \tag{4.4.3.3}$$

(4.4.3.2)式及び(4.4.3.3)式の解析解は次式に示すように、指数関数の重ね合わせで表現することが可能である²。

$$N(t) = N(0) \sum_{i=1} A_i \exp(w_i t) \tag{4.4.3.4}$$

このことから、中性子束の時間変化は一点炉体系では指数関数の重ね合わせで表されることが分かった。一点炉体系は他の領域との相互関係を考慮していないが、以下に示す

² 解析解が得られるのは、(4.4.3.2)式の係数の時間依存性がないときのみであり、反応度などが時間依存性を有するときに解析解を得るのは困難である。

ように、他の領域との相互関係を考慮した二点炉方程式¹⁵⁻¹⁷⁾の解析解も原理的には、指数関数の重ね合わせで表現できることが示されている¹⁶⁾。

$$\frac{dN_r(t)}{dt} = \frac{\rho_r - \beta}{\Lambda_r} N_r(t) + \frac{\Delta_{r \leftarrow r'}}{\Lambda_r} \int_0^\infty N_r(t - \tau) g_{r \leftarrow r'}(\tau) d\tau + \sum_m \lambda_m C_m \quad (4.4.3.5)$$

これらのことから、多領域体系においても、中性子束の時間変化は(4.4.3.4)式のような指数関数の重ね合わせで表される可能性がある。そこで、(4.4.3.4)式を周波数の式である(4.4.3.1)式に代入することで、周波数の関数形を調べる。なお、今回は一点炉体系で考えているので、周波数の位置変数及びエネルギー群は記述しないこととする。

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{\phi(0) \sum_{i=1} A_i \exp(w_i t)} \frac{\partial \phi(0) \sum_{i=1} A_i \exp(w_i t)}{\partial t} \\ &= \frac{\sum_{i=1} A_i w_i \exp(w_i t)}{\sum_{i=1} A_i \exp(w_i t)} \end{aligned} \quad (4.4.3.6)$$

(4.4.3.6)式から、周波数の時間依存性は、指数関数の重ね合わせを分子・分母にもつ有理関数であることが分かる。そのため、(4.4.3.6)式を(4.4.2.6)式に代入することで計算精度を向上できる可能性がある。しかし、(4.4.3.6)式は各成分に対する係数及び指数部を一般的体系において求めるのは困難であるために、(4.4.3.6)式に対して近似を用いる必要がある。

そこで本研究では、非常に大きな近似方法であるが、(4.4.3.6)式を以下の指数関数の単項式で近似できると仮定する。

$$w(t) = \frac{\sum_{i=1} A_i w_i \exp(w_i t)}{\sum_{i=1} A_i \exp(w_i t)} \approx a \exp(bt) \quad (4.4.3.7)$$

(4.4.3.7)式は非常に大きな近似ではあるが、従来の周波数は(4.4.3.7)式を定数としていたために、従来法よりは高精度に計算可能である可能性がある。また、(4.4.3.7)式の a 及び b の計算方法であるが、前ステップ及び現ステップの周波数からのフィッティングを用いて次式のように決定する。

$$a = w(t) \quad (4.4.3.8)$$

$$b = \frac{\ln \left| \frac{w(t + \Delta t)}{w(t)} \right|}{\Delta t} \quad (4.4.3.9)$$

4.4.4 相関係数を用いた重み関数の導入

本節では、相関係数を用いた重み関数の導入を行う。周波数は図 4.4.3.1 に示すように連続的に変化しているが、周波数の時間依存性が急に変化する場合がある。例えば、図 4.4.3.1 の場合では 0.2sec の時に急激に周波数の時間依存性が変化している。これは、TWIGL ベンチマーク問題のランプ状の反応度投入の場合では、反応度が 0.2sec まで変化し、0.2sec から反応度変化がなくなるためである。つまり、周波数は炉心の反応度に応じて変化する。

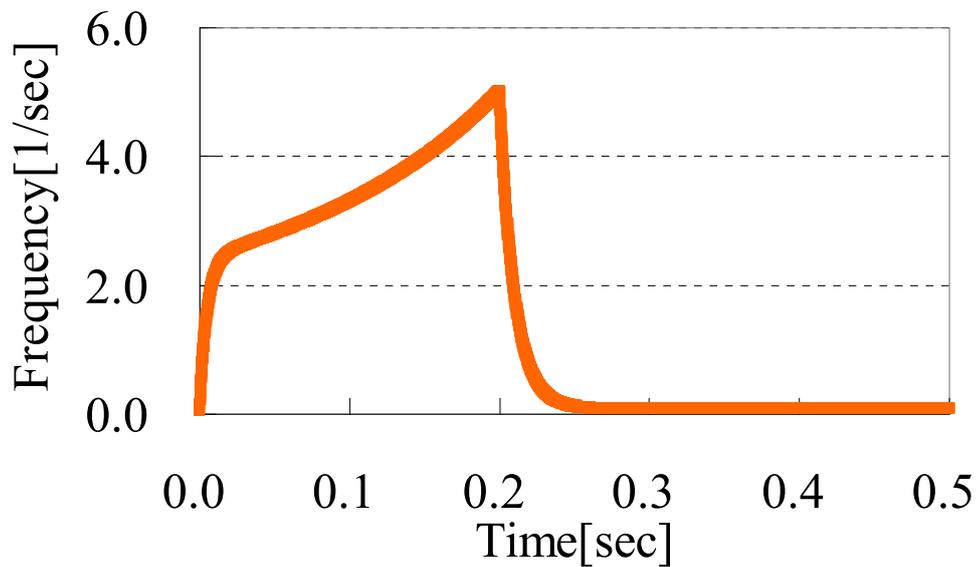


図 4.4.3.1 周波数の時間依存性
(計算体系：TWIGL ベンチマーク：ランプ状)

従来の周波数変換法は、このように周波数が急激に変化する場合も安定して計算することができた。しかし、周波数関数近似法は、周波数が急激に変化する場合に計算精度が悪化するだけでなく、場合によっては計算が発散する場合を数値計算で確認した。以下に、周波数の時間依存性が急激に変化する場合に、周波数関数近似法が不安定になるメカニズムを図 4.4.3.2 に示す。

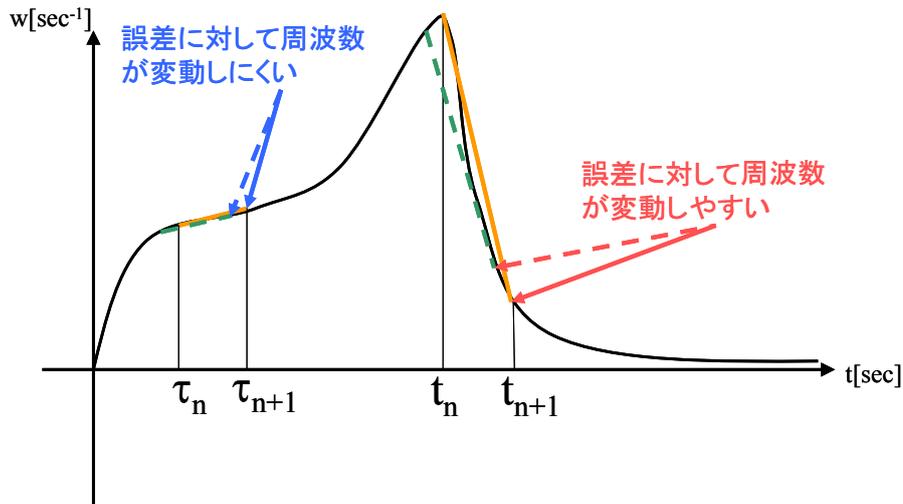


図 4.4.3.2 周波数関数近似法における不安定性の発生原理

図 4.4.3.2 から、周波数の時間依存性が大きい場合、及び微分値が大きい場合は誤差が顕著に現れること可能性があることが分かる。そのため、周波数の計算誤差が顕著化することで中性子束の誤差も増加し、最終的に計算が不安定になることが考えられる。また、従来法が周波数関数近似法よりも計算が安定している理由として、従来法はタイムステップ内の積分量(平均値)を用いているので、誤差に対して影響を受けにくく計算が安定していることが考えられる。一方、本手法は積分量に加え、微分値を用いているために誤差に対する影響を受けやすいので、従来法に比べ安定性では劣ると考えられる。

そこで本研究では、重み関数を用いることで周波数関数近似法の計算不安定性を改善することを試みる。具体的には、今ステップ時の周波数と次ステップ時の周波数の変化を小さくするように、前ステップの値を次式のように補正する。なお、この重み関数を導入する方法は参考文献 18)を参考とした。

$$w'(t) = \theta_w w(t + \Delta t) + (1 - \theta_w)w(t) \quad (4.4.4.1)$$

ここで、

$w'(t)$: 補正した前ステップの周波数

θ_w : 重み関数 $0 \leq \theta_w \leq 1$

である。

(4.4.4.1)式に $\theta_w = 1$ を代入すると、今ステップの周波数は次ステップの周波数と等価になり、(4.4.3.9)式の b がゼロとなるので、周波数関数近似法は従来の周波数変換法と等価になることが分かる。重み関数を 1 に近づけることで従来法に近づくので、計算安定性が向上することが期待できる。しかし、重み関数を 1 に近くしてしまうと、計算精度が低下してしまう可能性があるため、自動タイムステップ幅のように計算精度と安定性を保つため、重み関数を適宜決定する必要がある。

そこで本研究では、重み関数を適宜決定するために、相関係数を重み関数として採用することを試みた。次式に示すように相関係数は、2つの数 x_i と y_i がある時、その変数の相関関係を定量的に求めるための指標であり、-1~1までの範囲をとる。

$$\text{Correlation coefficient} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.4.4.2)$$

本研究においては x_i を前ステップの微分係数とし、 y_i を現ステップの微分係数とすることで、微分係数の相関を調べることにした。このようにすることで、前ステップの傾きと現ステップの傾きが同じ傾向を示すのならば正の相関であり、また、前ステップの周波数の微分係数と現ステップの微分係数が違う傾向を示すのならば、負の相関及び相関なしという結果になる。このことから、正の相関が強い場合には重み関数 θ_w が0に近くなるように設定を行い、正の相関でない場合には重み関数 θ_w が1に近くなるように設定すればよいことが分かる。今回採用した重み関数を次式に示す。

$$\theta_w = \begin{cases} \alpha & (\text{Correlation coefficient} \leq \beta) \\ 1 - \text{Correlation coefficient} + \beta & (\text{Correlation coefficient} > \beta) \end{cases} \quad (4.4.4.3)$$

ここで、

α : ユーザーが定義する重み関数の上限

β : ユーザーが定義する重み関数の下限 ($0 \leq \beta < \alpha < 1.0$)

である。

(4.4.4.3)式は、以下の3つの性質を有している。

- 1 相関係数が1から遠い場合には、従来法である、用いる周波数をタイムステップの平均値の周波数になるようにする(この時の重みは α)
- 2 相関係数が1に近い時は、線形近似した時の周波数を用いる(この時の重みは(4.4.4.3)式の下)
- 3 数値不安定性が起きないように、重み関数の下限値を設定している。(これは、(4.4.4.3)式の第三項目によって考慮している。)

この重み関数を用いることによって、周波数関数近似法の計算の安定性を大きく向上することが可能となることを検証計算で確認している。

4.5 Multigrid Amplitude Function法

4.5.1 Multigrid Amplitude Function法の概要

前章及び本章では、様々な動特性解析手法について述べてきた。しかし、これらの手法は互いに独立しており、動特性解析手法の理論は統一的な記述がなされていなかった。本節で述べる Multigrid Amplitude Function 法(MAF 法)は、本研究における要となる手法であり、従来の動特性方程式の解法を統一させた手法である。そのため、炉心計算コードに MAF 法を実装することで、全ての動特性解析手法を統一的に実装でき、非常に汎用性に優れている手法であるといえる。以下では、MAF 法の基礎式及び理論について述べる。

4.5.2 Multigrid Amplitude Function法の基礎式の導出

MAF 法では、中性子束を次式のように、時間に強く依存する部分と弱く依存する部分に分離する。

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = P_{i,g}(t)\varphi_g(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.2.1)$$

ここで、

$P_{i,g}(t)$: グリッド i 、エネルギー g 群の振幅関数

$\varphi_g(\mathbf{r}, t)$: 形状関数

である。

まず初めに、MAF 法の振幅関数を導出するために、動特性方程式を粗メッシュ単位で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \frac{1}{V_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dx dy dz = \\ \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \left[\nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \right] dx dy dz \\ + \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \chi_{d,m,g} \sum_m \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) dx dy dz \end{aligned} \quad (4.5.2.2)$$

上式より、(4.5.2.2)式は $\int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \frac{1}{V_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dx dy dz$ に関する微分方程式になっていることが分かる。

そのため、MAF 法の振幅関数を以下のように定義することで、(4.5.2.2)式を MAF 法の振幅関数である次式に変形することができる。

$$P_i(t) = \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \frac{1}{V_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dx dy dz \quad (4.5.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{i,g}(t) = F_{i,g}(t)P_{i,g}(t) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m c_{m,i}(t) \quad (4.5.2.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_i(t) = & \left(\int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) dx dy dz \right. \\ & - \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) dx dy dz \\ & + \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) dx dy dz \\ & \left. + \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) dx dy dz \right) \\ & P_i(t) \end{aligned} \quad (4.5.2.5)$$

$$c_{m,i}(t) = \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} C_m(\mathbf{r}, t) dx dy dz \quad (4.5.2.6)$$

である。

また、遅発中性子先行核密度に関する式も、同様の手順を行うことで、以下のような振幅関数を導出することが出来る。

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{m,i}(t) = \alpha_{m,i}(t)P_i(t) - \lambda_m c_{m,i}(t) \quad (4.5.2.7)$$

ここで、

$$\alpha_{m,i} = \frac{\int_{-\Delta z}^{\Delta z} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) dx dy dz}{P_i(t)} \quad (4.5.2.8)$$

である。

以上より、MAF法の振幅関数の式である(4.5.2.4)及び(4.5.2.7)式を導出した。次にMAF法の形状関数についての導出を行う。³

(4.5.2.1)式を動特性方程式に代入すると、次式の形状関数の微分方程式を得る。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{P_{i,g}(t)} \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.2.9)$$

ここで、

³ 実際のMAF法の計算においては、形状関数はいらない。そのため、最終的には中性子束に関する式を導出する。

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{v_g P_{i,g}(t)} \frac{\partial P_{i,g}(t)}{\partial t} \right] \phi_g(\mathbf{r}, t) \\
& + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\
& + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{4.5.2.10}$$

である。

(4.5.2.9)式を θ 法で差分化すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t)}{v_g \Delta t} = & \theta \left(\frac{1}{P_{i,g}(t + \Delta t)} \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \right) \\
& + (1 - \theta) \left(\frac{1}{P_{i,g}(t)} \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) \right)
\end{aligned} \tag{4.5.2.11}$$

(4.5.2.11)式の両辺に $P_{i,g}(t + \Delta t)$ を乗算すると、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t) \frac{P_{i,g}(t + \Delta t)}{P_{i,g}(t)}}{v_g \Delta t} = & \theta \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\
& + (1 - \theta) \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) \frac{P_{i,g}(t + \Delta t)}{P_{i,g}(t)}
\end{aligned} \tag{4.5.2.12}$$

(4.5.2.11)式までは形状関数の方程式であったのに対し、両辺に振幅関数を乗算することで、中性子束に関する式を得ることが出来ている。このように、実際の計算においては形状関数 $\phi_g(\mathbf{r}, t)$ を用いず、振幅関数 $P_i(t)$ と中性子束に関する式を用いて計算を行う。

形状関数を用いずに中性子束の計算を行う利点としては、炉内の中性子流を精度良く評価するために従来から利用されている、不連続因子をそのまま用いて計算することが可能となることや、形状関数の規格化などの操作が必要でなくなることがある。また、改良準静近似法では振幅関数の係数を計算するために必要であった、随伴方程式を用いなくてもよい。そのため MAF 法では、振幅関数と形状関数について計算するのではなく、振幅関数の計算結果を用いて(4.5.2.5)式の計算を行うことで、動特性計算を行なっている。

次に、(4.5.2.10)式の右辺第二項の $\frac{\partial P_{i,g}(t)}{\partial t}$ に注目する。通常、微分項は計算機で解析的に計算を行うことが困難であるが、今回は微分項を差分化せずに計算することができる

る。 $\frac{\partial P_{i,g}(t)}{\partial t}$ は(4.5.2.4)式の右辺を用いることで、直接計算することができる。以上よりMAF法では、振幅関数の(4.5.2.4)及び(4.5.2.7)式と形状関数の(4.5.2.12)式を用いて動特性計算を行う。

4.5.3 従来法からの改善点

前節では、MAF法の導出を行なった。本節では、今回新しく開発したMAF法を従来法と比較していく。以下では、現在の動特性解析手法として主流である、周波数変換法及び改良準静近似法を従来法として、MAF法との比較を行っていく。

周波数変換法は、中性子束を以下のように、時間に強く依存する関数 P_{FT} と時間に弱く依存する関数 ϕ_{FT} に分離する方法である。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = P_{FT}(\mathbf{r}, t)\phi_{FT}(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.3.1)$$

ここで、

$$P_{FT}(\mathbf{r}, t) = \exp(w(\mathbf{r}, t)t) \quad (4.5.3.2)$$

$$\phi_{FT}(\mathbf{r}, t) = \phi_g(\mathbf{r}, t)\exp(-w(\mathbf{r}, t)t) \quad (4.5.3.3)$$

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln(\phi(\mathbf{r}, t)) \quad (4.5.3.4)$$

である。

(4.5.3.1)式より、周波数変換法の振幅関数に相当するのは $\exp(w(\mathbf{r}, t)t)$ である。そのため、周波数変換法の振幅関数は空間依存性を有しているが、時間変化を指数の単項式で近似していることが分かる。一方、改良準静近似法は中性子束を以下のように、振幅関数と形状関数に分離する。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = P_{IQS}(t)\phi_{IQS}(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.3.5)$$

ここで、

$P_{IQS}(t)$: 一点炉動特性方程式を解くことで得られる出力の時間変化

$\phi_{IQS}(\mathbf{r}, t)$: 改良準静近似の形状関数

である。

(4.5.3.5)式から、改良準静近似の振幅関数は周波数変換法と違い、一点炉動特性方程式を用いることで、振幅関数の時間依存性を近似せずに扱っている。しかし、体系を一点炉として扱っているために、改良準静近似法の振幅関数は空間分布の時間依存性を考慮していない。このことから改良準静近似法では、振幅関数のタイムステップ内は体系

の相対的な形状分布が変化していないと仮定していることになる⁴。そのため改良準静近似法では、振幅関数と形状関数をどんなに精度よく計算したとしても、形状関数のタイムステップが大きくなるに従い計算精度が悪化することになる⁵。周波数変換法、改良準静近似法の振幅関数の時間依存性及び空間依存性の概念図 4.5.3.1~4.5.3.4 に示す。

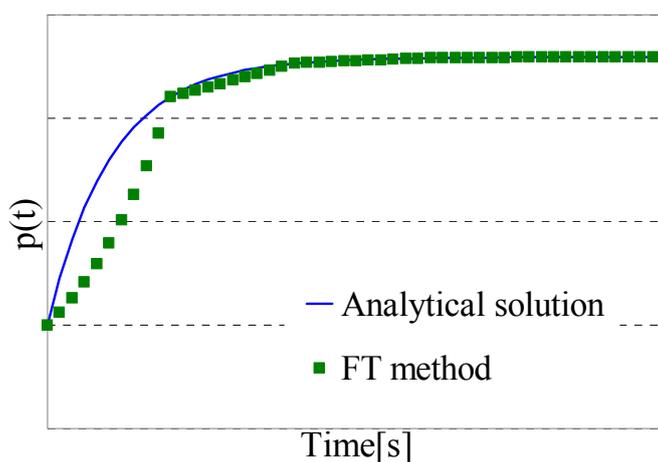


図 4.5.3.1 周波数変換法における振幅関数の時間依存性の概念図

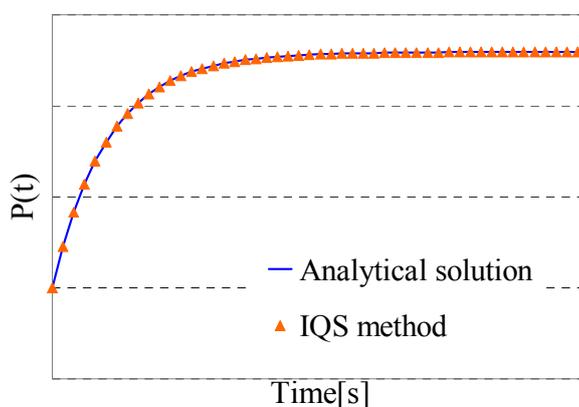


図 4.5.3.2 改良準静近似法における振幅関数の時間依存性の概念図

⁴ 但し、参考文献 19)では振幅関数のタイムステップ中は、形状関数を線形で内挿を行っている。そのため、振幅関数のタイムステップ内でも中性子束分布が線形に変化していると仮定している。
⁵ 改良準静近似法の計算式自体には近似を用いていないが、振幅関数と形状関数を異なるタイムステップで計算することで、物理的な近似が発生してしまう。

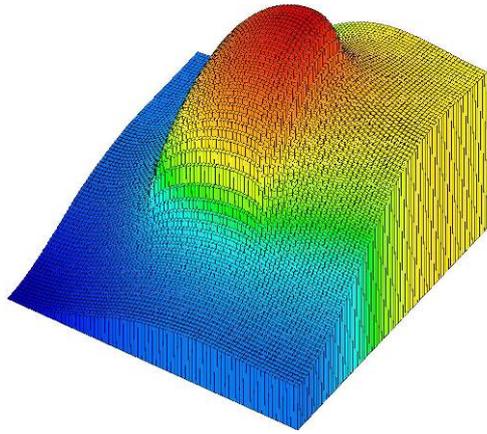


図 4.5.3.3 周波数変換法における振幅関数の空間依存性の概念図

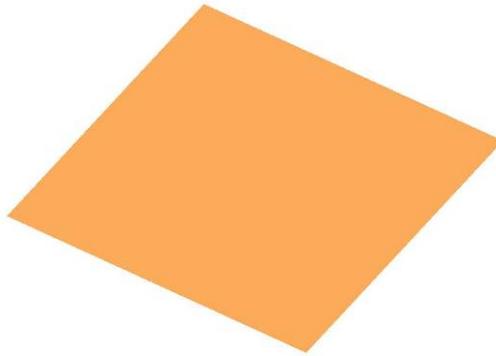


図 4.5.3.4 改良準静近似法における振幅関数の空間依存性の概念図

周波数変換法は、図 4.5.3.1 より振幅関数の時間依存性は近似しているが、図 4.5.3.3 より振幅関数の空間依存性は考慮していることが確認できる。一方、改良準静近似法は、図 4.5.3.2 より振幅関数の時間依存性は近似を用いていないが、図 4.5.3.4 より振幅関数の空間依存性は近似を用いていることが確認できる。このように従来法の振幅関数は、時間依存性または空間依存性について近似を用いている。

次に、MAF 法の振幅関数について考える。MAF 法の振幅関数の時間依存性を図 4.5.3.5 に、空間依存性を図 4.5.3.6 に示す。

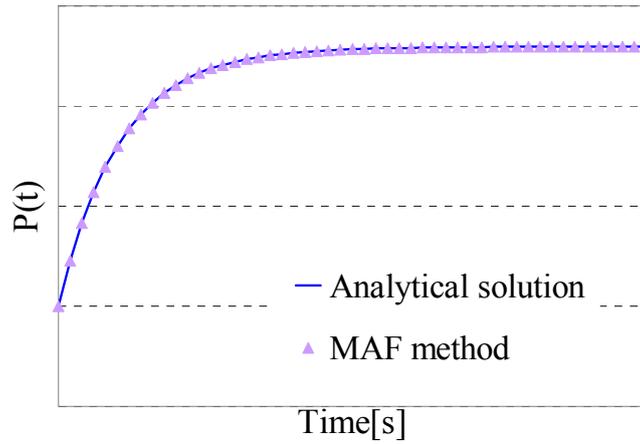


図 4.5.3.5 MAF 法における振幅関数の時間依存性

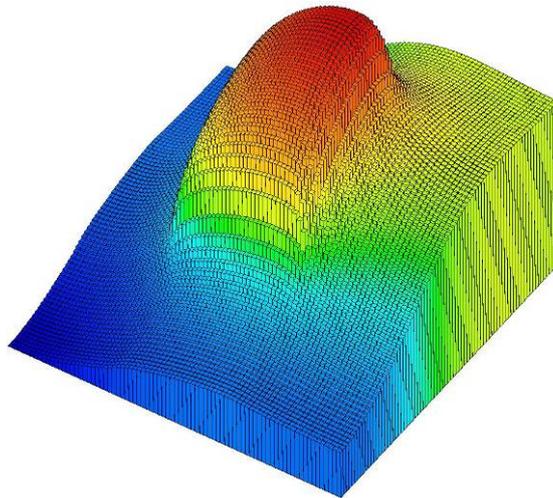


図 4.5.3.6 MAF 法における振幅関数の空間依存性

図 4.5.3.5 及び図 4.5.3.6 より、MAF 法に用いる振幅関数は、時間依存性及び空間依存性に対して近似を用いていないことが確認できる。そのため、MAF 法では振幅関数が実現象をより正確に模擬しており、従来法よりも高精度な計算が可能になることが期待できる。また、MAF 法の振幅関数は、周波数変換法及び改良準静近似法の長所を含んでいるため、MAF 法は従来法をより一般化した手法であるといえる。MAF 法が従来法と等価になる条件を表 4.3.5.1 に示す。

表 4.5.3.1 MAF法が従来法と等価になる条件⁶

	差分法	周波数変換法	改良準静近似法
振幅関数 $P_i(\mathbf{r},t)$	1	$\exp(w(\mathbf{r},t)t)$	体系全体で積分、 一点炉動特性方程式 の数値解

表 4.5.3.1 は、動特性計算コードに MAF 法を実装することによって、従来の計算手法も内包することができることを示している。これらのことより、今回新しく開発した MAF 法は、従来法を統一的に扱える手法であると言える。

4.5.4 Time-dependent Coarse Mesh Finite Difference法

前節では、MAF 法の基礎式及び形状関数の計算方法について言及した。そこで本節では、MAF 法の振幅関数を計算する方法について言及する。

前節で導出した MAF 法の振幅関数は次式である。

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{i,g}(t) = F_{i,g}(t)P_{i,g}(t) + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m c_{m,i}(t) \quad (4.5.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{m,i}(t) = \alpha_{m,i}(t)P_i(t) - \lambda_m c_{m,i}(t) \quad (4.5.4.2)$$

(4.5.4.1)式及び(4.5.4.2)式は一点炉動特性方程式と同様の式の形をしており、各グリッド i に関して独立に計算することが可能であるように考えられる。本研究では当初、振幅関数を各グリッドにおける一点炉方程式の計算を行っていたが、振幅関数が収束せずに発散することを多々確認した。この発散する原因としては、各メッシュを独立して計算する一点炉動特性方程式では、漏洩量を近似的にしか考慮できないためであると考えられる。導出は Appendix に示すが、厳密な多点炉動特性方程式は次式である。

$$\begin{aligned} \frac{ds_i(t)}{dt} = & - \frac{(1 - \Delta k_{F,i}(t))s_i(t)}{l_i(t)} \\ & + \frac{1}{l_i(t)} \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{1}{k} (1 - \beta_{in}(t)) k_{p,in}(t) - \Delta k_{A,in}(t) \right) s_n(t) + \sum_m k_{d,m,in}(t) \lambda_m C_{mn}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.5.4.3)$$

ここで、 $s_i(t)$ 及び $C_{m,i}(t)$ は核分裂源及び遅発中性子先行核密度の領域 V_i での積分量で、次式で定義されている。

⁶ 一般的に、改良準静近似法の振幅関数のパラメータを計算する際には定常状態の随伴中性子束を重み関数として用いる。

$$s_i(t) = \int_{V_i} s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (4.5.4.4)$$

$$C_{m,i}(t) = \int_{V_m} C_{m,i}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (4.5.4.5)$$

(4.5.4.3)式に注目すると、他領域との相互関係を表しているのは右辺第二項目である。そのため、注目グリッドのみを考慮する方法は他の領域を無視しているために、厳密な(4.5.4.3)式を次式で近似していることになる。

$$\begin{aligned} \frac{ds_i(t)}{dt} \approx & -\frac{(1 - \Delta k_{F,i}(t))s_i(t)}{l_i(t)} \\ & + \frac{1}{l_i(t)} \left[\left(\frac{1}{k} (1 - \beta_{ii}(t)) k_{p,ii}(t) - \Delta k_{A,ii}(t) \right) s_i(t) + \sum_m k_{d,m,ii}(t) \lambda_m C_{mi}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.5.4.6)$$

しかし、他領域を無視した(4.5.4.6)式は物理的に大きな近似を用いており、メッシュ内の中性子のバランスが崩れてしまうために、計算が不安定になると考えられる。一方、振幅関数として体系全体を積分する改良準静近似法は、(4.5.4.3)式の N が $N=1$ となるために、(4.5.4.3)式と(4.5.4.6)式が等価になり、計算が安定して行えると考えられる。

上記のことから、各グリッドの振幅関数を正確計算するために、各グリッドの一点炉方程式を計算するだけでは不十分であることが分かった。そこで本研究では、振幅関数の計算コスト大きく増大させずに正確に計算するために、Time-dependent Coarse Mesh Finite Difference 法(TCMFD 法)を新たに提案する。

CMFD 法は 2 章の加速法で述べたように、固有値問題や固定源問題を効率よく計算する手法である。本研究では、CMFD 法を時間依存に拡張した TCMFD で振幅関数を計算することを試みる。TCMFD の計算自体は、時間依存の拡散方程式を計算するために、隣接メッシュとの相互関係を考慮していることになる。そのため、TCMFD の計算は注目メッシュのみの一点炉方程式よりは高精度に計算することが可能である。しかし、TCMFD を行う上で近似を用いなければならない点がある。CMFD 計算は、次式に示すように、粗メッシュの中性子流に補正係数を用いて詳細メッシュの中性子流を再現していた。

$$J_{I,G}^{x+} = \frac{-2D_{I,G}D_{I+1,G}}{D_{I,G}\Delta x_{I+1} + D_{I+1,G}\Delta x_I} (\phi_{I+1,G} - \phi_{I,G}) + D_{I,G}^{cor} (\phi_{I+1,G} + \phi_{I,G}) \quad (4.5.4.7)$$

しかし TCMFD 計算では、図 4.5.4.1 に示すように形状関数(詳細メッシュ計算)とのタイムステップが異なる。そのため、形状関数のタイムステップ間に TCMFD へ用いる補正係数は正確な値が得られないことになる。

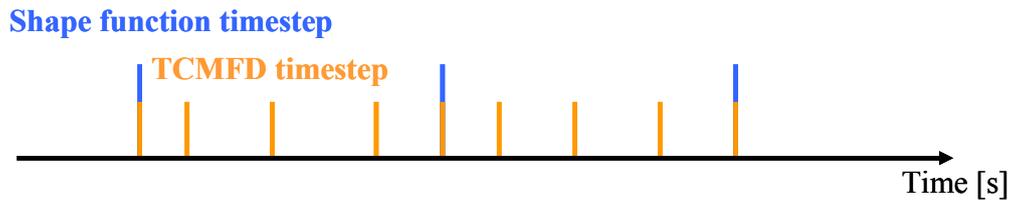


図 4.5.4.1 詳細メッシュ計算と TCMFD のタイムステップの概念図

ここで参考文献 19)によれば、ノード法の非線形反復法に用いる結合係数は時間に対して大きく依存しないことが分かっている。そのため、CMFD に用いる補正係数もノード法に用いる補正項と同様に、時間に対して大きく依存しないことが期待できる。そのため本研究では、形状関数のタイムステップ間の結合係数を内挿することで、TCMFD の各タイムステップの補正係数を用いることにする。TCMFD とカップリングをした MAF 法の計算フローを下図に示す。

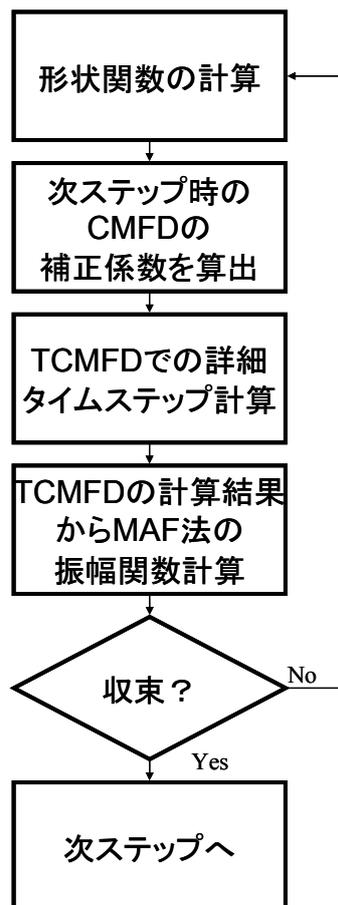


図 4.5.4.2 MAF 法の計算フロー

4.5.5 振幅関数を用いた遅発中性子先行核密度の計算方法

MAF 法と TCMFD 法を組み合わせた手法を用いることで、従来法よりも高精度に中性子束を計算することが期待できる。しかし、どんなに中性子束を高精度に計算できたとしても、遅発中性子先行核密度を粗タイムステップで正確に計算できない場合は、計算精度が向上しないことが考えられる。このような場合としては、炉心出力が緩やかに変化する場合がある。そこで、本研究では遅発中性子先行核密度の計算式も従来法よりも高精度な計算式を考案することで、MAF 法を粗タイムステップでも高精度に計算できることを目指す。

遅発中性子先行核密度の式は次式である。

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.5.1)$$

MAF 法の基礎式の導出と同様に、本節でも遅発中性子先行核密度を以下のように分離することを考える。

$$C_m(\mathbf{r}, t) = Q_{m,i}(t) \varphi_m(\mathbf{r}, t) \quad (4.5.5.2)$$

(4.5.5.2)式を(4.5.5.1)式に代入する。

$$\frac{\partial \varphi_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\tilde{R}_m(\mathbf{r}, t)}{Q_{m,i}(t)} \quad (4.5.5.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m(\mathbf{r}, t) = & \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \\ & - C_m(\mathbf{r}, t) \frac{1}{Q_{m,i}(t)} \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.5.5.4)$$

である。

(4.5.5.1)式と(4.5.5.3)式を比較すると、(4.5.5.1)式は時間微分項に振幅関数が含まれているために時間に対して大きく変化するが、式変形を行なった(4.5.5.3)式に注目すると、時間微分項が形状関数についての時間微分項になっている。形状関数の時間微分項は小さいことから、(4.5.5.1)式よりも(4.5.5.3)式の方が、差分化することに伴う離散化誤差を小さくすることができる可能性がある。このようにできるのは、振幅関数の時間微分項を(4.5.5.4)式の中に分離しているためであり、(4.5.5.4)式の振幅関数の時間微分項は TCMFD の結果から得ることが可能である。そのため本手法では、遅発中性子先行核密度の計算にも TCMFD をカップリングして用いている。以下では、(4.5.5.3)式の具体的な計算式について述べる。

(4.5.5.3)式を差分化すると次式を得る。

$$\frac{\varphi_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \varphi_m(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \theta \frac{R_m(\mathbf{r}, t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} + (1 - \theta) \frac{R_m(\mathbf{r}, t)}{Q_{m,i}(t)} \quad (4.5.5.5)$$

(4.5.5.5)式の両辺に $Q_{m,i}(t + \Delta t)$ を乗算する。

$$\begin{aligned} \frac{C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) - C_m(\mathbf{r}, t) \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)}}{\Delta t} \\ = \theta R_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) + (1 - \theta) R_m(\mathbf{r}, t) \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)} \end{aligned} \quad (4.5.5.6)$$

(4.5.5.6)式の R_m を具体的に展開し整理すると、最終的に次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) = & \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_m \Delta t - \frac{(1 - \theta)\Delta t}{Q_{m,i}(t)} \left. \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \right|_t}{1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \left. \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \right|_{t + \Delta t}} \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)} C_m(\mathbf{r}, t) \\ & + \left(\frac{\theta \Delta t}{1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \left. \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \right|_{t + \Delta t}} \right) \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\ & + \left(\frac{\Delta t}{1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \left. \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \right|_{t + \Delta t}} \right) \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)} (1 - \theta) \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4.5.5.7)$$

(4.5.5.7)式に注目すると、(4.5.5.3)式の形状関数から、遅発中性子先行核密度の式に変形できていることが確認できる。そのため、上式は従来の遅発中性子先行核密度の式と同様の計算スキームを用いることが可能である。(4.5.5.7)式は見かけ上、遅発中性子先行核密度の式ではあるが、実際は形状関数の式であるので時間に関しては大きな依存性を示さない。そのため、差分化誤差が小さくなることが期待できる。また、遅発中性子先行核密度の振幅を定数とすると、通常の方法で差分化した(3.7.1.3)式と等価になる。そのため、本手法は、従来法をより一般化して手法であると言える。

4.6 本章のまとめ

本章で述べたことを以下にまとめる。

- 断面積の時間依存性を無視した時、空間に関して離散化した空間依存動特性方程式の解析解は指数行列で与えられる。
- 指数行列の計算方法である Krylov 部分空間法は、大規模疎行列を小規模密行列に変換することで、大規模疎行列を効率よく計算することが可能である。
- Contour Integrals 法には、コーシーの積分公式を用いる場合と逆ラプラス変換を用いる二通りの方法がある。
- 動特性方程式の固有値分布は非常に大きく、Contour Integrals 法を動特性方程式に適用しても高精度かつ高速に計算することが困難であると考えられる。
- 周波数の時間依存性を考慮した周波数関数近似法を新たに開発し、一点炉方程式より、周波数は指数関数の有理多項式で表現できることが分かった。
- 周波数関数近似法の数値安定性を向上させるために、相関係数を用いた重み関数を導入した。
- 振幅関数を各グリッドに設定することで、従来の動特性解析手法を統一化した Multigrid Amplitude Function 法を新たに開発した。
- MAF 法の振幅関数の計算には、CMFD 加速を時間依存に拡張した TCMFD 法で計算する方法を提案した。
- 遅発中性子先行核密度の式も振幅関数と形状関数に分離することで、TCMFD の結果を用いつつ、差分誤差が小さくなるような新たな計算式を提案した。

4.7 参考文献

- 1) C.Moler, C.V.Loan, "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later," *SIAM review*, **45**[1], 3-49 (2003).
- 2) N. J. Hibham, *Functions of Matrices*, SIAM, Philadelphia (2008).
- 3) R. B. Sidje, "EXPOKIT: Software package for computing matrix exponentials," *ACM Trans. Math. Softw.*, **24**[1], 130-156 (1998).
- 4) A. Yamamoto, M. Tatsumi, N. Sugimura, "Numerical Solution of Stiff Burnup Equation with Short Half Lived Nuclides by the Krylov Subspace Method," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[2], 147-154 (2007).
- 5) S. Noritake, A.Imakura, Y. Yamamoto, et al., "A Large-Grained Parallel Solver for Linear Simultaneous Ordinary Differential Equations based on Matrix Exponential and its Evaluation," *Transac. of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **19**[3], 293-312 (2009). [in Japanese]

- 6) A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York (1974).
- 7) H. A. Ashi, L. J. Cummings, P.C. Matthews, "Comparison of methods for evaluating functions of a matrix exponential," *Applied Numerical Mathematics*, **59**, 468-486 (2009).
- 8) A. Kassam, L. N. Trefethen, "Forth-order time-stepping for stiff PDEs," *SIAM J. SCI. Comput.*, **26**[4], 1214-1233 (2005).
- 9) N. Hale, N. J. Higman, L. N. Trefethen, "Computing A^α , $\log(A)$, and related matrix functions by contour integrals," *SIAM J. NUMER. ANAL.*, **46**[5], 2505-2523 (2008).
- 10) T. Schmelzer, "The fast evaluation of matrix functions for exponential integrators," Thesis, University of Oxford, (2007).
- 11) J. A. C. Weideman, "Improved contour integral methods for parabolic PDEs," *IMA Journal of Numerical Analysis*, (2009).
- 12) L. N. Trefethen, J. A. C. Weideman, T. Schmelzer, "Talbot quadratures and rational approximations," *BIT Numerical Mathematics*, **46**, 653-670 (2006).
- 13) J. A. C. Weideman, L. N. Trefethen, "Parabolic and Hyperbolic contours for computing the Bromwich integral," *Mathematics of computation*, **76**[259], 1341-1356 (2007).
- 14) 長崎憲一, 山根英司, 横山利章, 明快 複素解析, 培風館, (2002).
- 15) K. Hashimoto, T. Sano, H. Unesaki, et al. "Rapid estimation of core-power ratio in coupled-core system by rod drop method," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **37**[7], 565-571 (2000).
- 16) A. B. Morante, "The kinetics behavior of a reactor composed of G loosely coupled cores: integral formulation," *J. Nucl. Eng.*, **18**, 547-559 (1964).
- 17) Y. Asahi, S. An, A. Oyama, "On the two-point approximation equation of reactor kinetics," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **4**[6], 315-317 (1967).
- 18) 島津洋一郎, "原子炉動特性方程式・その特徴と数値解析", 第37回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.61, (2005).
- 19) 池田秀晃, "3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用", 博士論文, 大阪大学, (2002).
- 20) A. Yamamoto, M. Tatsumi, N. Sugimura, "Numerical Solution of Stiff Burnup Equation with Short Half Lived Nuclides by the Krylov Subspace Method," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[2], 147-154 (2007).
- 21) S. Noritake, A.Imakura, Y. Yamamoto, et al., "A Large-Grained Parallel Solver for Linear Simultaneous Ordinary Differential Equations based on Matrix Exponential and its Evaluation," *Transac. of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **19**[3], 293-312 (2009). [in Japanese]

第5章 核計算におけるフィードバック計算

5.1 本章の概要

本章では、原子炉の安全性を考える上ではなくてはならない、フィードバック現象について考える。商業炉は負のフィードバック効果を担保することで、炉心の固有の安全性を有している。そのため、炉心解析では炉心のフィードバック効果を適切に取り扱わなければならない。そこで次節の冒頭では、炉心のフィードバックの種類及び発生メカニズムについて言及を行う。また同節では、様々なフィードバック効果だけではなく、実際の数値解析に用いるフィードバックモデルについても言及する。そして5.3節では、本研究で新たに開発した、フィードバック効果を考慮した自動タイムステップモデルについて述べる。

5.2 フィードバック効果

5.2.1 様々なフィードバック効果

炉心解析を行うときには、拡散方程式ないし輸送方程式を計算することで、実効増倍率や出力分布を得ることができる。しかし、この拡散方程式や輸送方程式を計算するためには、断面積が既知の値でなければならない。しかし、断面積は物質の温度や原子数密度によって変化し、物質の温度は炉心内の熱出力分布に依存し、熱出力は中性子束分布に依存する。このことから、断面積と拡散方程式や輸送方程式を計算して得られる中性子束分布は、様々なフィードバック効果を通じて相互に依存関係であることが分かる。そのため通常の炉心解析では、断面積を既知として計算するわけではなく、フィードバック効果を考慮しながら炉心解析を行う必要がある¹⁾。2章で示した定常状態の図2.3.3.1の計算フローは簡単のためにフィードバックを考慮していなかった。そこで、図5.2.1.1にフィードバックを考慮した定常状態の計算フローを示す。以下では、図5.2.1.1のフィードバックを考慮した計算フローについて述べる。

炉心解析で必要とする断面積を作成するためには、燃料セル内における詳細なエネルギー分布の計算から始まる核定数計算が必要になる。この核定数計算は、計算時間がかかることや炉心計算では同じような状態を何度も評価することから、フィードバック効果を更新するたびに核定数計算をやり直すのは効率があまりよくない。そこで一般的には、想定しうるフィードバック効果を内包する様々な条件で、核定数をフィードバック状態(燃料温度、減速材温度、ボイド率等)に応じて断面積テーブルを作成する方法がとられる²⁻⁴⁾。そこで以下では、断面積に影響を及ぼすフィードバック効果について言及を行う。

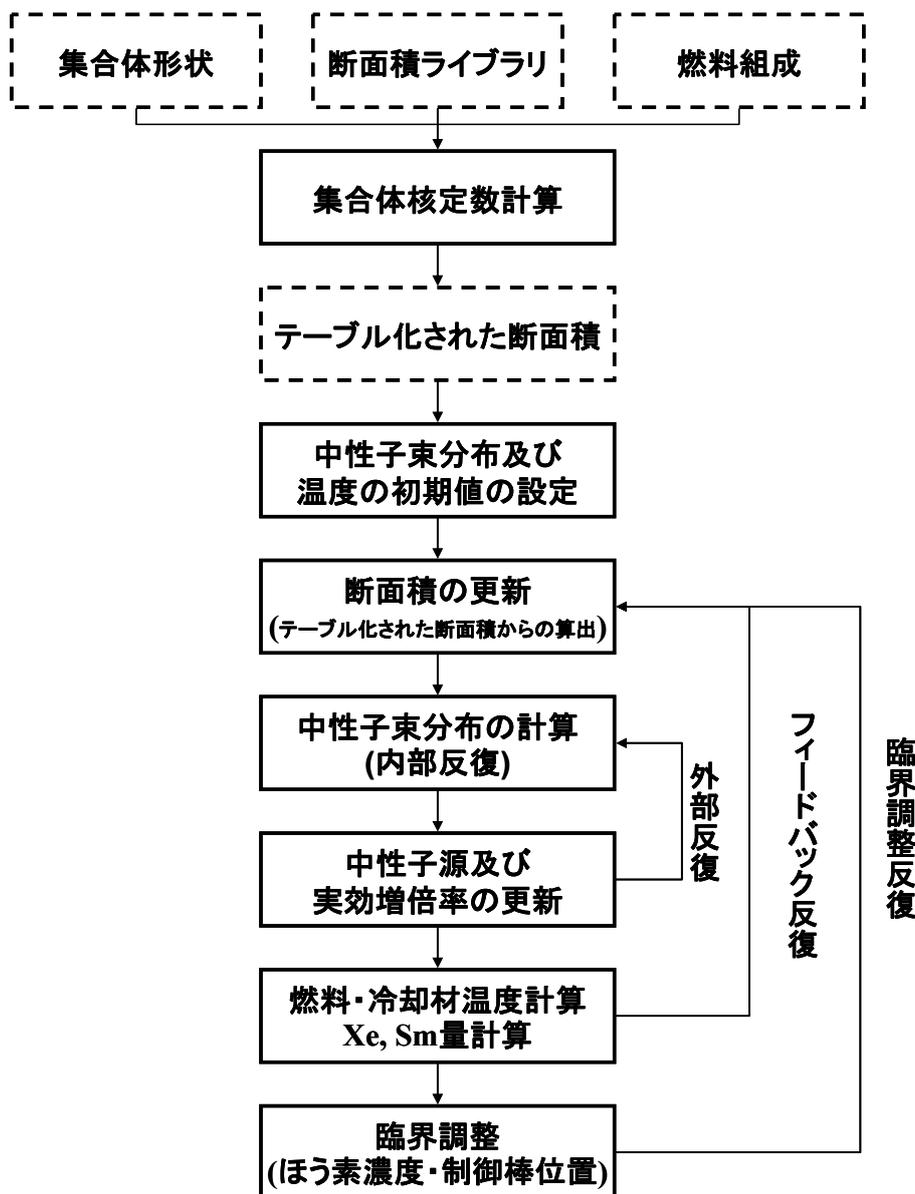


図 5.2.1.1 フィードバックを考慮した定常状態の計算フロー¹⁾

フィードバック効果は、核的フィードバックと熱水力フィードバックに大別することができる。

- 核的フィードバック
 - Xe・Sm
 - ドップラー効果
 - ホウ素濃度変化
- 熱水力フィードバック
 - 冷却材ボイド分布
 - 冷却材温度分布

以下では、それぞれのフィードバック効果について言及する。

Xe・Smについては下図に示すように、熱中性子束に対する吸収断面積が非常に大きく、炉心の実効増倍率に対する寄与が無視できないため、これらの核種による断面積変化はフィードバック効果として取り扱われることが多い¹⁾。

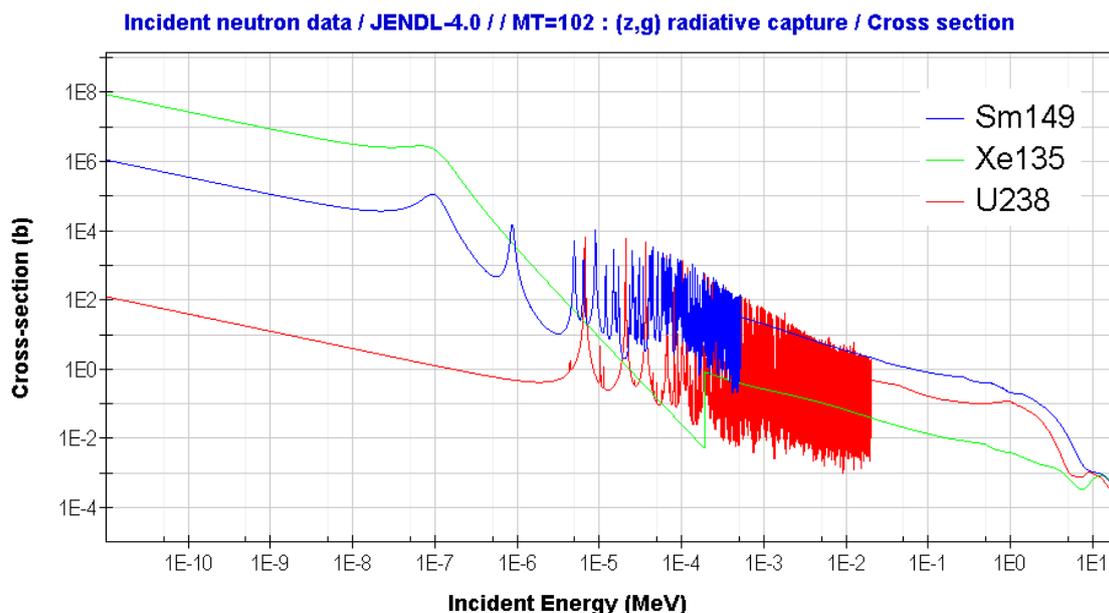


図 5.2.3.2 ^{149}Sm , ^{135}Xe 及び ^{238}U の捕獲断面積⁵⁾

ブライト・ウィグナーの公式に示されるように、燃料温度が上昇すると断面積に共鳴構造を有する ^{238}U などの核種では、ドップラー効果により断面積の形状が変化する。一般に、燃料温度上昇に伴うドップラー効果は、炉心の反応度に対して負の反応度を投入するので、炉心の安全上、ドップラー効果の評価は極めて重要になる。なお、燃料棒の熱出力から燃料温度を評価するためには、燃料の機械的な振る舞いを計算するコードが必要になる。一般的には、燃料棒の熱出力と燃料温度の関係をあらかじめコードで計算し、断面積と同様にテーブル化をする場合が多い¹⁾。なお、次章で用いる Three-Dimensional LRA BWR ベンチマーク問題⁶⁾ではドップラー効果を考慮した過渡フィードバック計算を行うが、この時のドップラー効果は簡易的なモデルで与えられている。

加圧水型原子炉(PWR)では、炉心の反応度をホウ素濃度の変化によって調整する。そのため、PWR の解析では、炉心の余剰反応度を反応度制御に必要なホウ素濃度として算出することを行う。ここまでは、核的フィードバックについて述べてきた。次に熱水力的フィードバックについて述べる。

沸騰水型軽水炉(BWR)では、炉心内の冷却材の沸騰によるボイドが存在する。ボイド分布は集合体の熱出力分によって決まるために、フィードバック効果として扱われる。なお、集合体の熱出力からボイド率への換算は、冷却材のエンタルピ計算とボイド率の予測を行う相関式に基づいて行う¹⁾。次に冷却材温度分布について述べる。

PWRでは、炉心内の冷却水は沸騰しないため、炉心下部と上部では冷却材温度が異なる⁷⁾。この冷却材温度は集合体の熱出力分布に依存するために、フィードバック計算を行う必要がある。以上のように、商業炉での炉心解析は様々なフィードバック効果が出力分布や実効増倍率に大きな影響与えるために、フィードバック効果を適切に考慮しなければならない。

5.2.2 WIGLモデル

本論文では、フィードバックがある体系での LMW ベンチマーク問題について記述するために、熱伝導方程式として WIGL モデルを導入する^{7,9)}。WIGL モデルは、軸方向のみを考慮した次元方程式である。また、ボイドの効果を考慮していないために、BWR では用いることができないが、ボイドが通常時は発生しない PWR では、適切な熱伝導を計算することが可能である⁷⁾。WIGL モデルの基礎式は次式になる。

$$\rho_f V_f C_f \frac{d\bar{T}_f}{dt} = (1-r)q'' V_f - V_c \left[\frac{1}{A_H U} + \frac{1}{A_H h_0} \left(\frac{W}{W_0} \right)^{0.8} \right]^{-1} (\bar{T}_f - \bar{T}_c) \quad (5.2.2.1)$$

$$V_c \left(\frac{\partial \rho_c H}{\partial \bar{T}_c} \right) \frac{d\bar{T}_c}{dt} = V_c \left[\frac{1}{A_H U} + \frac{1}{A_H h_0} \left(\frac{W}{W_0} \right)^{0.8} \right]^{-1} (\bar{T}_f - \bar{T}_c) + 2W_r C_c (\bar{T}_b - \bar{T}_c) + r q'' V_f \quad (5.2.2.2)$$

$$T_b = 2\bar{T}_{c,z-1} - T_{b,z-1} \quad (5.2.2.3)$$

ここで、

r : 冷却材中の出力割合

\bar{T}_f : 平均燃料温度[K]

\bar{T}_c : 平均冷却材温度[K]

T_b : ノード下端部の冷却材温度[K]

ρ_f : 燃料密度[g/cm³]

⁷⁾ BWR でも厳密には、炉心下部と上部で温度は異なるが、その差異は小さい¹⁾。

ρ_c : 冷却材密度[g/cm³]

C_f : 燃料比熱[erg/g K]

C_c : 冷却材比熱[erg/g K]

q''' : 体積エネルギー割合[erg / cm³]

V_f : 燃料体積[cm³]

V_c : 冷却材体積[cm³]

A_H : 総伝熱面積/冷却材体積[cm⁻¹]

U : 被覆管の伝導長さ割合

h_0 : 対流熱伝達率係数[erg/s cm² K]

W_0 : 初期炉心質量流量割合[g /s]

W : 炉心質量流量割合[g/s]

W_r : ノード平均の質量割合[g/s]

$\left(\frac{\partial \rho_c H}{\partial T_c} \right)$: 単位温度及び単位体積の必要熱量[erg/cm³ K]

z : 軸方向のノード番号

である。

定常状態の解析では、(5.2.2.1)及び(5.2.2.2)式の時間微分項をゼロとして計算を行う。また過渡時の計算では、時間依存拡散方程式と同様のタイムステップ幅で計算を行うことが一般的である⁷⁾。フィードバックがある LMW ベンチマークでは、この WIGL モデルと定常状態及び過渡状態の拡散方程式をカップリングして計算することで、炉心解析を行う。なお、WIGL モデルの導出方法や計算方法については、参考文献 7)を参照のこと。

5.2.3 断面積フィードバックモデル

前節では、フィードバック効果を考慮するために、熱伝導モデルの一つである WIGL モデルについて言及した。そこで本節では、WIGL モデルを計算した結果を断面積の変化量として換算するための断面積フィードバックモデルについて述べる。

本研究では用いないが、LMW ベンチマーク問題において、フィードバックがある問題の種類もある。本問題のフィードバックフィードバックモデルでは、次式のように、全ての断面積の変化を燃料温度、冷却材温度及び冷却材密度の線形と仮定している。

$$\begin{aligned}\Sigma(T_f, T_c, \rho_c) = \Sigma(T_{f0}, T_{c0}, \rho_{c0}) &+ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial T_f} \right) (T_f - T_{f0}) \\ &+ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial T_c} \right) (T_c - T_{c0}) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_c} \right) (\rho_c - \rho_{c0})\end{aligned}\quad (5.2.3.1)$$

ここで、

T_{f0} : 基準状態の燃料温度

T_{c0} : 基準状態の冷却材温度

ρ_{c0} : 基準状態の冷却材密度

T_f : 燃料温度

T_c : 冷却材温度

ρ_c : 冷却材密度

である。

また、PWR Rod Ejection ベンチマーク問題¹⁰⁻¹¹⁾で提示されているフィードバックモデルは次式のようにになっており、上式の線形モデルとは異なり燃料温度が平方根に関して線形になっている。また、PWR 特有のフィードバックである、ほう素濃度に関する項も追加されている。

$$\begin{aligned}\Sigma(T_f, T_c, \rho_c) = \Sigma(T_{f0}, T_{c0}, \rho_{c0}) &+ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \sqrt{T_f}} \right) (\sqrt{T_f} - \sqrt{T_{f0}}) \\ &+ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial c} \right) (c - c_0) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial T_c} \right) (T_c - T_{c0}) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_c} \right) (\rho_c - \rho_{c0})\end{aligned}\quad (5.3.2.2)$$

ここで、

c_0 : 基準状態のほう素濃度

c : ほう素濃度

である。

5.3 フィードバックを考慮した自動タイムステップモデル

本節では、本研究で新しく開発した、フィードバックを簡易に考慮した自動タイムステップモデルについて述べる。

前章で述べたように、DIF3D に採用されている自動タイムステップモデルは、絶対値最大の周波数が小さいときはタイムステップ幅を大きくし、絶対値最大の周波数が大きい時はタイムステップ幅を小さくするモデルを用いていた¹²⁾。このDIF3Dのモデルは、

基本的には物理的に妥当ではあるが、以下の二つの点に関して大きな欠点があると考えられる。

1. 制御棒の移動や温度フィードバックに伴い、出力変化が変わる時は過渡変化を詳細に計算する必要があるために、詳細タイムステップを用いることが望ましい。しかし本手法では、フィードバックによって出力の変化が変わる頂点では、出力変化が小さくなるので、大きなタイムステップ幅を設定しまい、計算精度が悪化する場合が考えられる。
 2. 次タイムステップ幅 Δt_{n+1}^{NEW} をより正確に計算するためには、(3.9.13)式に ω_n ではなく ω_{n+1} を用いる必要がある。
- 2 つ目の欠点を改善するためには、反復中にタイムステップ幅を変更する必要があり、計算コストが増大することは必須である。本研究では計算コストを増大することを極力避けたいために、2 つ目の欠点の改良については考えず、1 つ目の欠点の改良方法について考える。

本研究では、(3.9.13)式を次式のように変更することで、自動タイムステップモデルを改良することを試みた。

$$\Delta t_{n+1}^{NEW} = \begin{cases} \min\left(\frac{(\omega\Delta t)_{\max}}{|\omega_{n,\max}|}, \alpha\Delta t_n\right) & (\omega_{n,\min} \geq 0) \\ \min\left(\frac{(\omega\Delta t)_{\max}}{|\omega_{n,\max}| + |\omega_{n,\min}|}, \alpha\Delta t_n\right) & (\omega_{n,\max} > 0, \omega_{n,\min} < 0) \\ \min\left(\frac{(\omega\Delta t)_{\max}}{|\omega_{n,\min}|}, \alpha\Delta t_n\right) & (\omega_{n,\max} \leq 0) \end{cases} \quad (5.3.1)$$

ここで、

$\omega_{n,\min}$: 最小値の周波数⁸

α : 現ステップからの最大許容範囲値

である。

炉心全体の出力変動が小さいとしても、実際には炉内の中性子束分布は複雑な形状をしている可能性がある。中性子束分布の複雑さを反映するために、本研究で新たに開発した(5.3.1)式には以下の二つの意図がある。

1. 炉内の中性子束分布が振動しているときは領域間の中性子の相関作用が大きい。そのため、正及び負の周波数を足し合わせることで、DIF3D のタイムステップよりも

⁸ ここでいう最小値とは、 $\omega_{n,\min}$ が負であるならば、絶対値最大の負の周波数であり、 $\omega_{n,\min}$ が正であるならば、ゼロに最も近い周波数である。

小さなタイムステップを設定することができ、炉内中性子束分布を詳細に計算する事を試みている((5.3.1)式の真ん中の式)。

2. フィードバック効果で出力変化が緩やかになる時に、急激に大きなタイムステップ幅を設定することを抑制するために、前回のタイムステップ幅からの最大の変更許容範囲値 α を用いて、タイムステップの変化量を抑制している。

以上より、本ステップは DIF3D に用いられているものよりも保守的なタイムステップになるが、より計算精度が高い計算結果を得ることが期待できる。

5.4 本章のまとめ

本章で述べたことを以下にまとめる。

- ・ 商業炉の解析ではフィードバック効果を考慮するために、2 章で述べた外部反復の外側にさらに、フィードバックのための反復を行う必要がある。
- ・ フィードバック効果には、核的フィードバックと熱水力的フィードバックがあり、核的フィードバックには $Xe \cdot Sm$ 、ドップラー効果及びほう素濃度があり、熱水力フィードバックには冷却材ボイド及び冷却材温度分布がある。
- ・ 本研究で採用する熱伝導方程式として、軸方向のみの一次元方程式でボイドを考慮しない WIGL モデルを導入した。
- ・ フィードバック断面積モデルとしては、フィードバックを考慮した LMW ベンチマーク問題を用いるために、線形モデルを採用した。
- ・ 従来の自動タイムステップモデルを改善するために、最大変更制限値と正及び負の反応度を考慮した、新しい自動タイムステップモデルを提案した。

5.5 参考文献

- 1) 山本章夫, “拡散方程式の数値解法の基礎”, 36回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.47 (2004).
- 2) Y. Xu, T. Downar, *GenPMAXs Code for Generating the PARCS Cross Section Interface file PMAXS*, Purdue University School of Nuclear Engineering (2005).
- 3) T. Iwamoto, M. Yamamoto, “Advanced nodal methods of the few-group BWR core simulator NEREUS,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**[11], 996-1008 (1999).
- 4) T. Iwamoto, M. Yamamoto, “Pin Power Reconstruction Methods of the Few-Group BWR Core Simulator NEREUS,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**[12], 1141-1152 (1999).
- 5) K. Shibata, O. Iwamoto, T. Nakagawa, *et. al.*, “JENDL-4.0: A New Library for Nuclear Science and Engineering,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **48**[1], 1-30 (2011).
- 6) M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, “Development of Kinetics Model for BWR Core

- Simulator AETNA,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[4], 201-212 (2003).
- 7) C. H. Kang, “Discontinuous Space-Time Dependent Nodal Synthesis Method for Reactor Analysis,” Doctor of Science, Massachusetts institute of technology, (1996).
 - 8) J. C. Gehin, “A Quasi-Static Polynomial Nodal Method for Nuclear Reactor Analysis,” Doctor of Philosophy, Massachusetts institute of technology, (1992).
 - 9) K. Smith, “An analytical nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equation,” Nuclear engineer and Master of Science, Massachusetts institute of technology, (1976).
 - 10) 青木繁明, “動特性解析コードRANCERの開発”, 35回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.93 (2003).
 - 11) S. Aoki, T. Suemura, J. Ogawa, *et al.*, “The Verification of 3 Dimensional Nodal Kinetics Code ANCK Using Transient Benchmark Problems,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[6], 862-868 (2007).
 - 12) T. A. Taiwo, H. S. Khilil, J. E. Cahalan, E. E. Morris, Time-step selection considerations in the Analysis of Reactor transients with DIF3D-K, W-31-109-ENG-38, Reactor Analysis Division Argonne National Laboratory, (1993).

第6章 検証計算

6.1 本章の概要

3章では従来の動特性解析手法として、現在の炉心解析コードに多く採用されている、 θ 法、周波数変換法、Stiffness Confinement Method、改良準静近似法の基礎式及び特徴について述べてきた。そして4章では、本研究で新たに提案する動特性方程式として、Krylov部分空間法、Contour Integrals法、周波数関数近似法、Multigrid Amplitude Function法の基礎式及び特徴について述べてきた。また5章では、フィードバックを考慮した自動タイムステップモデルについても言及した。そこで本章では、ここまで議論してきた各計算手法の計算精度及び計算時間を比較することで、計算手法の有用性についての議論を行う。

動特性解析手法の計算精度及び計算時間についての比較を行うために、TWIGLベンチマーク問題¹⁾、LMWベンチマーク問題²⁾、LRAベンチマーク問題³⁾を用いる。TWIGLベンチマーク問題は2次元体系であり、フィードバック効果がないベンチマーク問題である。LMWベンチマーク問題は3次元PWR炉心を模擬した体系であり、制御棒の移動による出力変化がある。LRAベンチマーク問題はBWR炉心を模擬した問題であり、計算体系としては、2及び3次元がある。また、制御棒及びドップラー効果を考慮するために、フィードバックがあるやや複雑な問題となっている。これらのことから、各動特性解析手法の有用性を検討するためには、計算体系及び計算条件が最も簡易である、TWIGLベンチマーク問題を用いるのが適切であると考えられる。そのため基本的には、TWIGLベンチマーク問題を用いて従来法と本研究で提案するKrylov部分空間法、周波数関数近似法、MAF法の比較を行う。また、本研究の集大成であるMAF法に関しては、より複雑なベンチマーク問題である、LMWベンチマーク問題及びLRAベンチマーク問題を用いて、従来法との比較を行う。

6.2 TWIGLベンチマーク問題

本節では、2次元体系のベンチマーク問題である TWIGL ベンチマーク問題¹⁾を用いて、本研究で開発した手法と従来法の比較を行う。TWIGL ベンチマーク問題の計算体系及び使用核定数を図 6.2.1 及び表 6.2.1 に示す。

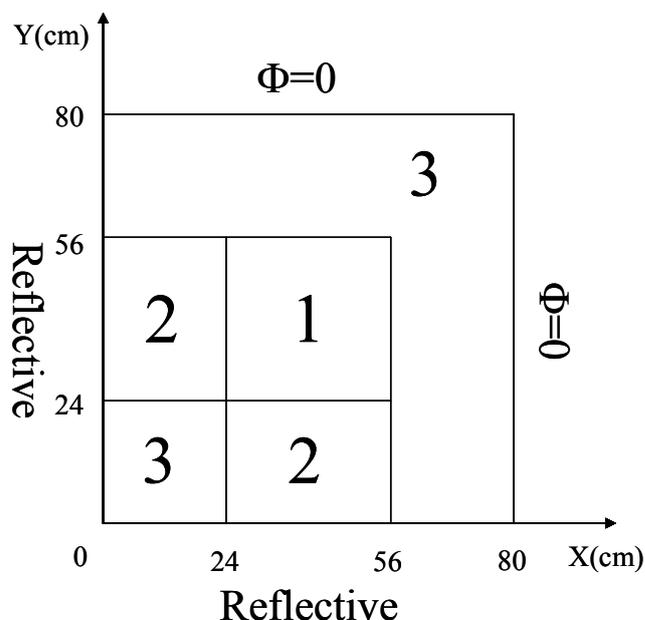


図 6.2.1 TWIGL ベンチマークの計算体系

表 6.2.1 TWIGL ベンチマーク問題の使用核定数

Material	Group	D[cm]	$\Sigma_a[\text{cm}^{-1}]$	$\nu \Sigma_f[\text{cm}^{-1}]$	χ	$\Sigma_s[\text{cm}^{-1}]$	
						g→1	g→2
1	1	1.4	0.010	0.007	1.0	0.0	0.01
	2	0.4	0.150	0.200	0.0	0.0	0.00
2	1	1.4	0.010	0.007	1.0	0.0	0.01
	2	0.4	0.150	0.200	0.0	0.0	0.00
3	1	1.3	0.008	0.003	1.0	0.0	0.01
	2	0.5	0.050	0.060	0.0	0.0	0.00
	ν	$\nu_1[\text{cm/s}]$	$\nu_2[\text{cm/sec}]$	β		$\lambda[\text{sec}^{-1}]$	
	2.43	1.0E+07	2.0E+05	0.0075		0.08	

TWIGL ベンチマーク問題では、図 6.2.1 に示す領域 1 及び 2 が同一組成の燃料で構成されているが、領域 1 には制御棒が挿入されている。エネルギー群数は表 6.2.1 に示すように 2 群であり、遅発中性子先行核は 1 群である。炉心への反応度投入方法としては、次式に示すように、反応度の投入方法としてステップ状及びランプ状の正の反応度を領

域 1 の熱群に与える。

$$\text{Step: } \Sigma_{a,2}(t) = \Sigma_{a,2}(0) - 0.0035 \quad t = 0.0 \text{ sec} \quad (6.2.1)$$

$$\text{Ramp: } \begin{aligned} \Sigma_{a,2}(t) &= \Sigma_{a,2}(0) \times (1 - 0.11667t) & t \leq 0.2 \text{ sec} \\ \Sigma_{a,2}(t) &= \Sigma_{a,2}(0) \times (0.97666) & t > 0.2 \text{ sec} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

(6.2.1)及び(6.2.2)より、反応度の投入方法がステップ状の時は瞬間的に反応度が投入され、反応度の投入方法がランプ状の時は反応度が徐々に投入されることが分かる。以降では、投入方法がステップ状の時はステップ状、反応度の投入方法がランプ状の時はランプ状と記述する。

上述したように、TWIGLベンチマーク問題は2次元体系で簡易な動特性ベンチマーク問題であるので、各種動特性解析手法のみの性能を比較する上では、適切なベンチマーク問題であると考えられる。そのため、本ベンチマーク問題を通して、以下では提案手法の有用性について詳細に議論を行う。

6.2.1 Krylov部分空間法と従来法の比較

提案手法と従来法の比較として、まず初めに Krylov 部分空間法と従来法の比較を行う。本節で比較を行う手法としては、以下の3つの手法を用いる。

1. Krylov 部分空間法 (Krylov)
2. θ 法 (Theta)
3. 周波数変換法と θ 法の組み合わせた手法 (FT+T)

Krylov 部分空間法では Arnoldi 法を用いて部分空間への変換を行い、部分空間に圧縮した指数行列は Padé 近似と Scaling and Squaring 法を用いて計算を行う。なお、Padé 近似法の展開次数は、計算精度の観点から展開次数を $p = 6$ とすることで十分であることが参考文献 4)より分かっている。一方従来法の計算手法としては、 θ 法及び周波数変換法の内部反復は、ガウス・ザイデル法⁵⁾に SOR 法を組み合わせた手法を用いており、加速法としては、CMFD 加速及び Simplified Fixed Source Scaling factor 法を用いている。また、周波数変換法は周波数を外部反復毎に更新することで、見かけ上の微分値を小さくすることを行っている⁶⁾。 θ 法及び周波数変換法の θ は $\theta = 0.5$ で固定している。なお、本節で用いる周波数変換法は PARCS コードと同様の方法を用いている⁶⁾。

Krylov 部分空間法は部分空間に圧縮するので、一般的な動特性計算手法とは計算スキームが全く異なる。そのため、Krylov 部分空間法におけるメッシュ数と計算時間の相関性を検討するために、オリジナルの TWIGL ベンチマーク問題を拡張した問題を本研究では用いた。オリジナル問題の拡張した体系としては、オリジナル問題の境界条件を考慮することで同一計算結果を得ることができる、図 6.2.1.1 で示す全炉心の2次元 TWIGL 体系を検証計算に用いる。

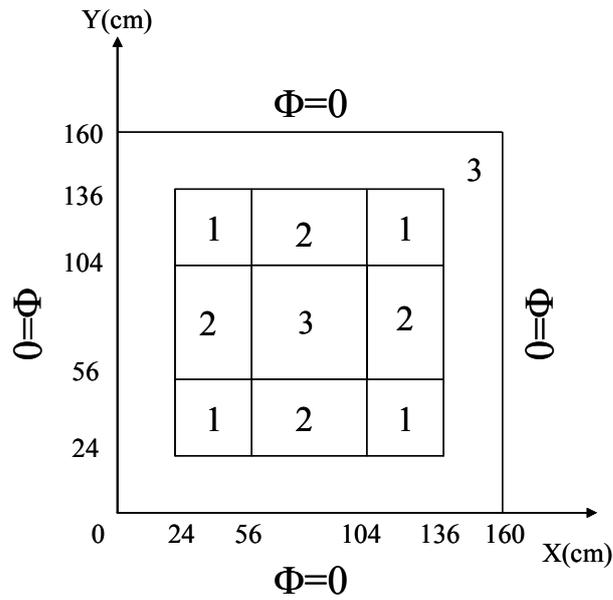


図 6.2.1.1 2次元全炉心 TWIGL ベンチマーク問題

また、上部と下部を反射条件にすることで、オリジナルの TWIGL ベンチマーク問題と同様な計算結果が得られる、図 6.2.1.2 と 6.2.1.3 に示した仮想的な 3次元の 1/4 炉心と全炉心の TWIGL ベンチマーク問題を検証計算に用いた。

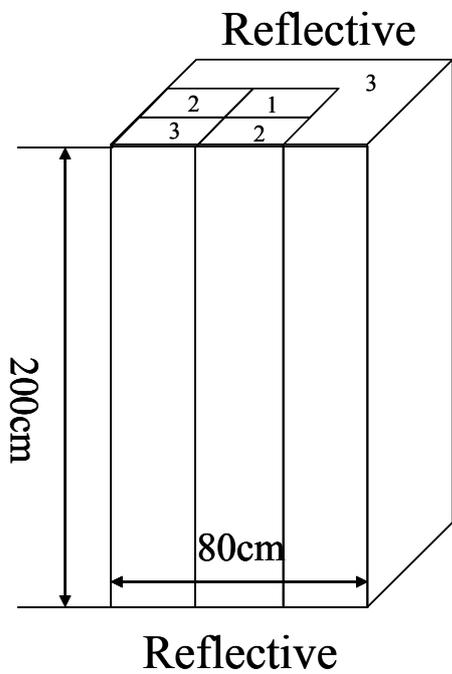


図 6.2.1.2 3次元 1/4 炉心体系

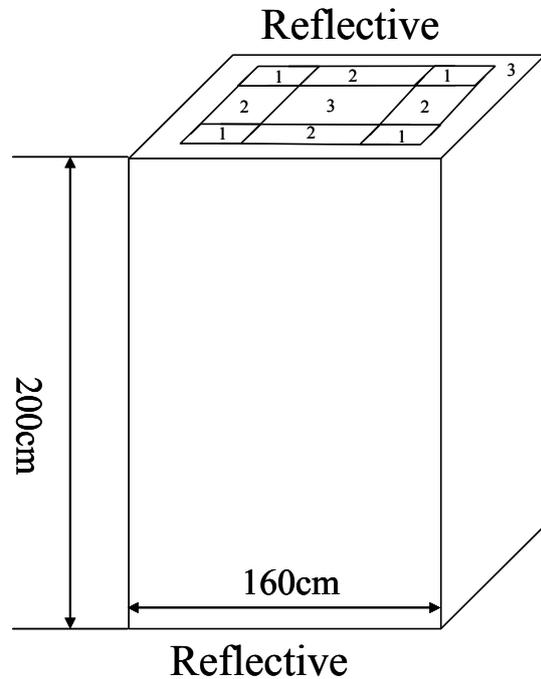


図 6.2.1.3 3次元全炉心体系

本節では、各計算手法の空間メッシュ幅を $\Delta x:\Delta y:\Delta z=4cm:4cm:10cm$ として全ての計算体系で固定しており、空間離散化は全て有限差分法を用いている。また、 θ 法及び周波数変換法の収束条件は 1.0×10^{-8} とし、遅発中性子先行核密度の計算は θ 法で差分した(3.7.1.3)式を用いた。

Krylov 部分空間法、 θ 法、周波数変換法の各計算手法の計算時間を適切に評価するために、各計算手法の計算精度が同程度になるように感度解析を行う。そこで、各計算手法の計算精度を比較するために、次式の最大相対差異を用いる。

$$\text{Maximum relative difference} = \underset{t=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \text{ sec}}{\text{Max}} \left| \frac{\text{power}(t) - \text{power}^{\text{ref}}(t)}{\text{power}^{\text{ref}}(t)} \right| \quad (6.2.1.1)$$

ここで、

$\text{power}(t)$: 時刻 t の相対出力

$\text{power}^{\text{ref}}(t)$: タイムステップ幅 $\Delta t=0.01\text{ms}$ 及び部分空間数 $m=100$ で計算した Krylov部分空間法で計算した参照解

である。

以下では、(6.2.1.1)式の最大相対差異が $1.0 \times 10^{-3}\%$ になるように計算条件のサーベイを行っていく。まず初めに、ステップ状の感度解析を行っていく。

従来法(Theta、FT+T法)は計算精度に寄与するパラメータとしては、タイムステップ幅のみである。従来法の計算精度及びタイムステップ幅の相関性を下図に示す。

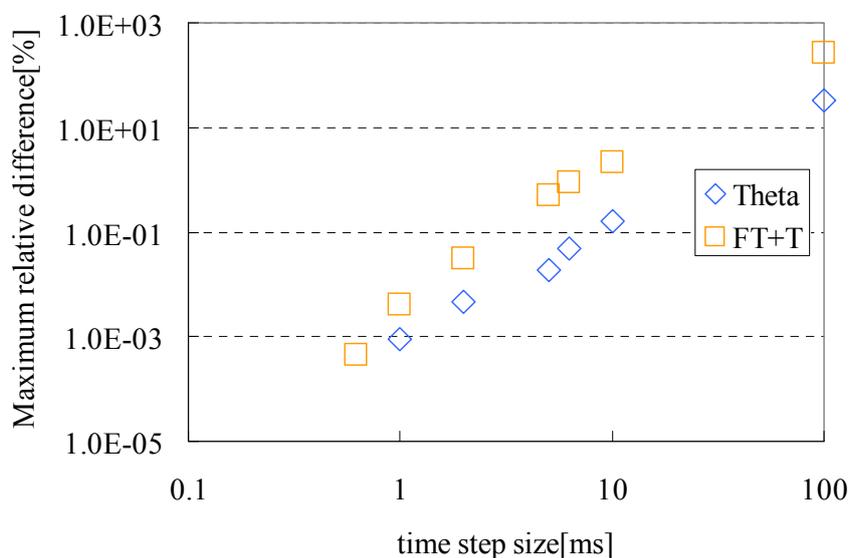


図 6.2.1.4 θ 法及び周波数変換法の最大相対差異とタイムステップ幅の相関性
(反応度投入方法：ステップ状)

図 6.2.1.4 より、 θ 法は $\Delta t=1\text{ms}$ 、周波数変換法は $\Delta t=0.625\text{ms}$ の時に、今回設定した $1.0 \times 10^{-3}\%$ の最大相対差異を満足していることが確認できる。よって、本条件をステップ状の θ 法と周波数変換法の計算条件として採用する。なお、ステップ状において周波数変換法が θ 法よりも計算精度が優れていない理由は次のとおりである。下図に示すように、ステップ状の反応度時は摂動直後に炉心出力が急激に立ち上がっており、指数関数状に変化していないことによる。そのため、指数関数状に変化するという仮定を用いている周波数変換法は、本仮定のせいでステップ状の場合はかえって計算精度が低下すると考えられる。

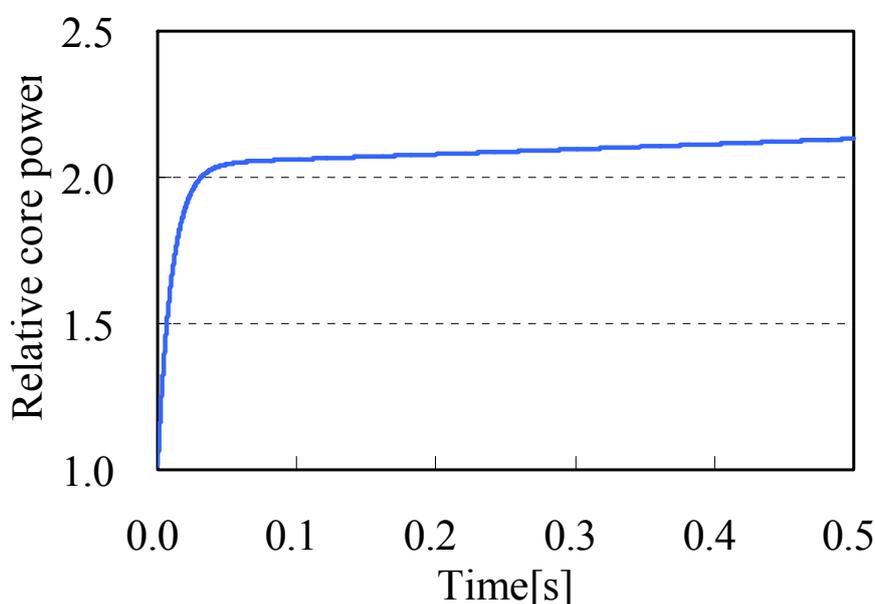


図 6.2.1.5 TWIGL ベンチマーク問題におけるステップ状の相対出力の変化

また図 6.2.1.4 より、タイムステップ幅の変化に伴う θ 法及び周波数変換法の最大相対差異の変化の傾向が、ほぼ同じ変化あることが確認できる。この原因としては、中性子束の時間変化を指数関数状と近似するか否かに関わらず、両手法共に $\theta=0.5$ のクラנק・ニコルソン法で時間微分項を差分化しているために、時間に関する離散化誤差が同程度になると考えられる。以上が、ステップ状に対する従来法の感度解析であった。次に、ステップ状に対する Krylov 部分空間法の感度解析を行う。

4 章の Krylov 部分空間法の基礎式の導出において、Krylov 部分空間法には従来法と同様のタイムステップ幅に加え、部分空間数も計算精度に寄与するパラメータであることを示した。そのため、Krylov 部分空間法の計算精度に対するパラメータの感度解析は、タイムステップ幅と部分空間数の二つに対して行う必要がある。また、Krylov 部分空間法を用いた動特性計算手法を導出する際に、断面積がタイムステップ内

で一定であるという仮定を用いた。しかし、本仮定は後述するランプ状では非常に大きな問題となるが、断面積がタイムステップ内で変化しないステップ状では問題にならない。そのため、Krylov 部分空間法でステップ状を計算する時は、タイムステップ幅をどんなに大きくしたとしても、十分な部分空間数さえ設定すれば非常に高精度な計算結果を得ることが可能となる。このことから、(6.2.1.1)式を満たす最大のタイムステップは 100ms であるので、ステップ状では Krylov 部分空間法の計算時間を短くするために、Krylov 部分空間法のタイムステップ幅を $\Delta t=100\text{ms}$ とする。タイムステップ幅を $\Delta t=100\text{ms}$ で固定した時、部分空間数に対する計算精度の感度解析を行った。最大相対差異と部分空間数の感度解析の結果を下図に示す。

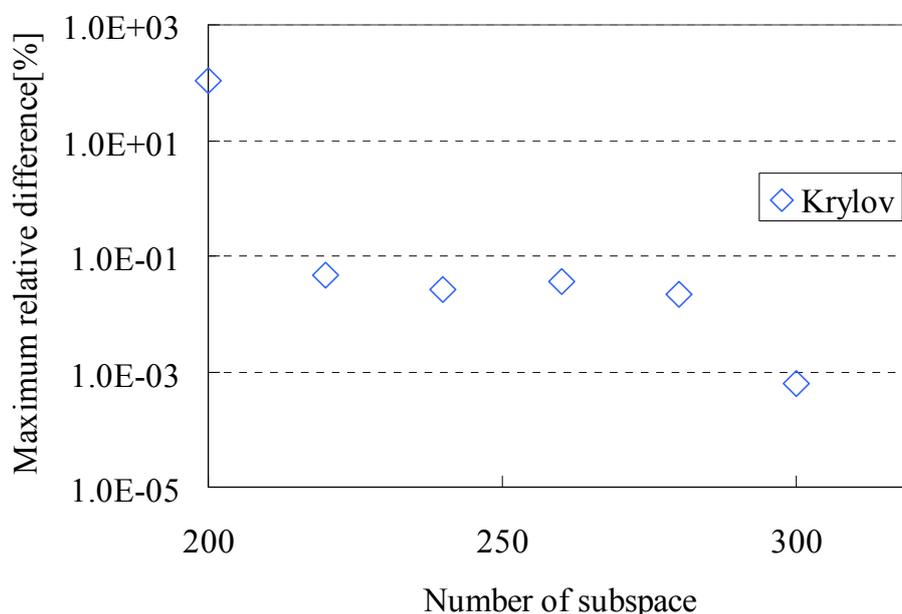


図 6.2.1.6 Krylov 部分空間法の最大相対差異と部分空間数の相関性
(反応度投入方法：ステップ状、 $\Delta t=100\text{ms}$)

ここで、部分空間数を 300 以上の時も感度解析を行ったが、図 6.2.1.6 に示せる範囲の最大相対差異を大きく下回っているために、図 6.2.1.6 には表示されていない。図 6.2.1.6 より、部分空間数が 300 の時に最大相対差異が目標値を達成できていることを確認できる。そのため、部分空間数が 300 の時の Krylov 部分空間法でステップ状の計算を行えばよいということになる。しかし後述するように、Krylov 部分空間法と Scaling and Squaring 法の組み合わせは数値不安定性を有している。そのため、3次元体系のような大型な体型でも安定して計算できるようにかつ計算体系間の整合性を保つために、部分空間数を 380 とした。

本研究で用いる Krylov 部分空間法は指数行列に関する計算方法であるが、一般的によく用いられている Krylov 部分空間法は連立一次方程式の解法である。連立方程式の解法としての Krylov 部分空間法にも部分空間数という概念があるが、この場合に用いられる部分空間数は高々10程度である⁷⁾。一方、上記した動特性計算に適用する Krylov 部分空間法に用いる部分空間数は380と大きな値となっている。この部分空間数の大きな違いの原因としては、計算に用いる行列のスペクトル半径が大きく異なるためである。連立方程式を計算する際の係数行列のスペクトル半径は、反復法で収束解が得られることを考慮すると、1未満であることが分かる。一方、動特性方程式に用いる係数行列 $\Delta t \mathbf{A}$ のスペクトル半径は、4章の Contour Integrals 法の図 4.3.3.1 に示すように、非常に大きな値である。これは、中性子の速度が非常に大きいことによる。後述するように、行列のスペクトル半径が大きくなるにつれて、Krylov 部分空間法の計算精度は低下する。そのため、スペクトル半径が非常に大きな動特性方程式を精度よく計算するためには、大きな部分空間数が必要となる。なお、スペクトル半径が小さい燃焼計算のための指数行列には、部分空間数が20程度で十分であるという報告がされている⁸⁾。

また、部分空間数が増加することに伴い、部分空間に変換する際の直交変換の計算精度が低下する。このことに起因する計算結果の精度低下が報告されている⁹⁾。直交変換の計算精度を向上させるために、Arnoldi 法の Modified Gram-Schmidt 法を複数回実施する方法や Householder 変換を用いる方法が提案されている⁹⁾。本研究でも部分空間数増加に対して直交変換に誤差が発生することを確認したが、後述するように、部分空間数を増加させることで計算値が参照解に収束したので、本研究においては大きな問題にはならないことを確認した。

以降では、ランプ状についての感度解析を行う。ランプ状では断面積が時間と共に変化していくが、従来法においては、計算精度に与えるパラメータがタイムステップ幅のみであるので、ステップ状と同様にタイムステップ幅のみのパラメータサーベイを行えばよい。ランプ状における従来法の感度解析の結果を図 6.2.1.7 に示す。

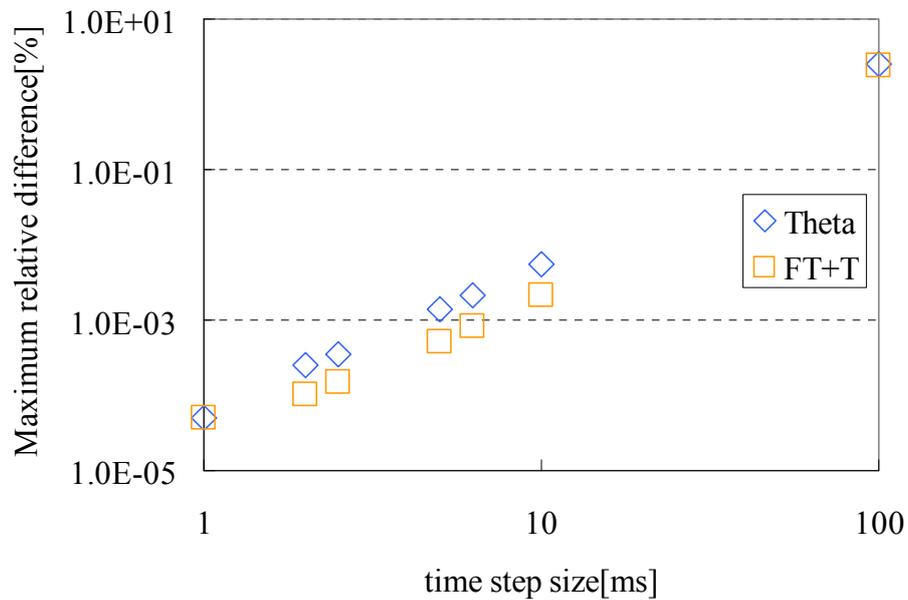


図 6.2.1.7 θ 法及び周波数変換法の最大相対差異とタイムステップ幅の相関性
(反応度投入方法：ランプ状)

図 6.2.1.7 より、 θ 法は 2.5ms、周波数変換法は 6.25ms で目標値を達成していることを確認できる。ステップ状と比較して、ランプ状ではタイムステップ幅を大きく設定できる原因としては、ランプ状の方が時間に対して緩やかに変化するために、ランプ状の方が時間微分項の離散化誤差が小さいためと考えられる。またステップ状と異なり、ランプ状では周波数変換法の計算精度が優れていることが上図より確認できる。原因は、図 6.2.1.8 に示すように、ランプ状の出力変化が指数関数状に変化しているためと考えられる。

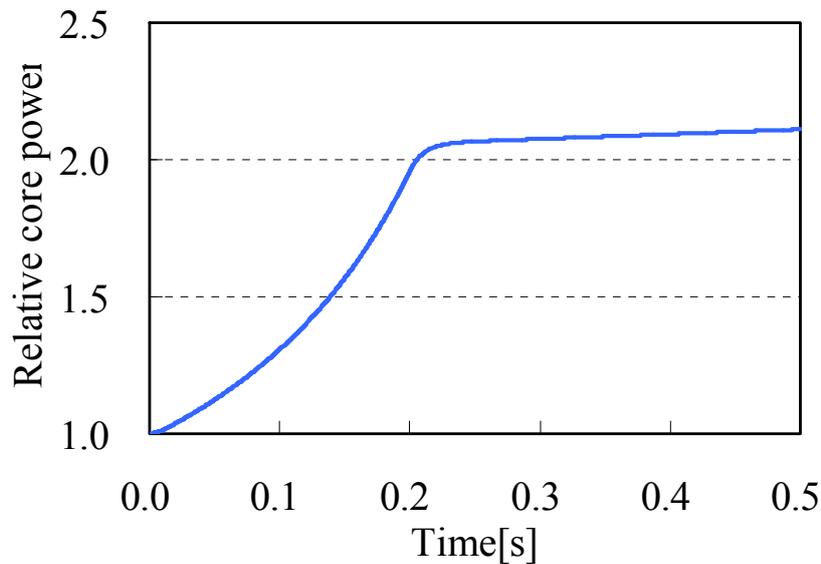


図 6.2.1.8 TWIGL ベンチマーク問題におけるランプ状の相対出力の変化

ランプ状における Krylov 部分空間法の感度解析は、ステップ状反応度添加のように、一つのパラメータ(部分空間数)のみに対しての感度解析を行うのではない。上述したように、Krylov 部分空間法は動特性方程式を計算する際に、断面積がタイムステップ内で一定であるという仮定を用いている。そのためステップ状とは異なり、ランプ状では断面積の時間依存性を考慮するために、Krylov 部分空間法に関してもタイムステップ幅をある程度詳細に設定しなければならない。このことから、ランプ状における Krylov 部分空間法の感度解析は、タイムステップ幅と部分空間数の二つのパラメータに対して行う必要がある。まず初めに、断面積の時間依存性を考慮するために、Krylov 部分空間法のタイムステップ幅の決定を行う。以下では、Krylov 部分空間法においてタイムステップ内の平均の断面積を用いることで、断面積の時間依存性を簡易的に扱ったモデルについての感度解析を行う。

先のステップ状の計算結果から、部分空間数が 300 程度で十分よい計算精度を得ることが分かっているので、部分空間数を 300 で固定したときのタイムステップ幅と計算精度の相関についての感度解析を行なった。感度解析の結果を図 6.2.1.9 に示す。

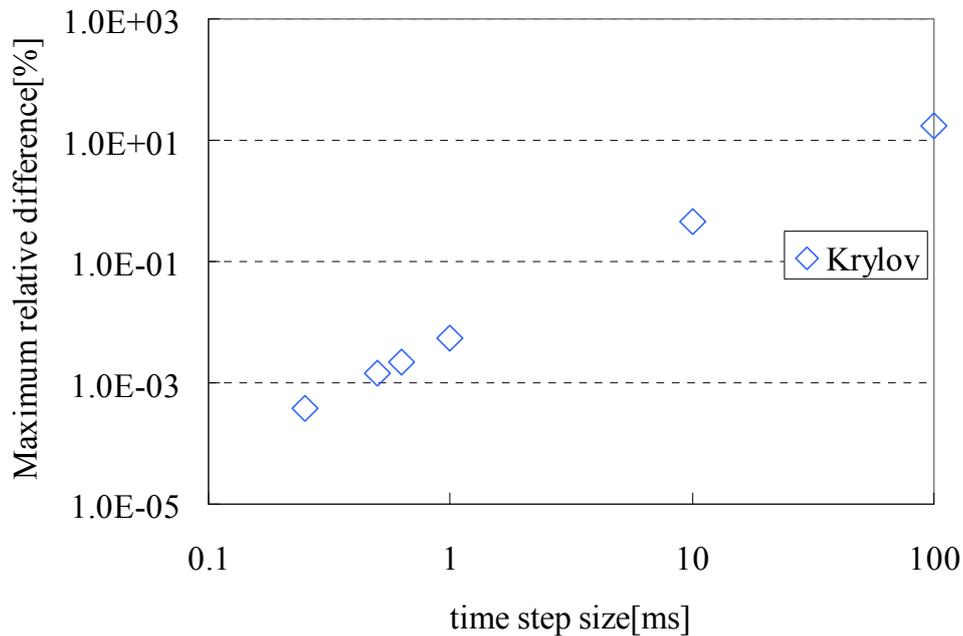


図 6.2.1.9 Krylov 部分空間法の最大相対差異とタイムステップ幅の相関性
(反応度投入方法：ランプ状、 $m=300$)

部分空間数を 300 に設定したにも関わらず、図 6.2.1.9 より、タイムステップ幅 $\Delta t=0.625\text{ms}$ と詳細にしなければ目標値を達成できないことが分かる。このことより、ランプ状においては断面積の変化が適切に扱えていないために、Krylov 部分空間法の計算差異は主として時間の離散化誤差によることになる。なお、Appendix D に記述しているように、タイムステップ平均の断面積を用いる方法以外についても検討を行なったが、根本的な解決策を得ることは困難であった。以上より、ランプ状における Krylov 部分空間法のタイムステップ幅は $\Delta t=0.625\text{ms}$ で目標値を満足することが分かった。そこで次に、タイムステップ幅を $\Delta t=0.625\text{ms}$ と固定し、Krylov 部分空間法の部分空間数についての感度解析を行った。計算精度と部分空間数の感度解析の結果を図 6.2.1.10 に示す。

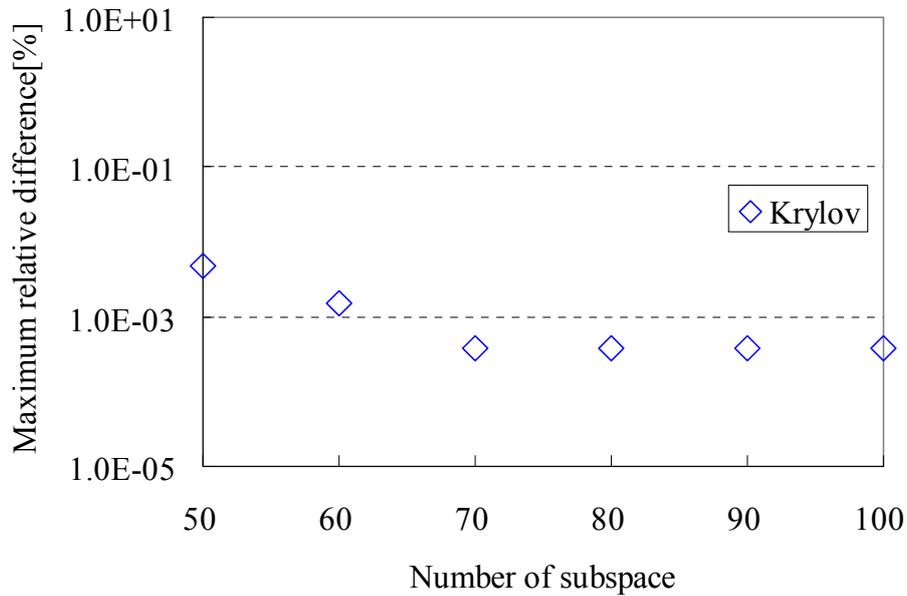


図 6.2.1.10 Krylov 部分空間法の最大相対差異と部分空間数の相関性
(反応度投入方法：ランプ状、 $\Delta t = 0.625\text{ms}$)

図 6.2.1.10 より、部分空間数が 70 程度で目標値を満足しており、また、計算精度がほぼ収束していることが確認できる。以上までの感度解析結果をまとめ、本節で用いる各計算手法の計算条件を以下に示す。

表 6.2.1.1 本節で用いる計算条件

ステップ状			ランプ状		
Theta	FT+T	Krylov	Theta	FT+T	Krylov
$\Delta t = 1\text{ms}$	$\Delta t = 0.625\text{ms}$	$\Delta t = 100\text{ms}, m = 380$	$\Delta t = 2.5\text{ms}$	$\Delta t = 6.25\text{ms}$	$\Delta t = 0.625\text{ms}, m = 70$

上記の計算条件を用いて、オリジナルの TWIGL ベンチマーク問題を計算した時の計算結果を以下に表 6.2.1.2 及び 6.2.1.3 に示す。表 6.2.1.2 より、自作計算コードで計算した Krylov 部分空間法、 θ 法及び周波数変換法の計算結果は、SPANDEX コードとよい一致をしていることより、適切に動特性計算コードを作成できたことを確認した。また、自作コードの結果は各手法とも一致しており、計算結果が十分に収束していること及び Krylov 部分空間法を適切に実装できたことを確認した。これより、自作計算コードの妥当性を確認できたため、以下では、各計算手法の有用性についての検討を行っていく。

表 6.2.1.2 TWIGL ベンチマーク問題の計算結果(ステップ状)

	SPANDEX ¹⁰⁾	Krylov (m=380)	θ method ($\theta=0.5$)	Frequency ($\theta=0.5$)
Mesh structure	20×20	20×20	20×20	20×20
Time step size(ms)	0.100	100.0	1.000	0.625
Relative power				
0.0s	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1s	2.062	2.062	2.062	2.062
0.2s	2.079	2.079	2.079	2.079
0.3s	2.096	2.096	2.096	2.096
0.4s	2.114	2.114	2.114	2.114
0.5s	2.131	2.132	2.132	2.132

表 6.2.1.3 TWIGL ベンチマーク問題の計算結果(ランプ状)

	SPANDEX ¹⁰⁾	Krylov (m=70)	θ method ($\theta=0.5$)	Frequency ($\theta=0.5$)
Mesh structure	20×20	20×20	20×20	20×20
Time step size(ms)	0.100	0.250	2.500	6.250
Relative power				
0.0s	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1s	1.309	1.308	1.308	1.308
0.2s	1.960	1.959	1.959	1.959
0.3s	2.075	2.076	2.076	2.076
0.4s	2.092	2.093	2.093	2.093
0.5s	2.110	2.111	2.111	2.111

上記で今回新たに設定した修正 TWIGL ベンチマーク問題を用いて、表 6.2.1.1 の計算条件で計算した時の計算結果を図 6.2.1.11 及び図 6.2.1.12 に示す。なお、図 6.2.1.11 及び図 6.2.1.12 は、各計算体系における従来法と Krylov 部分空間法の相対計算時間を示し、縦軸が 1 以下の場合には Krylov 部分空間法の方が高速に計算できており、反対に 1 より大きい場合は、Krylov 部分空間法の計算時間は従来法よりも劣っていることになる。

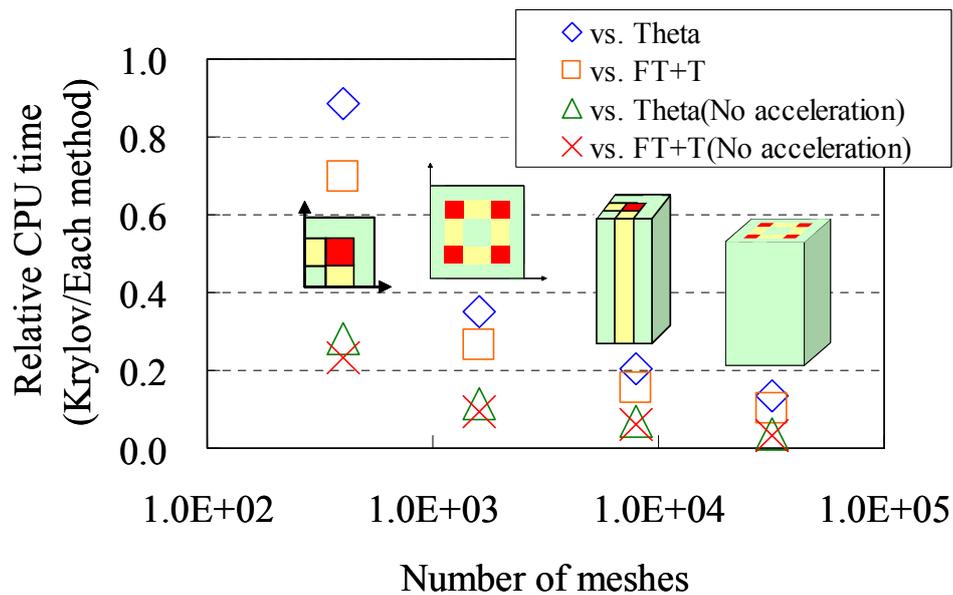


図 6.2.1.11 Krylov 部分空間法と従来法の計算時間の比較
(反応度投入方法：ステップ状)

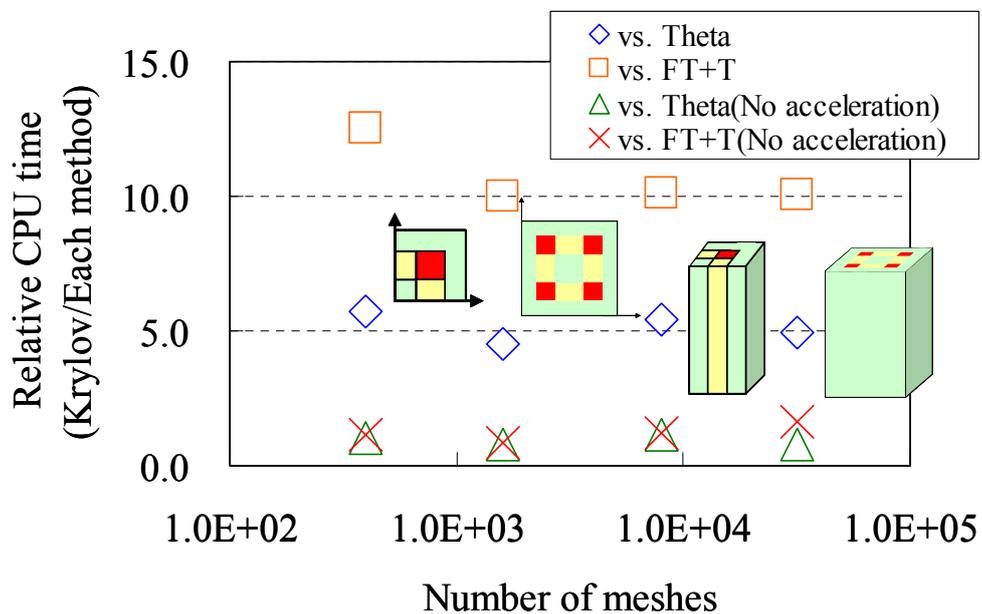


図 6.2.1.12 Krylov 部分空間法と従来法の計算時間の比較
(反応度投入方法：ランプ状)

図 6.2.1.11 より、全ての計算体系において、Krylov 部分空間法は従来法よりも高速に計算できていることが分かる。また計算体系が大きくなるほど、従来法に比べ Krylov 部

分空間法はより高速に計算できていることが分かる。最も大きな3次元全炉心体系において、Krylov部分空間法は、周波数変換法の加速法ありとなしの場合と比較して10倍及び30倍高速に計算できていることを確認した。

一方、ランプ状の計算結果については、全ての計算体系において、加速法を用いる従来法の方がKrylov部分空間法よりも高速に計算できており、加速法を用いていない従来法と同程度であることが図6.2.1.12より確認できる。このように、従来法よりKrylov部分空間法が計算時間を必要とする原因は、従来法のタイムステップ幅と比較して、Krylov部分空間法のタイムステップ幅が非常に小さいことによる。そのため、ランプ状のようにタイムステップ内で断面積が変化している場合でも、Krylov部分空間法を効率よく計算するためには、断面積の取扱方法を改良しなければならない。

各計算手法におけるメッシュ数と計算時間の相関を検討するために、各計算手法におけるオリジナルのTWIGLベンチマーク問題の計算時間を1と規格化したときの相対計算時間を図6.2.1.13及び図6.2.1.14に示す。

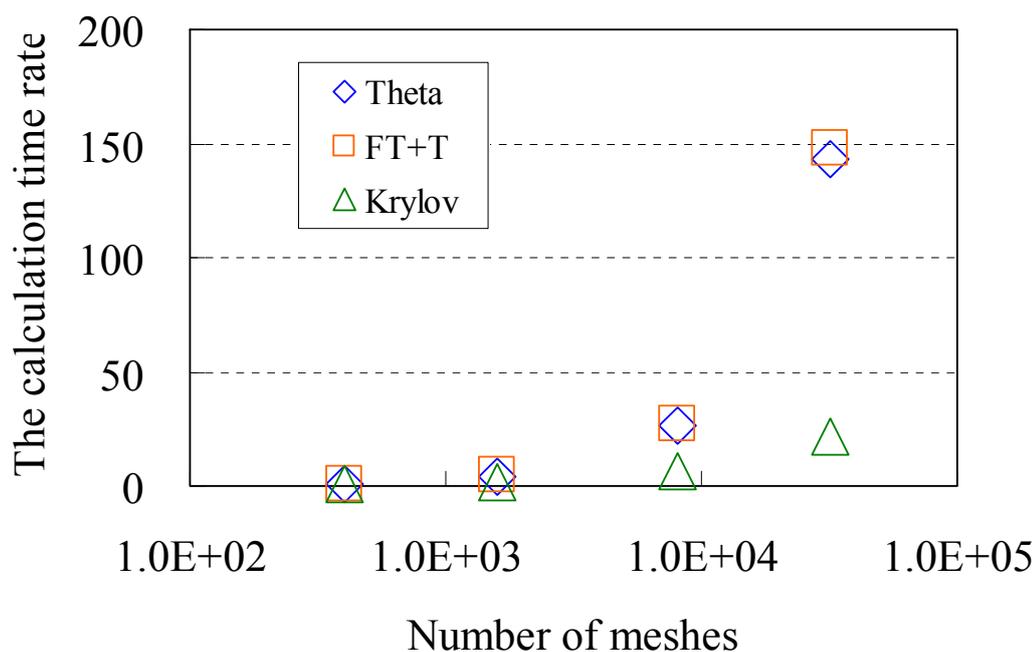


図 6.2.1.13 各計算手法におけるメッシュ数と相対計算時間の相関
(反応度投入方法：ステップ状)

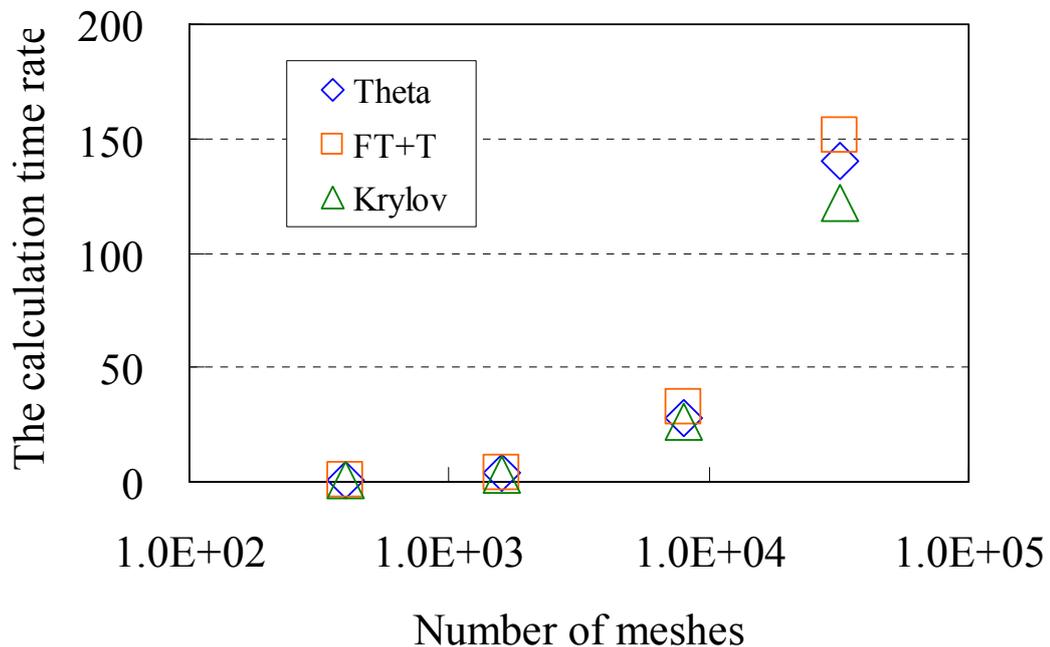


図 6.2.1.14 各計算手法におけるメッシュ数と相対計算時間の相関
(反応度投入方法：ランプ状)

ステップ状の計算結果である図 6.2.1.13 より、従来法では 3 次元全炉心体系では、2 次元 1/4 炉心の 150 倍程度の計算時間を必要としているが、Krylov 部分空間法では 20 倍程度の計算時間の増加ですんでいる。すなわち、ステップ状の反応度添加の場合は、Krylov 部分空間法を用いることで計算体系が大型になっても計算時間の増加量が比較的小さいために、大型体系に適していることが分かる。一方、ランプ状の計算結果である図 6.2.1.14 より、ステップ状よりは顕著ではないとしても、計算体系が大型化に伴う計算時間の増加量は従来法よりも小さいことが確認できる。

図 6.2.1.13 及び 6.2.1.14 より、従来法よりも Krylov 部分空間法は大型な計算体系に適していることが分かる。Krylov 部分空間法の計算時間は主に以下の二つの部分に分けることが可能である。

1. 部分空間への変換とオリジナルの空間への変換
2. 部分空間内の指数行列の計算

部分空間内の指数行列の計算時間は、部分空間数に大きく依存している。本研究では、2 次元 1/4 炉心から 3 次元全炉心体系の全ての計算体系において、Krylov 部分空間法では同じ部分空間数を用いてきた。そのため、Krylov 部分空間法で効率よく計算するためには、部分空間数の選定が非常に重要な因子になる。

指数行列を計算するための Krylov 部分空間法の上界は次式で与えられている^{9,11)}。

$$Error \leq \begin{cases} 10 \|\bar{\psi}(t)\|_2 \exp(-4m^2/5\rho\Delta t) & (\sqrt{\rho\Delta t} \leq m < \rho\Delta t/2) \\ 40/\rho\Delta t \|\bar{\psi}(t)\|_2 \exp(-\rho\Delta t/4)(e\rho\Delta t/4m)^m & (m \geq \rho\Delta t/2) \end{cases} \quad (6.2.1.2)$$

ここで、

$\rho[1/s]$: 動特性方程式の係数行列 \mathbf{A} のスペクトル半径

$\Delta t[s]$: タイムステップ幅

e : 自然対数の底

である。

(6.2.1.2)式より、係数行列 \mathbf{A} のスペクトル半径が小さくなれば、Krylov 部分空間法の計算誤差は小さくなるのが分かる。また、スペクトル半径を小さくするためには、タイムステップ幅を小さくすればよいことが分かる。(6.2.1.2)式を用いることで、Krylov 部分空間法の計算誤差を扱うことが可能であると考えられる。しかし、参考文献 8)より、本研究で用いているような非常に大きなスペクトル半径の場合は、(6.2.1.2)式で算出する誤差は非常に過大評価となるため、適切に部分空間数を逆算できないことが示されている。そのため、Krylov 部分空間法を炉物理における動特性方程式に適用した場合、(6.2.1.2)式を用いてもスペクトル半径から適切な部分空間数を逆算することができない。

また(6.2.1.2)式より、Krylov 部分空間法の計算誤差は行列の要素数ではなくて、スペクトル半径に依存していることが分かる。そのため、Krylov 部分空間法は、スペクトル半径が同じであるならば、計算精度は行列の要素数に依存しない。詳細は Appendix に示すが、本節で用いた 2次元 1/4 炉心から 3次元全炉心体系の全ては、スペクトル半径が同程度である。そのため、体系の増加に伴い部分空間数を増加させる必要がなく、全ての計算体系に同じ部分空間数を適用することが可能であった。

ステップ状及びランプ状の TWIGL ベンチマーク問題の検証計算を通じて、いくつかの計算条件で Krylov 部分空間法に対する数値不安定性を確認した。そこで、この数値不安定性についての原因及び抑制方法についての検討を行うために、オリジナルの TWIGL ベンチマーク問題を用いて感度解析を行なった。ステップ状でタイムステップ幅を 10ms とし、様々な部分空間数で計算を行ったときの解析結果を表 6.2.1.4 に示す。なお、ここでの数値不安定性は、計算結果が発散することを示している。

表 6.2.1.4 部分空間数と数値不安定性(ステップ状、 $\Delta t=10\text{ms}$)

Number of Krylov Subspace	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
stable or unstable	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
Number of Krylov Subspace	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
stable or unstable	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

*○: stable, ×: unstable

表 6.2.1.4 より、部分空間数が 120 の時、Krylov 部分空間法に数値不安定性は確認できなかったが、部分空間数が 130~160 の時は数値不安定性を確認した。一方、部分空間数が 170 以上の時は Krylov 部分空間法に数値不安定性がなく、安定して計算することが可能であった。(6.2.1.2)式の誤差の上界の式及び表 6.2.1.4 より、Krylov 部分空間法の数値不安定性は、Krylov 部分空間法の計算精度に依存していると考えられる。そこで、この仮定についての検証を行うために、Krylov 部分空間法で得られた計算結果の精度について検証を行う。検証を行う方法としては、次式に示すように、0.5sec 時の中性子束及び遅発中性子先行核密度からなるベクトルの最大相対差異を用いる。また参照解として、部分空間数を十分に大きな 600 の時の結果を用いた。

$$\text{Relative error} = \max_i \left| \frac{\vec{\psi}_{m,i} - \vec{\psi}_{600,i}}{\vec{\psi}_{600,i}} \right| \quad (6.2.1.3)$$

ここで、

$\vec{\psi}_{m,i}$: 部分空間数 m のベクトル $\vec{\psi}$ の i 番目の要素

である。

本検証で Krylov 部分空間法の精度を調べるのに、炉心の相対出力を用いない理由としては、相対出力は積分値であるために、計算誤差が顕在化しにくいことや計算誤差が打ち消しあう可能性を低減するためである。(6.2.1.3)式で定義した相対差異を計算した結果を図 6.2.1.15 に示す。

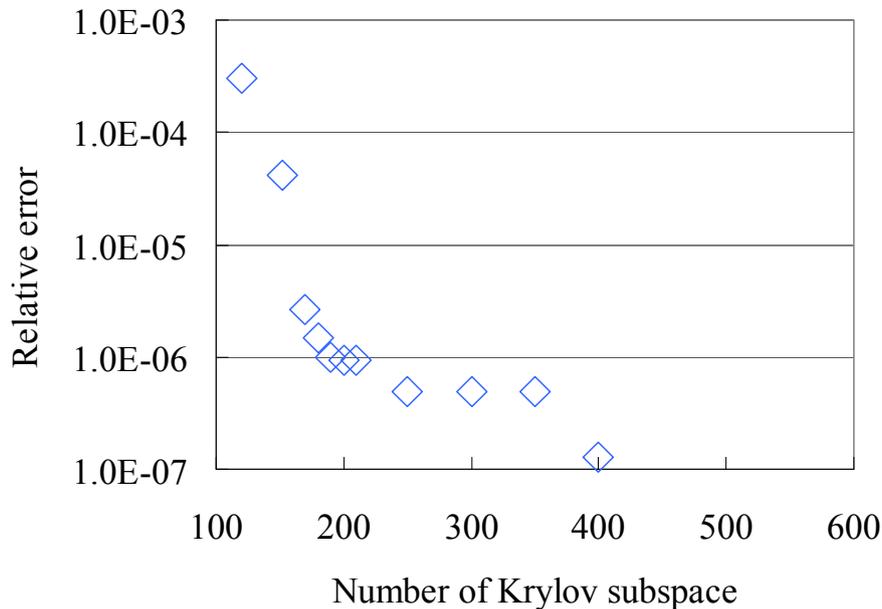


図 6.2.1.15 部分空間数と相対差異の相関(ステップ状、 $\Delta t=10\text{ms}$)

ここで、図 6.2.1.15 に部分空間数が 400 以上の時に差異がプロットされていないのは、計算差異が非常に小さいためである。図 6.2.1.15 より、数値不安定性が発生しなくなる部分空間数 170 の時の相対差異は 1.0×10^{-6} 程度であることがわかる。この値は、本計算条件で用いている **Scaling and Squaring** 法で用いる因子の値の $1/2^{19} \approx 1.0 \times 10^{-6}$ に近い。

参考文献 11)によれば、**Scaling and Squaring** 法に用いる因子 2^j を乗算する時に計算誤差が増大することが示されている。このことより、以下の仮定を立てることができる。

- ・ 中性子束及び遅発中性子先行核密度からなるベクトルの最大相対差異が 1.0×10^{-6} 以上の場合、**Scaling and Squaring** 法で誤差が大きく増幅されてしまうので、計算結果が不安定になってしまう。一方、最大相対差異が 1.0×10^{-6} 以下の場合、**Scaling and Squaring** 法で誤差が計算の不安定性を発生させるほど増大されない。

つまり上記の仮定を簡易に述べると、計算誤差が **Scaling and Squaring** 法に用いる因子の $1/2^j$ 以下である時に、**Krylov** 部分空間法は安定して計算が行えると考えられる。この仮定を検証するために、タイムステップ幅を $\Delta t=1\text{ms}$ 及び 100ms で計算を行なった。その結果、上記の仮定のとおり、部分空間数不足に起因する計算差異が $1/2^j$ 以下である時に、**Krylov** 部分空間法は安定して計算が行えることを確認した。そのため、上記の仮定は妥当であると考えられる。

上記までの **Krylov** 部分空間法の結果をまとめると以下になる。

- ステップ状の時は従来法に比べ、10倍~30倍高速に計算することが可能である。
- ランプ状では断面積の時間依存性の取扱いを高度化する余地がある。
- 計算体系の大型化に伴う計算時間の増加量は、従来法に比べて少ない。
- Krylov 部分空間法の計算精度の支配因子はスペクトル半径である。
- Krylov 部分空間法と Scaling and Squaring 法を組み合わせると数値不安定性が生じる場合があり、数値不安定性を抑制するためには、部分空間数不足に起因する計算差異を $1/2^j$ 以下にする計算精度が必要となる。

6.2.2 周波数関数近似法と従来法の比較

本節では、周波数関数近似と従来の周波数変換法との計算精度及び計算時間について検討を行っていく。ステップ状において、周波数関数近似法(**F**requency **F**unction **A**pproximation)と周波数変換法(**F**requency **T**ransform)で同条件計算を行なったときの計算結果及び相対計算時間を表 6.2.2.1 及び 6.2.2.2 に示し、0.1 秒毎の平均相対差異を図 6.2.2.1 に示す。なお、収束条件は 1.0×1.0^{-8} とし、遅発中性子先行核密度の計算は θ 法で差分化した(3.7.1.3)式を用いた。

表 6.2.2.1 計算精度及び相対時間(ステップ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

Time[sec]	Reference	FT	Diff.[%]	FFA	Diff.[%]
0.0	1.000	1.000	0.00	1.000	0.00
0.1	2.061	2.060	0.07	2.061	0.03
0.2	2.079	2.078	0.01	2.079	0.00
0.3	2.096	2.096	0.01	2.096	0.00
0.4	2.114	2.113	0.01	2.114	0.00
0.5	2.131	2.131	0.01	2.131	0.00
Relative CPU time			1		1.2

表 6.2.2.2 計算精度及び相対時間(ステップ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

Time[sec]	Reference	FT	Diff.[%]	FFA	Diff.[%]
0.0	1.000	1.000	0.00	1.000	0.00
0.1	2.062	1.933	6.24	1.933	6.24
0.2	2.079	2.066	0.63	2.079	0.02
0.3	2.096	2.095	0.09	2.097	0.03
0.4	2.114	2.113	0.04	2.114	0.02
0.5	2.132	2.131	0.03	2.131	0.02
Relative CPU time			1		1.1

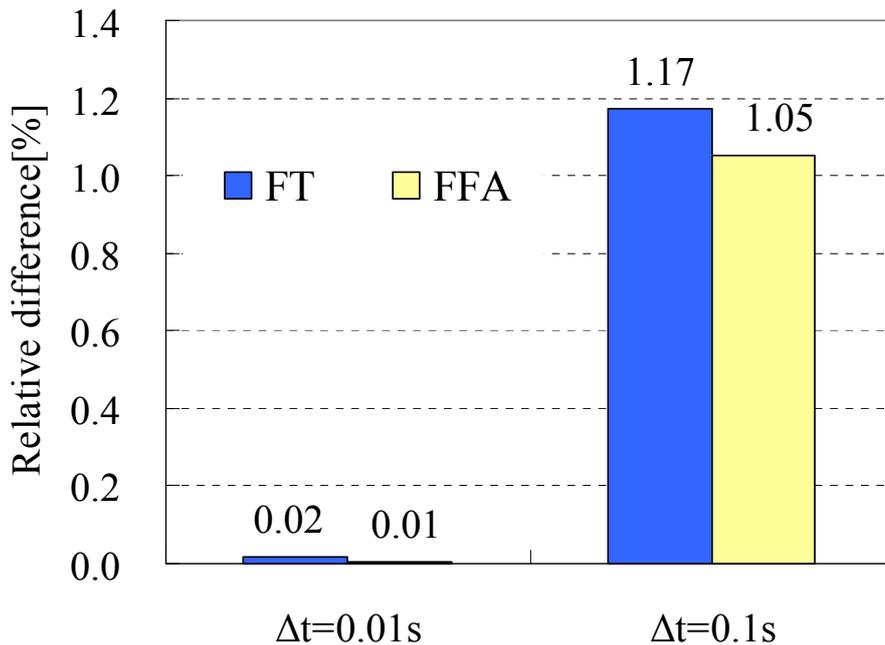


図 6.2.2.1 0.1 秒ごとの相対差異の平均の比較(ステップ状)

表 6.2.2.1 及び 6.2.2.2 から、指数関数で周波数の時間依存性を近似する周波数関数近似法は、従来の周波数変換法よりも計算精度が改善していることが分かる。そのため、図 6.2.2.1 に示す 0.1 秒ごとの相対差異の平均も、周波数関数近似法の計算精度が優れていることを示している。なお、 $\Delta t=0.1$ 秒(第一ステップ)の時に周波数関数近似法と従来法の結果が等しいのは、第一ステップでは前ステップの周波数の情報がなく、周波数関数近似法を用いることが出来なかったためである。また、計算時間に関しても、周波数関数近似法は周波数変換法とほぼ同程度の計算時間で計算することが可能であるために、理論が複雑になることによる計算時間の増加量は無視できると考えられる。

しかし、ステップ状の場合、周波数変換法から周波数関数近似法による計算精度の向上率はあまり大きくはなかった。そこで以下では、ステップ状の場合に計算精度があまり改善できなかったことについての検討を行う。このことを検討するために、下図にステップ状の出力変化と体系全体の平均周波数の変化を示す。

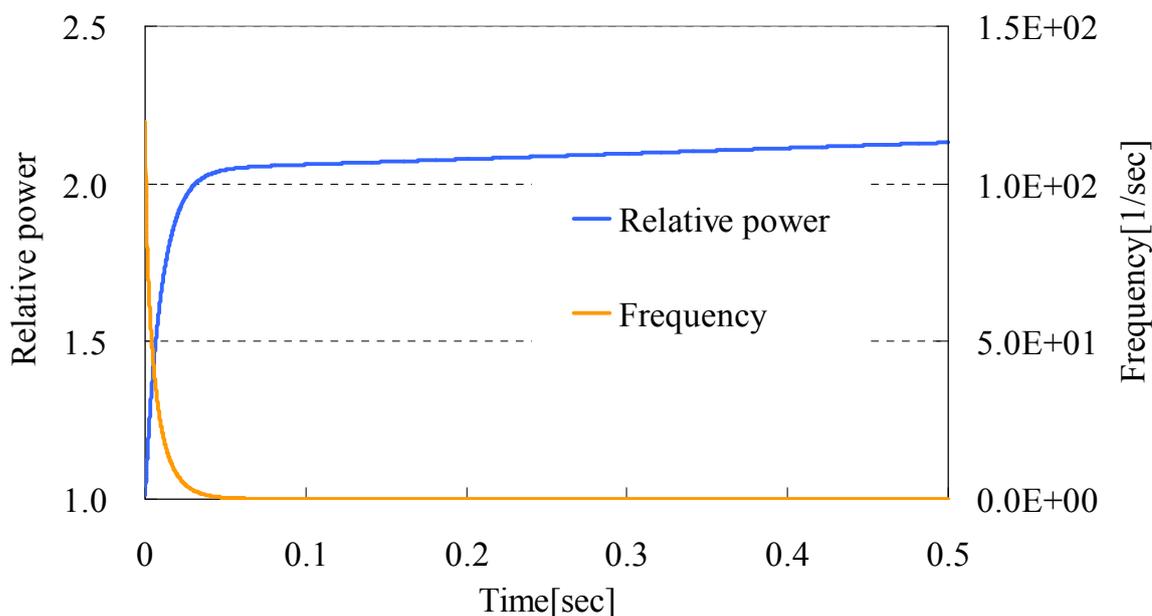


図 6.2.2.2 相対出力と周波数の時間変化(ステップ状)

図 6.2.2.2 から、ステップ状の反応度投入の時は出力が摂動直後に瞬間的に立ち上がり、中性子束が時間に対して大きな変化をするので、周波数が非常に大きな値を示している。ステップ状の反応度では摂動は 0 秒の時にしか変化しないために、摂動添加の少し時間が経過した後は、炉内に蓄積された遅発中性子先行核が崩壊することで、炉心出力が徐々に増加する。そのため、中性子束の変化は非常に緩やかになり、時間と共に周波数が急激に減少していることが図 6.2.2.2 より分かる。

タイムステップ幅が $\Delta t=0.1\text{sec}$ の場合を考えると、第一ステップのみにおいて周波数は大きく変化しているが、その後のステップにおいて周波数はほとんど変化していない。そのため、従来法でも十分に計算精度がよく、周波数関数近似法を使うメリットがあまりなくなってしまう。また、タイムステップ幅が $\Delta t=0.01\text{sec}$ の時は、周波数関数近似法を用いることで従来法よりも計算精度を向上できているが、従来法の計算精度でも十分に精度よく計算ができていることが分かる。そのため、周波数の時間に伴いあまり変化しないステップ状の場合には、周波数関数近似法を使うメリットが小さくなる。上記より、ステップ状における周波数関数近似法の感度解析を行った。

次に、ランプ状の場合の感度解析を行う。周波数関数近似法及び周波数変換法でランプ状の計算を行なったときの計算結果及び相対計算時間を表 6.2.2.3 及び 6.2.2.4 に示し、0.1 秒ごとの相対差異の平均を図 6.2.2.3 に示す。

表 6.2.2.3 計算精度及び相対時間(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

Time[sec]	Reference	FT	Diff.[%]	FFA	Diff.[%]
0.0	1.000	1.000	0.00	1.000	0.00
0.1	1.308	1.309	0.05	1.308	0.01
0.2	1.960	1.962	0.14	1.959	0.02
0.3	2.076	2.076	0.04	2.076	0.03
0.4	2.093	2.094	0.04	2.094	0.04
0.5	2.110	2.111	0.04	2.111	0.04
Relative CPU time			1	1.3	

表 6.2.2.4 計算精度及び相対時間(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

Time[sec]	Reference	FT	Diff.[%]	FFA	Diff.[%]
0.0	1.000	1.000	0.00	1.000	0.00
0.1	1.308	1.315	0.53	1.315	0.53
0.2	1.959	1.985	1.32	1.964	0.25
0.3	2.076	2.077	0.06	2.075	0.03
0.4	2.093	2.102	0.40	2.101	0.38
0.5	2.111	2.120	0.44	2.120	0.44
Relative CPU time			1	1.1	

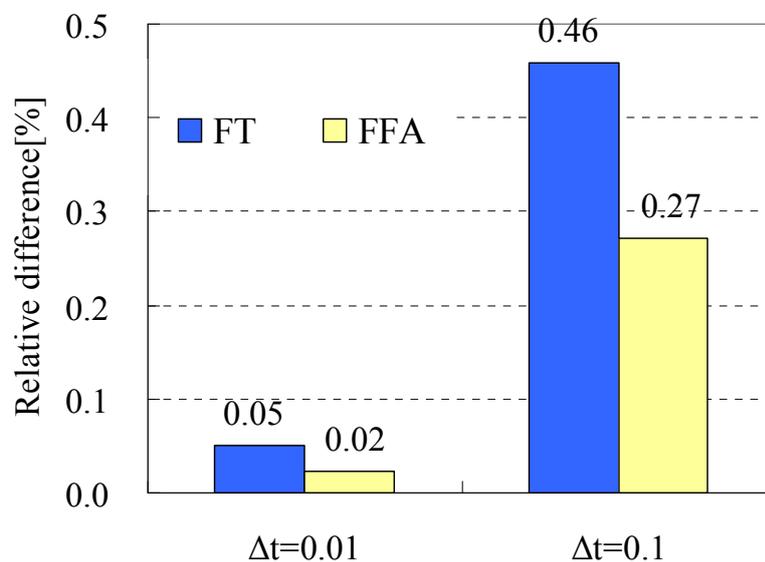


図 6.2.2.3 0.1 秒ごとの相対差異の平均の比較(ランプ状)

表 6.2.2.3 及び 6.2.2.4 より、周波数変換法よりも周波数関数近似法の方が計算精度よく計算可能であることが分かる。また、0.1 秒ごとの相対差異の平均も、従来法よりも改

善していることが図 6.2.2.3 から確認できる。さらに、ランプ状ではステップ状に比べて計算精度がより大きく改善されている。周波数関数近似法の計算時間に関しては、ステップ状と同様に、従来の周波数変換法とほぼ同程度の計算時間で計算できていることが確認できる。

ステップ状とランプ状で大きく異なる点として、周波数関数近似法を用いることによる計算精度の改善度合がある。ランプ状では、 $\Delta t = 0.1\text{sec}$ のような粗タイムステップの場合において、従来法の約半分程度の計算差異で計算できていることが図 6.2.2.3 から分かる。この原因について考察するために、以下にランプ状の相対出力と体系平均の周波数を示す。

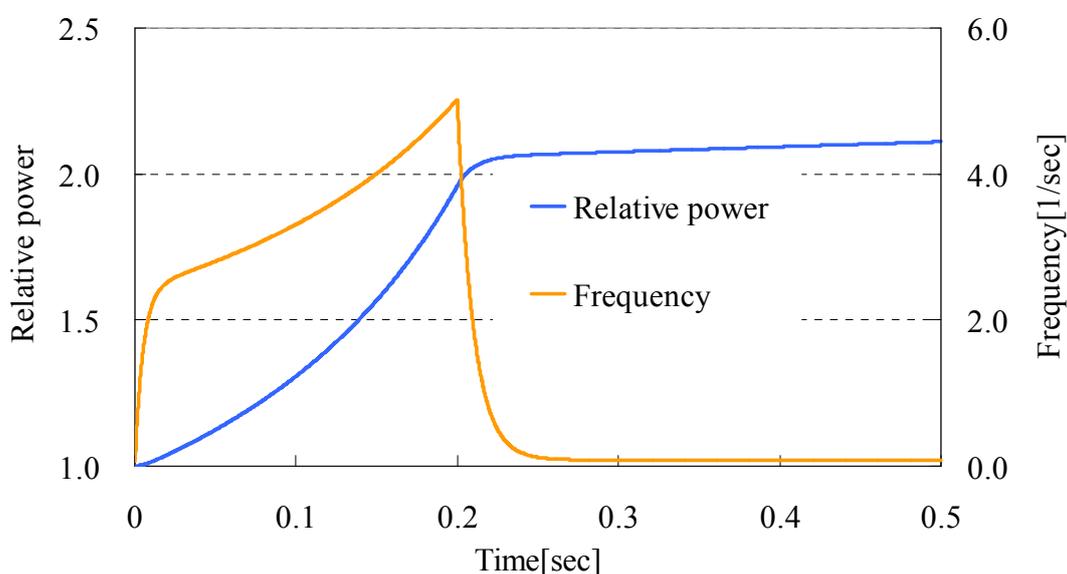


図 6.2.2.4 相対出力と周波数の時間変化(ステップ状)

図 6.2.2.4 より、ランプ状の周波数は、摂動が加わり続ける 0.2sec まで周波数が上昇している。摂動が終わった 0.2sec 以降では、ステップ状と同様に遅発中性子の効果が支配的になるので、周波数が急激に減衰していることが分かる。

ランプ状ではステップ状とは異なり、周波数大きく変化している時間が長いために、周波数を関数近似する効果が大きいと考えられる。実際に、周波数が大きく変化している 0~0.2sec では、 $\Delta t = 0.1\text{sec}$ 時の 0.1sec の結果を除いて、周波数関数近似法を用いることで従来法の計算精度を大きく改善できていることが確認できる。このことから、周波数が時間に対してほとんど変化しない場合には、周波数関数近似法のメリットはあまりないが、周波数が時間に対して大きく変化する場合に本手法のメリットが大きいことが分かる。そのため周波数関数近似法は、ステップ状のような瞬間的な変化よりも、ランプ状のような反応度が変化し続ける場合の適用性が高い。

上記では、炉心の相対出力を計算精度の指標として議論を行ってきた。しかし、炉心の相対出力は積分値であるために、計算差異が打ち消し合うことで、見かけ上周波数関数近似法の計算精度が向上した可能性がある。そのため以下では、周波数関数近似法の計算精度を次式に示す体系の核分裂分布の絶対差異を指標に、計算精度の議論を行う。

$$\text{Relative difference} = \left| \frac{\sum_g^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g - \sum_g^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g^{\text{ref}}}{\sum_g^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g^{\text{ref}}} \right| \times 100 \quad (6.2.2.1)$$

ここで、

ϕ_g^{ref} : 従来の周波数変換法のタイムステップ $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5} \text{ sec}$ で計算

である。

$\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ を用いたときに、周波数関数近似法(FFA)及び周波数変換法(FT)で計算した場合の $t = 0.2 \text{ sec}$ における核分裂分布の差異を図 6.2.2.5~6.2.2.8 に示す。

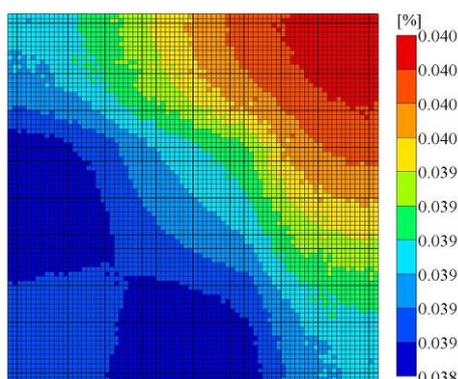


図 6.2.2.5 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状)

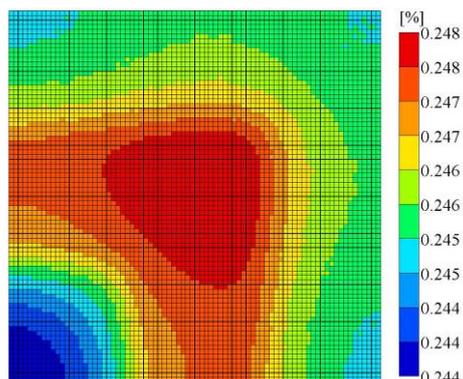


図 6.2.2.6 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ランプ状)

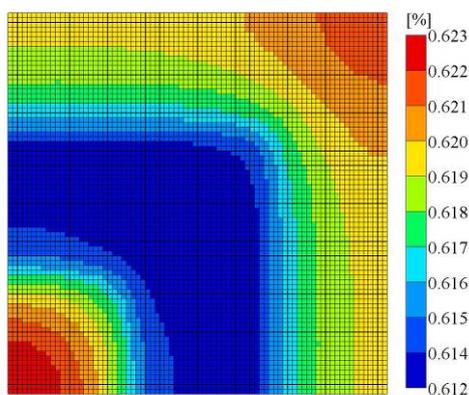


図 6.2.2.7 核分裂分布の絶対相対差異
(FT、ステップ状)

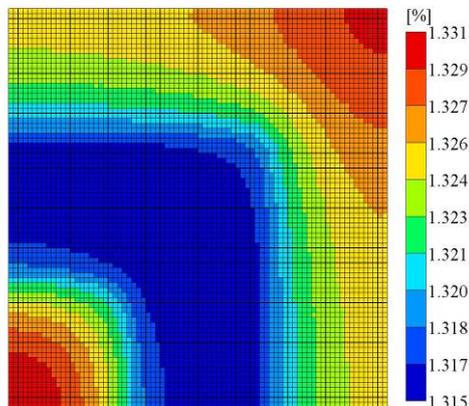


図 6.2.2.8 核分裂分布の絶対相対差異
(FT、ランプ状)

上図より、周波数関数近似法と周波数変換法の核分裂分布の絶対相対差異を比較すると、体系の全ての領域において、周波数関数近似法の結果が優れていることが確認できる。このことより、周波数関数近似法の炉心出力の計算精度が良好であるのは、計算差異が打ち消しあった結果ではなく、各領域の中性子束をより正確に計算できたためであることが分かった。

上図の周波数変換法と周波数関数近似法の計算差異の分布を比較すると、従来法の計算差異の傾向はステップ状とランプ状と同じであるのに対して、周波数関数近似法の計算差異の傾向はステップ状とランプ状で異なっていることが確認できる。この周波数関数近似法の計算差異の傾向の違いの原因としては、以下に示すように重み関数を自動化したことによると考えられる。

$$w'(t) = \theta_w w(t + \Delta t) + (1 - \theta_w) w(t) \quad (6.2.2.2)$$

ここで、

$w'(t)$: 補正した前ステップの周波数

θ_w : 重み関数 $0 \leq \theta_w \leq 1$

である。

上式の周波数を用いることで、重み関数を用いた周波数関数近似法は、重み関数を用いない純粋な周波数関数近似法と周波数変換法の中間の計算結果を得ていると考えられる。そのため、重み関数を適宜自動で決定することで、タイムステップ毎で用いている計算手法が異なる状況になるために、重み関数を用いた周波数関数近似法の計算差異の傾向が従来法と異なると考えられる。この考えの妥当性を検証するために、重み関数を固定した時で上記と同様の $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ で $t = 0.2 \text{ sec}$ における、ステップ状の計算差異の結果を以下に示す。なお、重み関数は 0.0~0.9 までの 0.1 毎に変更することで感度解析を行っている。

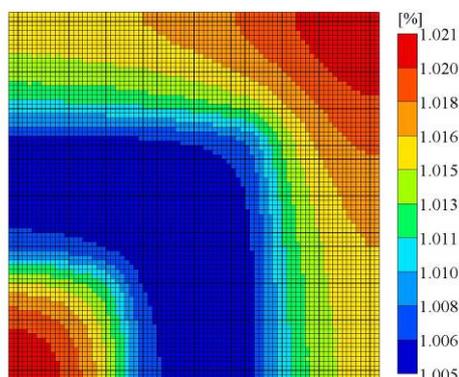


図 6.2.2.9 核分裂分布の絶対相対差異 (FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.0$)

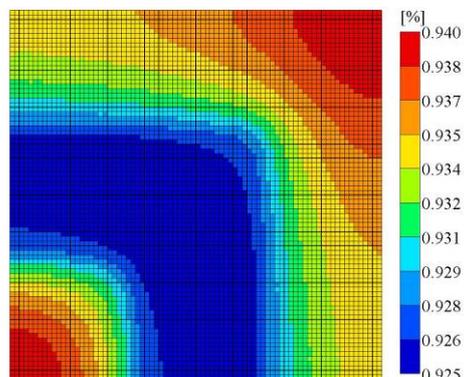


図 6.2.2.10 核分裂分布の絶対相対差異 (FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.1$)

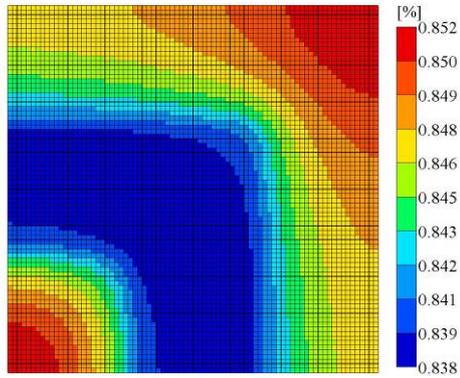


図 6.2.2.11 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.2$)

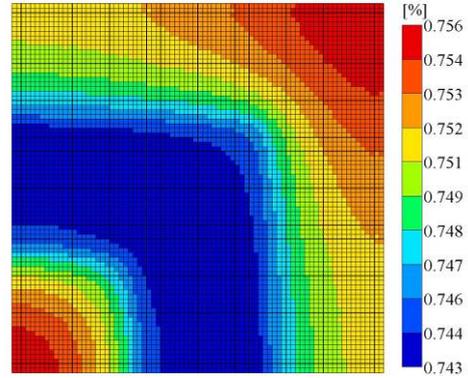


図 6.2.2.12 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.3$)

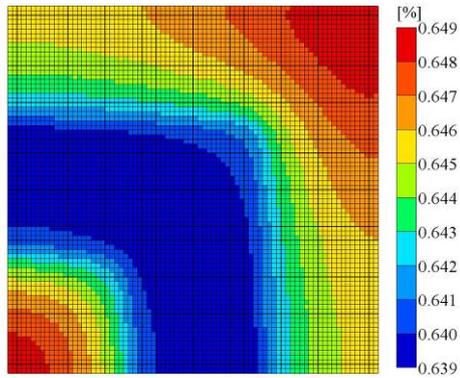


図 6.2.2.13 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.4$)

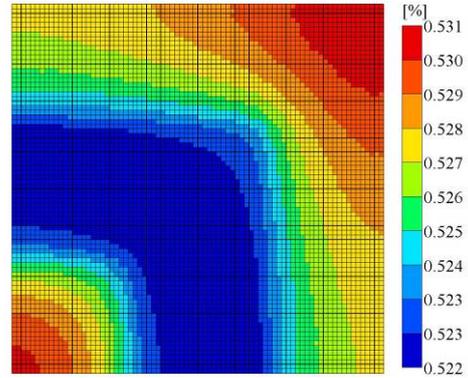


図 6.2.2.14 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.5$)

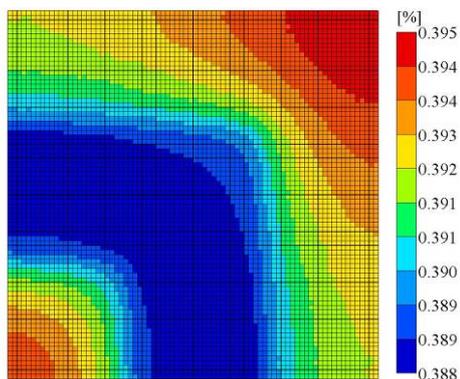


図 6.2.2.15 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.6$)

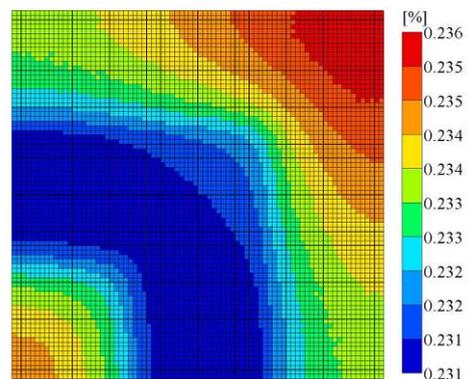


図 6.2.2.16 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.7$)

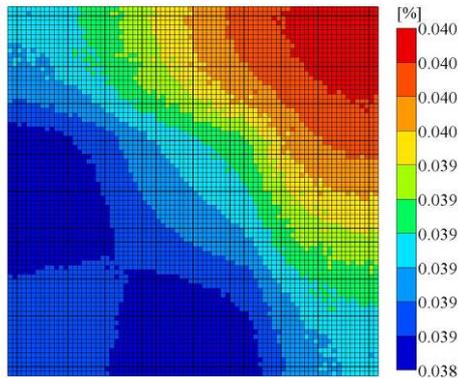


図 6.2.2.17 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.8$)

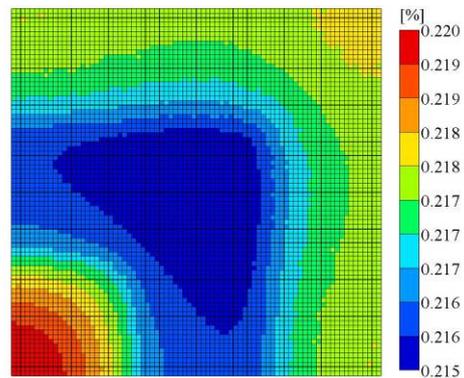


図 6.2.2.18 核分裂分布の絶対相対差異
(FFA、ステップ状、 $\theta_w = 0.9$)

図 6.2.2.9~6.2.2.18 より、重み関数 $\theta_w = 0.8$ の時を除いては、周波数関数近似法の計算差異の傾向は従来法と同様の傾向であることが分かった。また、重み関数 $\theta_w = 0.8$ の時も他の重み関数の場合と多少異なるが、摂動領域部分が比較的小さい差異で計算できている傾向は同様であった。そのため、重み関数を固定すれば、周波数関数近似法の計算差異の傾向も従来の周波数変換法と同様であることが確認できた⁹。このことより、上述した、重み関数を適宜自動でしていたために差異の傾向が異なっていたという仮定は妥当であることが分かった。

上図において誤差の傾向以外で特筆すべき点として、重み関数 $\theta_w = 0.8$ の時に計算差異が極小値をとっている点が挙げられる。周波数を求める際に誤差が含まれていないのであれば、重み関数 $\theta_w = 0.0$ の時が最も計算精度がよくなると考えられる。しかし、以下の原因より、重み関数 $\theta_w = 0.0$ の時に計算差異が極小値をとらなかったと考えられる。

- ・ 周波数を計算する際に周波数の定義式を離散化する必要があり、本来ならばその時刻の周波数を用いるべきであるのに対して、用いている周波数がタイムステップの平均の周波数になってしまっている。
- ・ 周波数変換法と同様に、周波数関数近似法も中性子束の時間変化を指数関数で近似しているために、周波数を厳密に取り扱うことで計算精度が必ずしも向上するとは限らない。
- ・ 周波数の時間依存性を指数関数の単項式で近似している。

ステップ状の反応度の場合においては、中性子束の時間変化が単項の指数関数では表現することが困難であるので、周波数関数近似法の重み関数が 0.0 ではなく 0.8 の時に差異が最小となったのは、偶然であると考えられる。一方、ランプ状では中性子束が指

⁹ $\omega(t + \Delta t)$ のみを用いた結果の図 6.2.2.9 及び、 $\omega(t)$ のみを用いた結果(従来法)の図 6.2.2.7 の計算差異の傾向と同様のことから、周波数関数近似法と周波数関数は基本的に似たような計算手法であると言える。

数関数状に変化しているために、上記の2つ目の問題点を排除することができる。そのため、上記の議論より、ランプ状では重み関数 θ_w が0.0に近いほど計算精度がよくなると考えられる。そこで、この考えの妥当性について検討を行うために、中性子束の時間変化が指数関数状に近いランプ状で重み関数を固定して計算を行う。重み関数を固定した時、上記と同様の $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ で $t = 0.2 \text{ sec}$ における、ランプ状の計算結果を以下に示す。

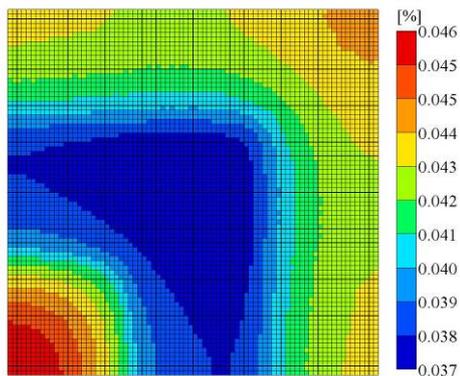


図 6.2.2.19 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.0$)

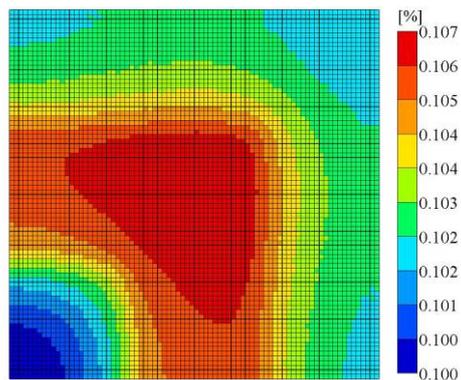


図 6.2.2.20 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.1$)

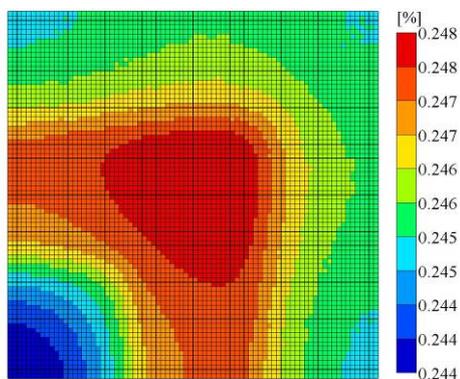


図 6.2.2.21 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.2$)

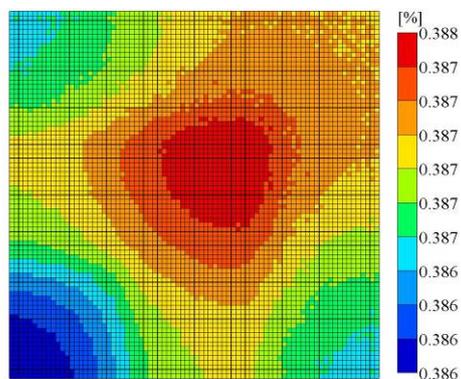


図 6.2.2.22 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.3$)

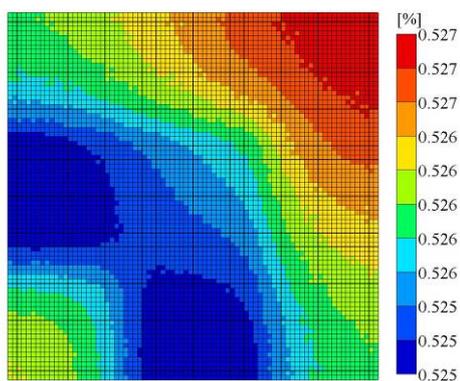


図 6.2.2.23 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.4$)

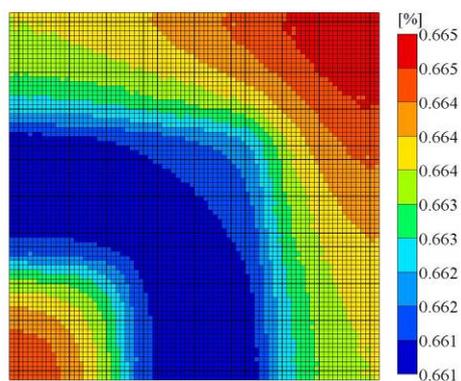


図 6.2.2.24 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.5$)

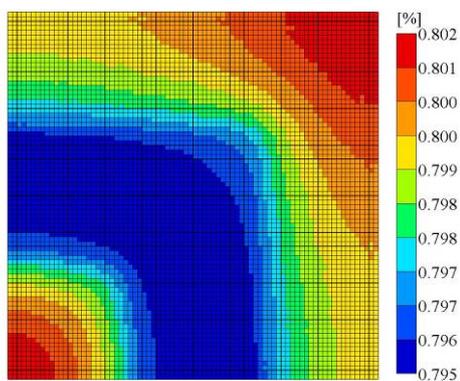


図 6.2.2.25 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.6$)

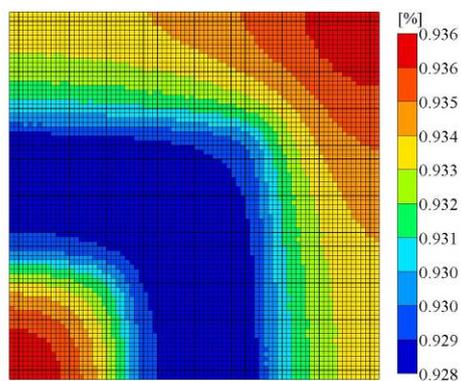


図 6.2.2.26 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.7$)

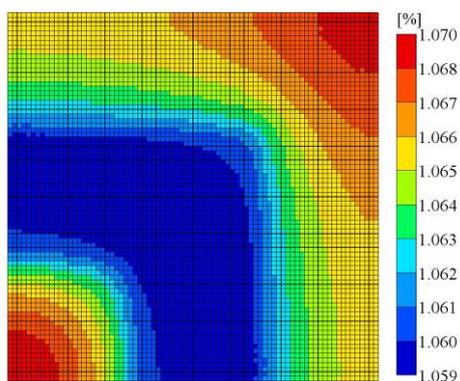


図 6.2.2.27 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.8$)

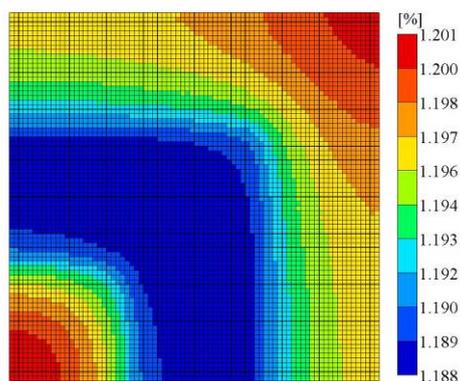


図 6.2.2.28 核分裂分布の差異
(FFA、ランプ状、 $\theta_w = 0.9$)

図 6.2.2.19~6.2.2.28 より、重み関数 $\theta_w=0.0$ で固定したときが最も計算精度がよくなっていることが確認できる。以上より、中性子束が指数関数状に変化する場合には $\theta_w=0.0$ で計算精度がよくなっている。そのため、先のステップ状の時に $\theta_w=0.8$ で極小値をとった原因として、中性子束を指数関数状に近似しているためと考えることは妥当であると考えられる。また、重み関数 θ_w が 0.1~0.3 の時は異なるが、誤差の傾向が基本的には従来法と同じ傾向であることが分かった。

上記までの周波数関数近似法の議論をまとめると、以下のようなになる。

- ・ ステップ状及びランプ状の両方の反応度投入方法においても、本研究で新たに開発した周波数関数近似法は、従来の周波数変換法よりも高精度に計算可能であることを示した。
- ・ 周波数関数近似法の計算時間に関しては、従来の周波数変換法の 1.1~1.3 倍程度であり、計算理論を高度にしたことによる計算時間への影響は小さかった。
- ・ 炉心出力のような積分値ではなく、メッシュ毎の核分裂分布を周波数関数近似法と周波数変換法で比較したところ、全領域において、周波数関数近似法の計算精度の方が優れていた。
- ・ 周波数関数近似法の計算精度は重み関数によって大きく依存するが、出力が指数関数状に変化するときは、重み関数 $\theta_w=0.0$ となる場合の計算精度がよい。
- ・ しかし、周波数関数近似法は中性子束を指数関数状に変化するという仮定を用いており、周波数変換法が抱える根本的な問題を解決することはできていない。

6.2.3 Multigrid Amplitude Function法と従来法の比較

6.2.3.1 本節の構成

本小節では、Multigrid Amplitude Function 法と従来法の比較を行う。まず初めに 6.2.3.2 節では、振幅関数のエネルギー依存性について感度解析を行い、振幅関数のエネルギー依存性を陽的に考慮するべきか検討する。

次に 6.2.3.3 節では、前節の検討を踏まえて、振幅関数でエネルギー依存性を陽的に考慮する方法について検討を行い、従来法と計算精度の比較を行う。

最後に 6.2.3.4 節では、従来法と計算精度が同程度になる条件下での計算時間の比較を行う。

6.2.3.2 振幅関数のエネルギー依存性の感度解析

4 章の Multigrid Amplitude Function 法(MAF)の導出では、エネルギー依存の振幅関数で基礎式の導出を行なった。また、振幅関数の算出には、Timedependent Coarse Mesh Finite Difference 法(TCMFD)において詳細タイムステップで計算した結果を用いることを示した。そのため、多群の振幅関数を算出するためには、多群の TCMFD 計算を行う

必要がある。しかし、計算時間の観点から、詳細エネルギー群の TCMFD 計算よりは、粗エネルギー群の TCMFD 計算を行うことが望ましい。そこで、次式のように振幅関数のエネルギー依存性を無視したときの MAF 法について考える。

$$\frac{\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t) \frac{P_i(t + \Delta t)}{P_i(t)}}{v_g \Delta t} = \theta \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) + (1 - \theta) \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) \frac{P_i(t + \Delta t)}{P_i(t)} \quad (6.2.3.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_g(\mathbf{r}, t) = & \nabla D_g(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \left[\Sigma_{r,g}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{v_g P_i(t)} \frac{\partial P_i(t)}{\partial t} \right] \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ & + \sum_m \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (6.2.3.2)$$

$$P_i(t) = \sum_g \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \int_{-\Delta z}^{\Delta z} \frac{1}{V_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dx dy dz \quad (6.2.3.3)$$

である。

上式のように振幅関数のエネルギー依存性を無視することで、TCMFD の計算コストを低く抑えることが可能となる。エネルギー依存性を無視したときの MAF 法の計算条件をタイムステップ幅 $\Delta t = 0.01\text{sec}$ 及び 0.1sec 、TCMFD のタイムステップ幅は $\Delta t = 0.001\text{sec}$ 及び 0.01sec とし、ランプ状反応度添加の計算を行った。従来法である θ 法と比較した結果を図 6.2.3.1 及び 6.2.3.2 に示す。なお、参照解としては、 θ 法の $1.0 \times 10^{-4}\text{sec}$ で計算したときの結果を用いた。また、収束条件は 1.0×10^{-7} とし、遅発中性子先行核密度の計算は、核分裂源を線形近似して解析解を計算した(3.7.2.6)式を用いた。

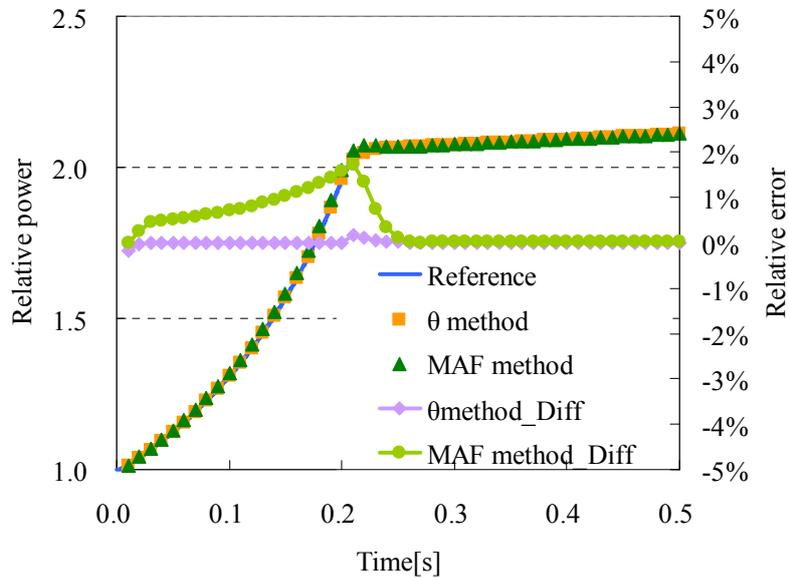


図 6.2.3.1 振幅関数のエネルギー依存性を無視した場合の MAF 法と従来法の比較
(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

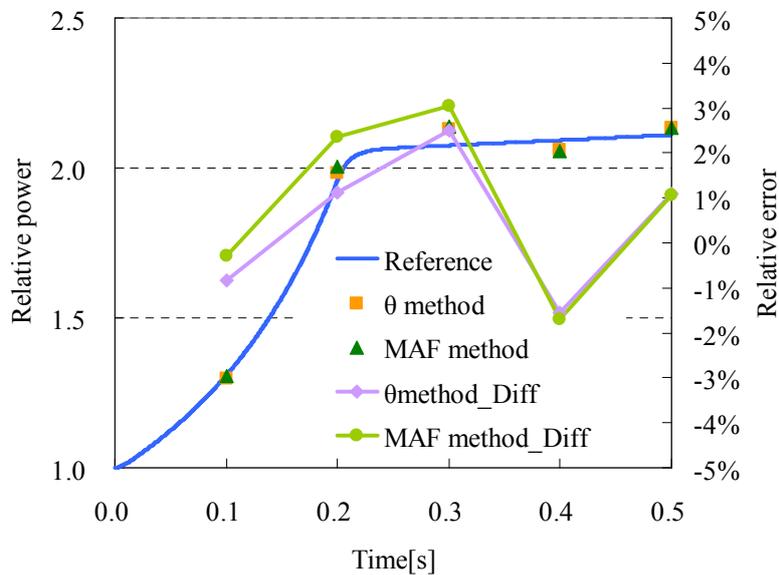


図 6.2.3.2 振幅関数のエネルギー依存性を無視した場合の MAF 法と従来法の比較
(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

図 6.2.3.1 及び 6.2.3.2 から、MAF 法は TCMFD とカップリングさせて詳細に計算しているのにも関わらず、従来法よりも計算精度が悪化していることが分かった。

TCMFD 法とカップリングさせた MAF 法は、数式的には近似を含んでいない。しか

し、3章の改良準静近似法でも述べたように、因子化法は、数式的には近似が含まなくても、実際に計算を行う段階で近似を用いることになる。MAF法で用いている近似は、形状関数内のタイムステップで粗メッシュ内の分布が変化しないと仮定していることである。さらに、上記したエネルギー依存を無視した振幅関数を用いたMAF法は、形状関数のタイムステップ間のエネルギー群毎の中性子束の時間変化割合が等しいという近似を用いている。しかし、図6.2.3.1及び6.2.3.2の結果より、この近似は不適切である可能性が高い。そこでこの近似が不適切であるかを検証するために、以下の二つのことを行う。

1. エネルギー群を1群と仮定した時の修正TWIGLベンチマーク問題を用いて検証計算を行い、従来法よりもMAF法を用いることで計算精度が向上することを確認する。
2. 各エネルギー群の中性子束の時間変化割合(周波数)を比較し、高速群と熱群の周波数の空間分布および大きさが異なることを確認する。

まず初めに、1つ目のエネルギー1群体系の計算を行う。

TWIGLベンチマーク問題の2群の断面積を用い、摂動量を調整した修正TWIGLベンチマーク問題の計算を行なった。参照解及び比較手法の計算条件は、上述した計算と同じとした時の計算結果を以下に示す。

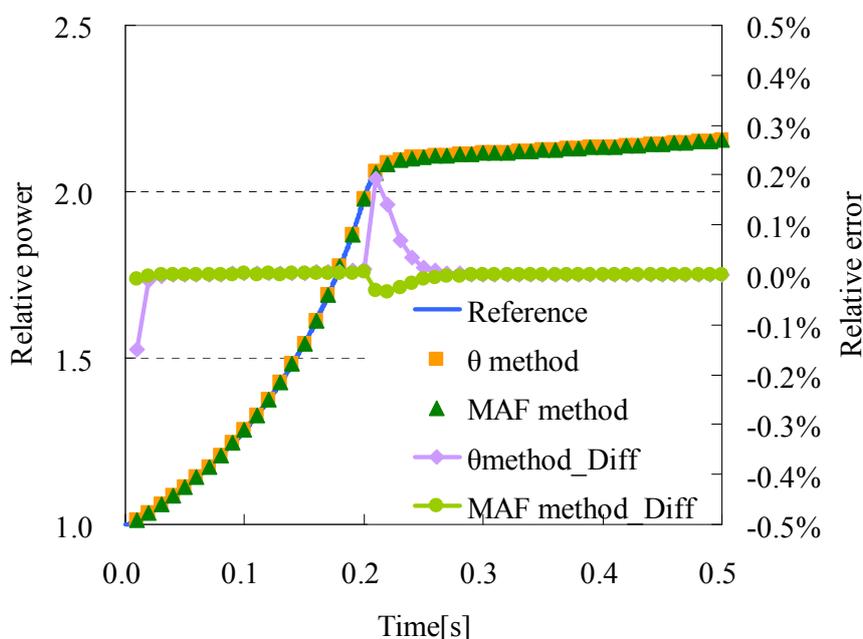


図 6.2.3.3 エネルギー1群修正TWIGLベンチマーク問題
(ランプ状、 $\Delta t = 0.01\text{sec}$)

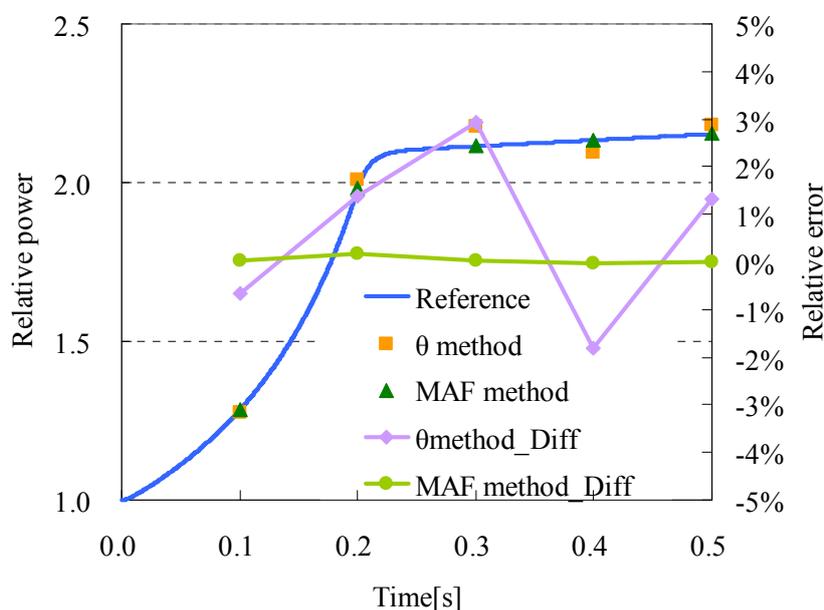


図 6.2.3.4 エネルギー1 群修正 TWIGL ベンチマーク問題
(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

図 6.2.3.3 及び 6.2.3.4 より、エネルギー1 群の場合では、MAF 法は従来法に比べ高精度に計算ができているのはもちろんのこと、タイムステップ幅を $\Delta t=0.1\text{sec}$ の粗タイムステップにしても計算精度がほとんど悪化していないことを確認できた。計算体系は上述したオリジナルの TWIGL ベンチマーク問題のもと同じであるので、上記の結果よりエネルギー群数が 1 群の場合には、MAF 法は非均質体系でも高精度に計算できることが確認できた。また、エネルギー群数を 1 群に減少したことで高精度に計算できたことから、上述したエネルギー1 群の MAF 法では振幅関数のエネルギー依存性を考慮していないために、オリジナルの TWIGL ベンチマーク問題(2 群)で計算精度が低下した可能性が高い。

次に上述した 2 つ目の項目である、各エネルギー群の中性子束の周波数についての考察を行う。各エネルギー群の周波数を検討するために、0.0 から 0.005sec に変化したとき、TWIGL ベンチマーク問題における領域毎の周波数を下図に示す。

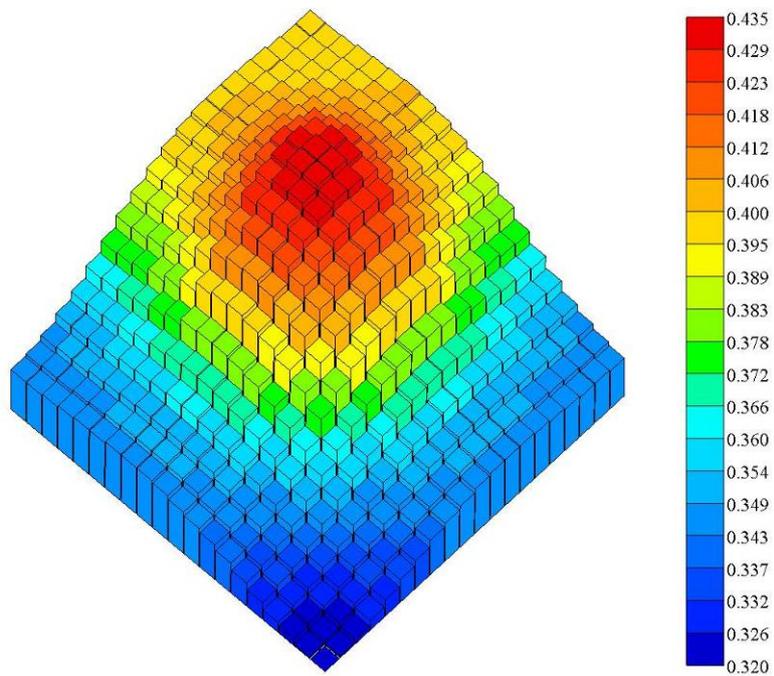


図 6.2.3.3 0.005sec における高速群の周波数(ランプ状)

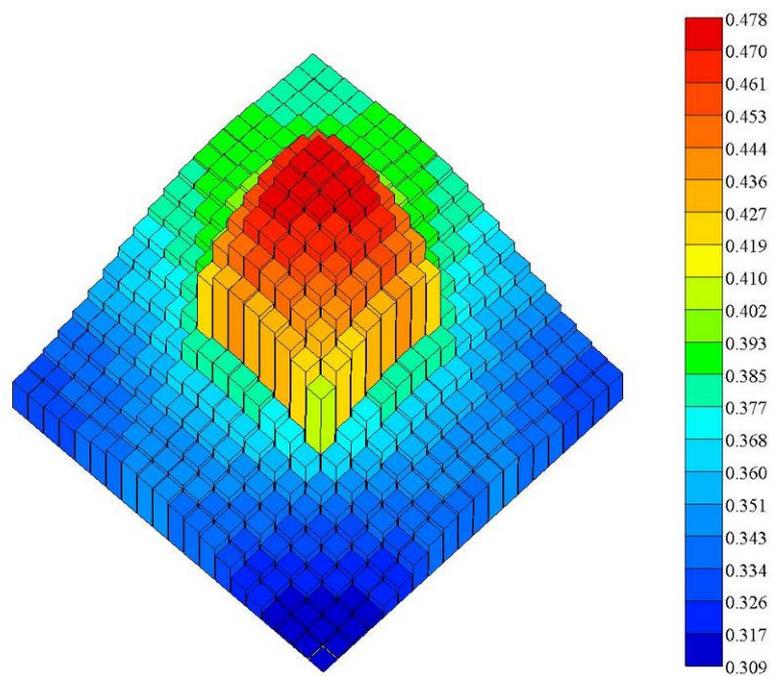


図 6.2.3.4 0.005sec における熱群の周波数(ランプ状)

図 6.2.3.3 及び 6.2.3.4 から、高速群及び熱群共に摂動領域である炉心中心部の周波数が大きくなっており、高速群に比べると、熱群では摂動領域における周波数が顕著に大きくなっていることが分かる。この原因は、TWIGL ベンチマーク問題における反応度の投入が、熱群の吸収断面積を減少により発生させているためである。以上のことから、TWIGL ベンチマーク問題において、周波数がエネルギー群に依存して変化することが分かった。また、TWIGL ベンチマーク問題以外のベンチマーク問題として、本研究では LMW ベンチマーク問題と LRA ベンチマーク問題を用いるが、これらのベンチマーク問題もエネルギー群毎に与える摂動量が異なる。そのため、今後のベンチマーク問題のことも考えると、振幅関数のエネルギー依存性を考慮しないまま、MAF 法を高精度に計算することは困難であると考えられる。そこで以下では、MAF 法に用いる振幅関数のエネルギー依存性を考慮する方法についての検討を行う。

6.2.3.3 振幅関数のエネルギー依存性を考慮するための検討

振幅関数のエネルギー依存性を考慮するための最も簡易な方法としては、詳細エネルギー群の TCMFD を計算することである。しかし、詳細エネルギー群の TCMFD 計算は計算コストが高いために、計算時間の観点から、粗エネルギー群の TCMFD の計算を用いたままエネルギー依存性を考慮した振幅関数を導出することが望ましい。そこで本研究では、粗エネルギー群の TCMFD の計算のままでエネルギー依存の振幅関数を計算するために、中性子束のエネルギー群の比が Coarse timestep の詳細メッシュの計算と Fine timestep の TCMFD で同様であると仮定し、次式で各群の振幅関数を再構成する方法を提案する。

$$\tilde{P}_g(t) = P_{TCMFD}(t) \frac{P_g(t)}{\sum_g P_g(t)} \quad (6.2.3.4)$$

ここで、

$\tilde{P}_g(t)$: 再構成する g 群の振幅関数

$P_{TCMFD}(t)$: TCMFD で計算した振幅関数

$P_g(t)$: Coarse timestep で計算した振幅関数

$$P_g(t) = \int_{\mathbf{r}} \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t)}{v_g} d\mathbf{r}$$

である。

(6.2.3.4)式の計算を行う上で、全エネルギー群の総和である $\sum_g^G P_g(t)$ を計算する方法としては、以下の二つの方法がある。

1. 詳細メッシュ計算の積分を行った振幅関数のエネルギー群の総和を用いる方法
 2. TCMFD で詳細メッシュと同様のタイムステップで計算した振幅関数を用いる方法
- 本研究では、エネルギー群の比がより正確に求まると考えられる 1.の方法を採用することにする。

以上より、(6.2.3.4)式の再構成した各群の中性子束を用いて各群の振幅関数を計算することができる。次に解決すべきこととしては、(6.2.3.2)式の振幅関数の時間微分項である。(6.2.3.2)式の振幅関数の微分項を計算するためには、その時刻の断面積が既知でないと計算することができない。しかし、Coarse group の TCMFD で計算する場合には、その時刻の詳細なエネルギー依存のフィードバックがかかった断面積を求めることが困難である。この問題を解決するための方法として、以下の二つの方法がある。

1. 振幅関数の微分項も(6.2.3.4)式と同様に詳細メッシュの比を取り、振幅関数の微分項を再構成する方法
 2. TCMFD のタイムステップが詳細なことを利用して、微分項を差分で近似する方法
- 1.の方法は上記と似たような方法であるので記述は割愛するとして、2 つ目の方法についての言及を行う。(6.2.3.2)式の振幅関数の微分項は次式のように変形することが可能である。

$$\frac{1}{P_{i,g}(t)} \frac{\partial P_{i,g}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\ln(P_{i,g}(t))) \approx \frac{\ln\left(\frac{P_{i,g}(t+\Delta\tau)}{P_{i,g}(t)}\right)}{\Delta\tau} \quad (6.2.3.5)$$

ここで、

$\Delta\tau$: TCMFD のタイムステップ幅

である。

(6.2.3.5)式は微分を差分で近似しているために差分化に伴う誤差が発生するが、TCMFD のタイムステップは通常の計算よりも詳細なため、差分化に伴う誤差が比較的小さいことが期待できる。この方法の優れた点は、1 つ目の方法に比べ比較的容易に計算が可能となる点である。しかし本研究では、より正確な計算が可能となる 1.の方法を採用することにする。

以上の各群の振幅関数を再構成する方法を計算コードに実装し、計算精度の検証を行った。上記で提案した各群の振幅関数を再構成する MAF 法を Im_MAF 法と表記し、先と同条件で計算した結果を以下に示す。

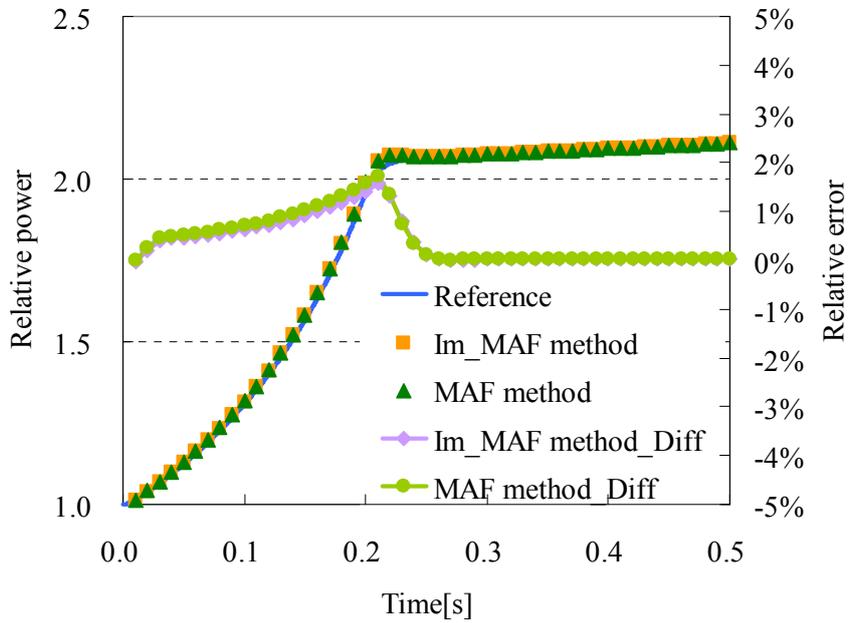


図 6.2.3.5 エネルギー依存の振幅関数を再構成した MAF 法の計算結果
(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

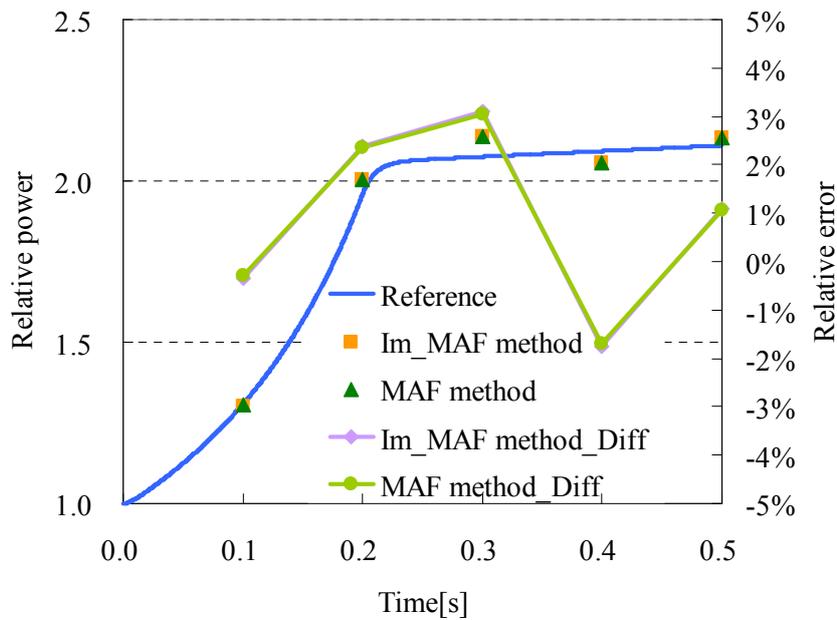


図 6.2.3.6 エネルギー依存の振幅関数を再構成した MAF 法の計算結果
(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

図 6.2.3.5 及び 6.2.3.6 からはあまり確認はできないが、エネルギー依存の振幅関数を再構成した MAF 法は、先の MAF 法に比べ僅かに計算精度が向上している。しかしながら、エネルギー依存の振幅関数を再構成したにも関わらず、計算精度の向上は小さい。これは、再構成時に用いた仮定が物理的に不適切なためであると考えられる。

以上のことから本研究では、計算コストは多少高いが詳細エネルギー群の TCMFD を用いて精度よく振幅関数を計算することを行うことにする。詳細メッシュを 20×20 メッシュ、TCMFD のメッシュを 3×3 とした時の有限差分法の計算結果を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップ幅は、詳細メッシュのタイムステップの $1/10$ としている。

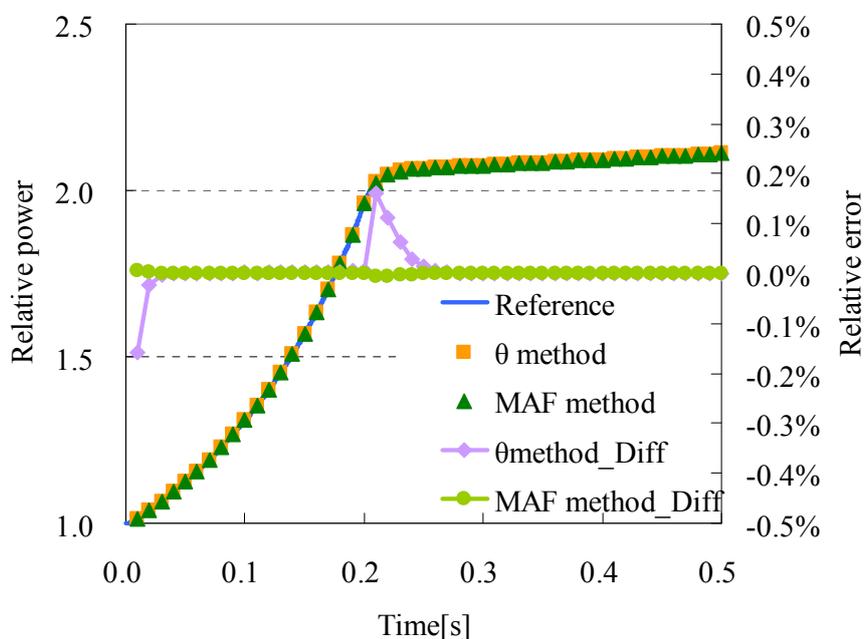


図 6.2.3.7 多群 TCMFD と MAF 法のカップリング法による計算結果
(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

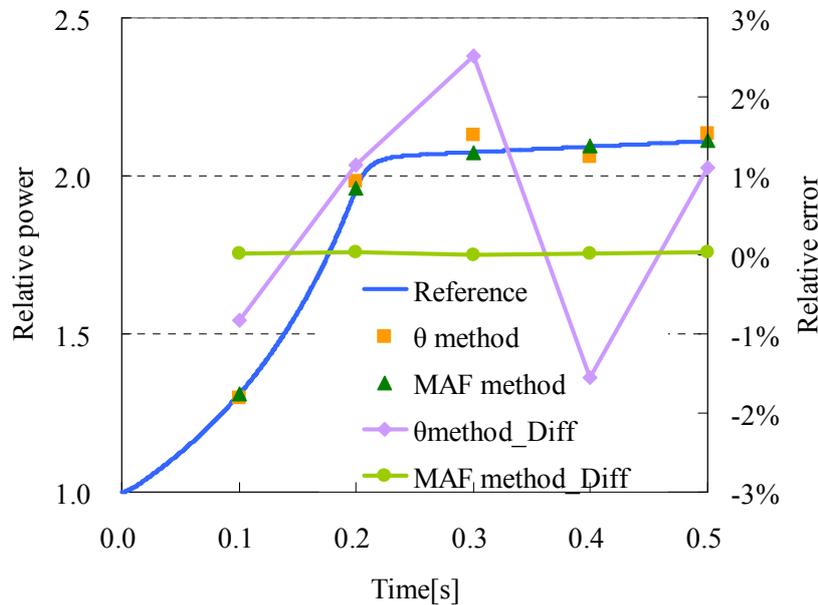


図 6.2.3.8 多群 TCMFD と MAF 法のカップリング法による計算結果
(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

図 6.2.3.7 及び 6.2.3.8 から、多群の TCMFD の結果を用いて多群の振幅関数を計算した MAF 法の計算結果は、従来法よりも高精度に計算できていることが分かる。また、タイムステップ幅 $\Delta t=0.1\text{sec}$ の時の計算結果である図 6.2.3.8 に注目すると、従来法では最大相対差異が 3%弱程度あるのに対して、MAF 法の最大相対差異は 0.04%程度であり、十分な計算精度で計算できていることが分かる。そのため、MAF 法は非常に粗いタイムステップで計算したとしても、計算精度を悪化させることなく計算が可能であることが分かった。このように、MAF 法が粗タイムステップでも精度よく計算できる原因としては、以下のことが考えられる。

- MAF 法で計算している式は、見かけ上中性子束についての計算式であるが、実際には形状関数についての計算式である。そのため時間微分値が小さくなり、差分化に伴う離散化誤差を小さくすることが可能である。
- 振幅関数をエネルギー及び領域依存で計算することで、物理的に適切な振幅関数及び振幅関数の微分値を精度よく計算することが可能である。
- 上記のことから、数式上に近似を導入しないことはもちろんのこと、改良準静近似法とは異なり、アルゴリズムとしても少ない近似となっている。

以上のことより、MAF 法と TCMFD 法をカップリングした手法は従来法よりも精度よく計算が可能になっている。上記では、ランプ状の計算のみを行っているが、ステッ

プ状でも MAF 法が有効な計算手法であるかを確認するために、先と同様の計算条件で計算を行なった。計算結果を以下に示す。

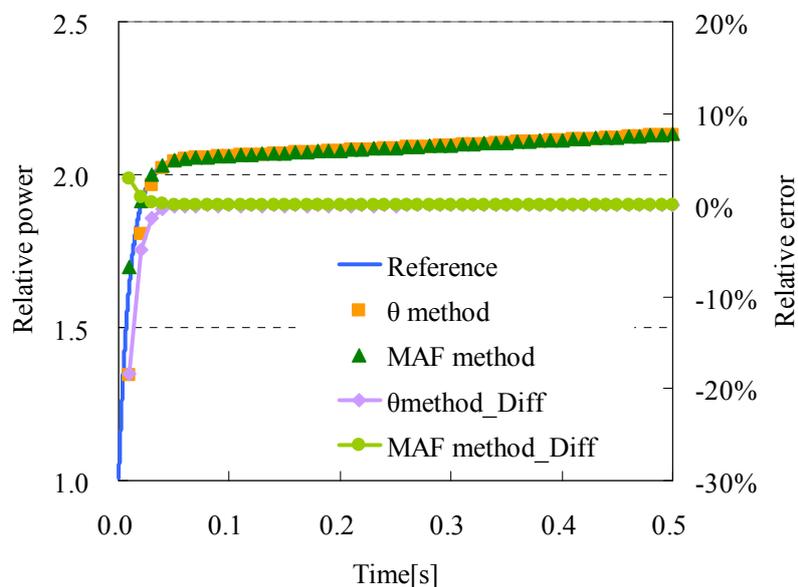


図 6.2.3.9 多群 TCMFD と MAF 法のカップリング法による計算結果 (ステップ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

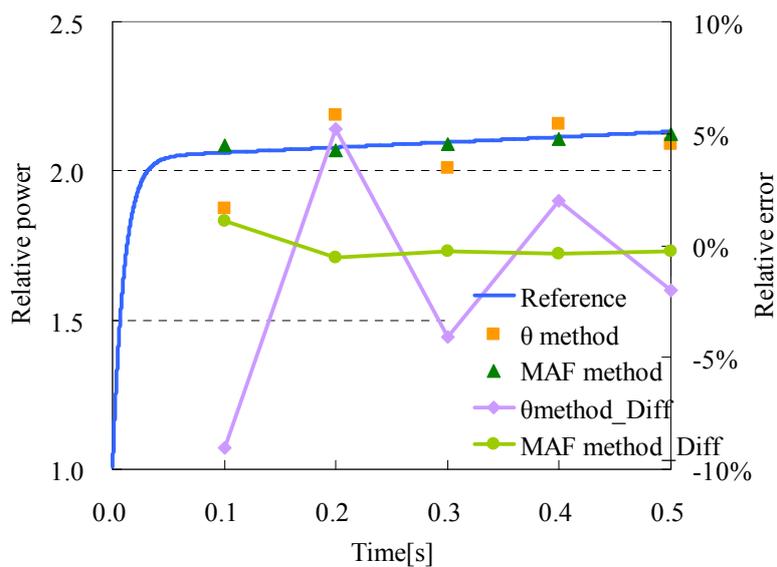


図 6.2.3.10 多群 TCMFD と MAF 法のカップリング法による計算結果 (ステップ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

上図より、ランプ状の反応度と同様に、ステップの反応度でも MAF 法の計算精度が従来法よりも高精度であることが確認できる。また、タイムステップ幅が 0.1sec の粗タイムステップにおいては、従来法は約 9%程度の計算差異があるが、MAF 法では 1%程度に低減できている。そのため、MAF 法はランプ状やステップ状のような反応度の投入方法に関わらず、計算精度が優れていることを確認した。

6.2.3.4 有限差分法におけるMAF法の計算時間についての検討

上記の計算結果より、多群 TCMFD 法と MAF 法を組み合わせた手法は非常に高精度に計算ができていることを確認した。しかし、TCMFD の計算時間に関してはまだ検討を行っていない。そこで、以降では MAF 法の計算時間についての検討を行う。

MAF 法の計算時間に関する変数は以下である。

- ・ TCMFD を用いた振幅関数の計算回数
- ・ 詳細メッシュと粗メッシュのメッシュ数の比

まず初めに、上記の内で 1 つ目の項目である、TCMFD を用いた振幅関数の計算回数について言及する。

TCMFD を用いた振幅関数の計算回数は、MAF 法の計算時間に非常に大きく影響を与える因子であると考えられる。そのため、MAF 法の計算時間を短縮するためには、振幅関数の算出回数を低減することが必要である。TCMFD に用いる詳細メッシュの情報としては、詳細メッシュ体系の計算を粗メッシュ体系でも再現するために用いる補正係数である。4 章の MAF 法でも述べたが、一般的に補正係数は時間に対してあまり依存されていないとされている。そのため、補正係数が時間に対してあまり依存しないのであれば、TCMFD の計算結果は反復せずとも一回の反復のみで適切な振幅関数を得られるので、振幅関数を算出するための反復を行う必要がなくなる可能性がある。そのため、この仮定を検証するために、タイムステップ幅 $\Delta t = 0.1\text{sec}$ の時のステップ状及びランプ状に対して、振幅関数の算出を反復したときと反復しなかった時の感度解析を行う。先と同様の計算条件で計算を行った結果を以下に示す。

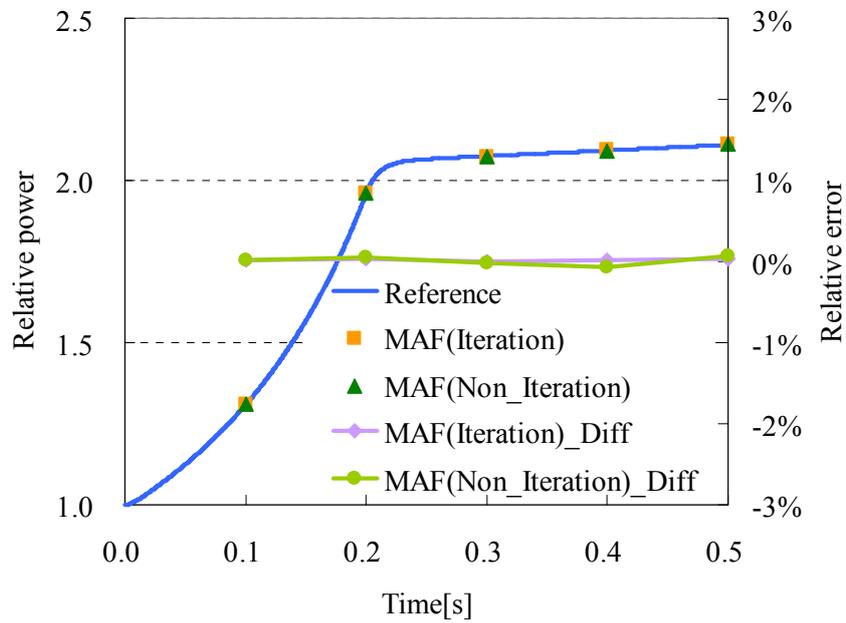


図 6.2.3.11 振幅関数の反復による計算精度の感度解析
(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

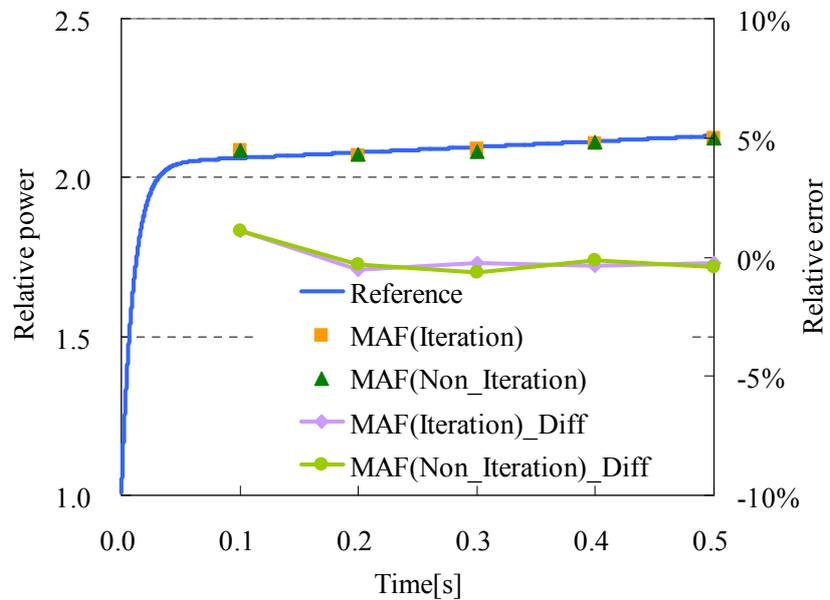


図 6.2.3.12 振幅関数の反復による計算精度の感度解析
(ステップ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

上図より、振幅関数の計算を反復しないことで、MAF 法の計算精度が僅かに低下していることが確認できた。しかし、この計算精度の低下率が計算時間に対しての影響の度合を考慮しなければ、振幅関数の計算を反復しないことの有用性について検討することは出来ない。そこで、上記の結果の計算精度と相対計算時間を比較した結果を表 6.2.3.1 に示す。

表 6.2.3.1 振幅関数の反復による計算精度と計算時間への依存性

Perturbation type	Ramp		Step	
	Iteration	Non	Iteration	Non
Average of absolute relative diff.	0.02%	0.04%	0.52%	0.53%
Relative CPU time	1.0	0.1	1.0	0.1

表 6.2.3.1 より、振幅関数を反復しないことで計算精度は僅かに低下しているが、計算時間を 1/10 に大きく低減できている。計算精度の観点から言えば、振幅関数を反復した方がよいが、計算時間を大きく犠牲にしてしまう。そのため計算精度を向上させたいのであれば、振幅関数を反復しない方法で小さなタイムステップで計算すればよいことになる。以上より、計算効率を考慮すると、振幅関数を反復させないで計算を行う方法が優れていると判断できる。このことより、以下の議論で用いる MAF 法は全て振幅関数を反復させていない結果を記述する。

上記では、MAF 法に計算時間に影響を与える因子の一つである、振幅関数の反復について議論を行なった。そこで、次に検討を行うこととして、詳細メッシュと粗メッシュにおけるメッシュ数の比についての項目がある。このことを検討するために、以下では、粗メッシュ数を固定したときに詳細メッシュ数を変化させた時の計算時間の感度解析を行う。

MAF 法と TCMFD をカップリングさせた方法が従来法に比べ、メリットを活かせるためには、詳細タイムステップで計算する TCMFD の計算時間が粗タイムステップで計算する詳細メッシュの計算時間に比べて十分に小さい条件下での計算が望ましい。そこで、詳細メッシュのメッシュ数を変化させた時に、従来法と MAF 法の計算時間の比がどのようになるか感度解析を行う。TCMFD のメッシュ数は 3×3 で固定を行い、詳細メッシュのタイムステップを 0.1sec とし、TCMFD のタイムステップを詳細メッシュの 1/2、1/5、1/10 の三通りとしたときの感度解析を以下に示す。

表 6.2.3.2 従来法と MAF 法の相対計算時間(20×20 メッシュ、ステップ状)

Mesh Structure		20×20		
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	2.8	3.3	3.7

表 6.2.3.3 従来法と MAF 法の相対計算時間(40×40 メッシュ、ステップ状)

Mesh Structure		40×40		
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	2.3	2.5	2.6

表 6.2.3.4 従来法と MAF 法の相対計算時間(80×80 メッシュ、ステップ状)

Mesh Structure		80×80		
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	1.8	1.8	1.8

表 6.2.3.5 従来法と MAF 法の相対計算時間(20×20 メッシュ、ランプ状)

Mesh Structure		20×20		
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	2.5	3.2	3.8

表 6.2.3.6 従来法と MAF 法の相対計算時間(40×40 メッシュ、ランプ状)

Mesh Structure		40×40		
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	2.0	2.3	2.5

表 6.2.3.7 従来法と MAF 法の相対計算時間(80×80 メッシュ、ランプ状)

Mesh Structure	80×80			
Method	Theta	MAF		
Timestep of Fine mesh[s]	0.1	0.1		
Timestep of Coarse mesh[s]		0.05	0.02	0.01
Relative CPU time	1.0	1.8	1.9	1.8

上記より、ステップ状及びランプ状でほぼ同程度の相対計算時間が得られており、相対計算時間はステップ状やランプ状などの反応度投入方法によらないことが分かった。また、詳細メッシュ数が少ないときは、TCMFDのタイムステップを増加にするにつれて相対計算時間が増加するが、詳細メッシュが多い時は、TCMFDのタイムステップを増加させても相対計算時間が増加していないことが上記の結果より確認できる。これは、詳細メッシュが多いときはTCMFDの計算コストが非常に小さく、タイムステップを増加させてもTCMFDの計算時間は無視できるためであると考えられる。実際に、ランプ状のMAF法における、粗メッシュの $\Delta t=0.01s$ の時のTCMFDの計算時間は、詳細メッシュ計算の1/10である。そのためメッシュ数が増加すれば、TCMFDの計算時間はほぼ無視できる。そのため、MAF法は現在炉心解析手法として期待されている、Pin-by-Pinメッシュ計算のような詳細計算に適していることになる。なお、メッシュ数が増加したときに、MAF法の計算時間が θ 法よりも長い原因としては、TCMFDによって算出した振幅関数によって、詳細メッシュの計算の収束性が低下するためと考えられる¹⁰。

以上より、MAF法とTCMFD法をカップリングさせた計算手法の基本的性質について検討を行ってきた。そこで以下では、上記の検討結果を活かして、計算精度を同程度とした時の従来法との計算時間の比較を行う。

現在の炉心計算のトレンド及びMAF法のメリットを活かすために、以下では詳細メッシュ計算体系で従来法とMAF法の計算時間の比較を行う。計算時間の比較を行うために、Krylov部分空間法の6.2.1節と同様に、MAF法と従来法の計算精度が同程度になる計算条件を探索する必要がある。そこで、詳細メッシュを80×80メッシュとした時の、0.1sec毎の絶対差異の平均値の比較を行う。参照解は θ 法の $1.0 \times 10^{-4} \text{sec}$ で計算したものを扱い、TCMFDのメッシュ数を3×3、TCMFDのタイムステップを詳細メッシュの1/10とした時の結果を以下に示す。また、以降の周波数変換法の結果は、SCOPE2コード¹⁹⁾と同様に、SCMの外部反復中に動的周波数を更新することを行っている。

¹⁰ 動的周波数によって、自群散乱に似た項が発生してしまい、収束性が低下してしまう。なおこの現象はMAF法のみならず、周波数変換法にも同様に発生する。

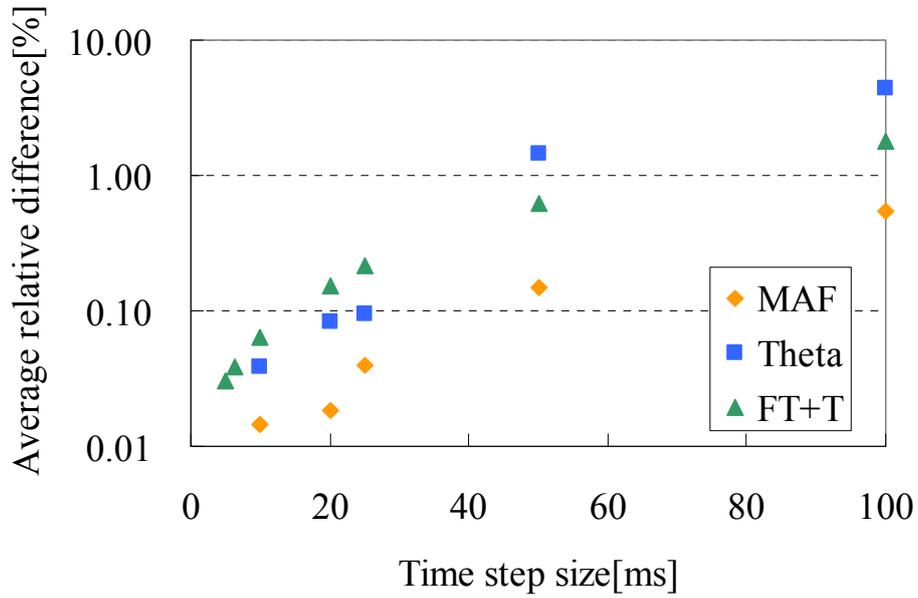


図 6.2.3.13 各計算種法の感度解析(ステップ状)

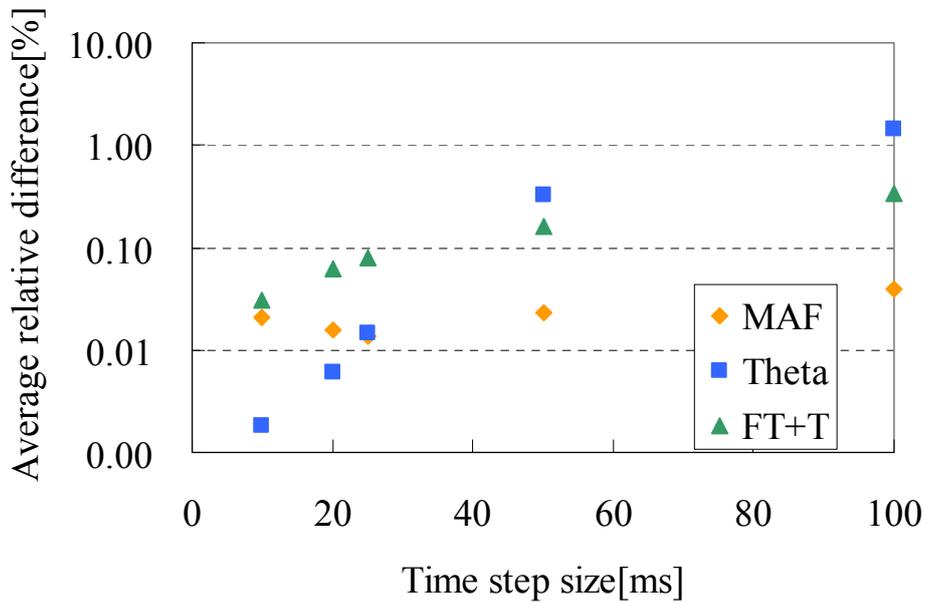


図 6.2.3.14 各計算種法の感度解析(ランプ状)

絶対値相対差異の平均値の目標値を 0.05%とすると、上記より、ステップ状において MAF、 θ 、周波数変換法のタイムステップは 25ms、10ms、6.25ms となり、ランプ状においては 100ms、25ms、10ms となる。なお、ランプ状においてタイムステップ幅を小さくした時に MAF 法の計算精度が改善されていない理由として、振幅関数を反復して

いない点及び、Coarse mesh での振幅関数を用いることによる計算差異が顕在化した点が挙げられると考えられる。

上記の検討の結果、計算精度が同程度である時の計算条件のときの相対計算時間を以下に示す。

表 6.2.3.8 相対計算時間の結果(ステップ状)

	MAF	Theta	FT+T
Relative CPU time	1.0	1.6	1.1

表 6.2.3.9 相対計算時間の結果(ランプ状)

	MAF	Theta	FT+T
Relative CPU time	1.0	2.0	4.4

表 6.2.3.8 及び 6.2.3.9 より、ステップ状・ランプ状によらず MAF 法は従来の計算手法よりも高速に計算できていることを確認できた。このことより、MAF 法は従来の計算手法よりも有用であることを確認できた。

6.2.3.5 近代ノード法におけるMAF法の計算時間についての検討

以上の全ての計算結果は、空間離散化として有限差分法を用いてきた。しかし、現在の炉心計算の主流となっている手法は有限差分法ではなく、近代ノード法である。また、今後の炉心計算方法として、主流となる可能性が高い Pin-by-Pin 計算においても、近代ノード法が有効であることが報告されている¹³⁾。そのため、本研究で開発した MAF 法が近代ノード法とカップリングを行い、近代ノード法においても MAF 法が高精度に計算できるか検討を行う。2章でも述べたように、本研究では近代ノード法として、多項式解析的ノード法を採用している。詳細メッシュを 20×20 で計算を行い、粗メッシュを 3×3 で計算を行なった計算を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップは詳細メッシュの $1/10$ とし、参照解は θ 法の 1.0×10^{-4} sec で計算を行なったものを用いた。また、これ以降の 6 章の結果は全てノード法の結果である。

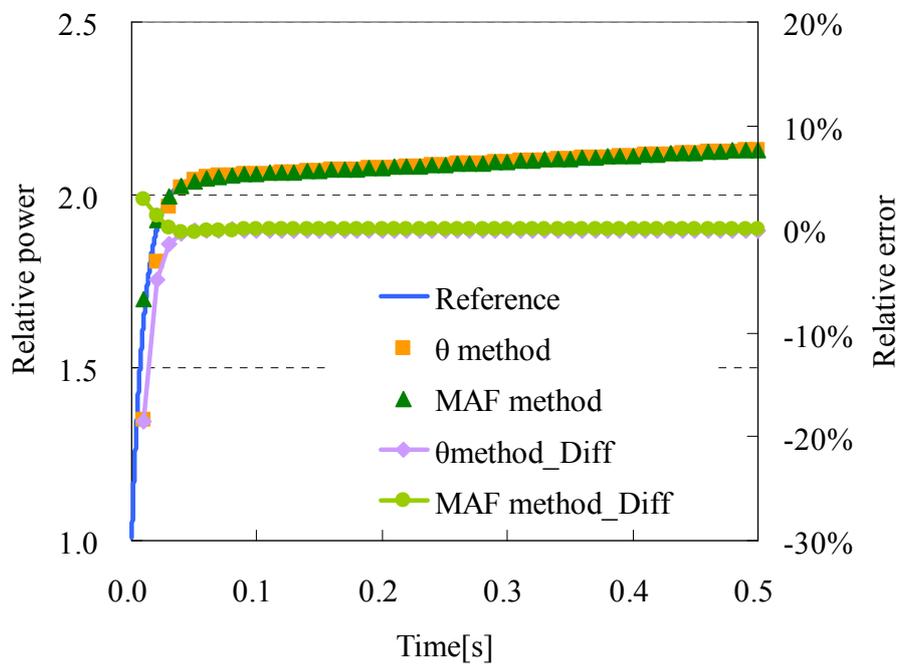


図 6.2.3.15 近代ノード法を用いた時の計算結果(ステップ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

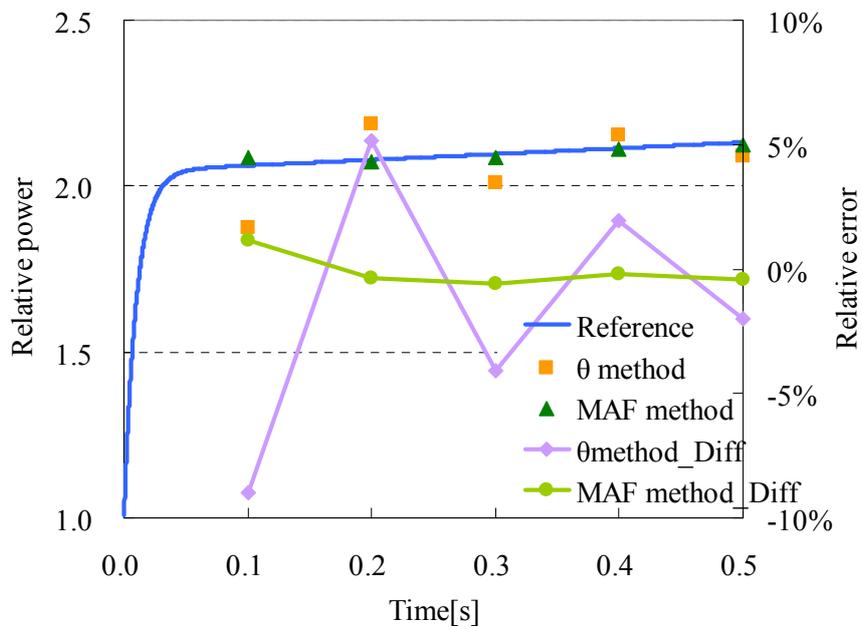


図 6.2.3.16 近代ノード法を用いた時の計算結果(ステップ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

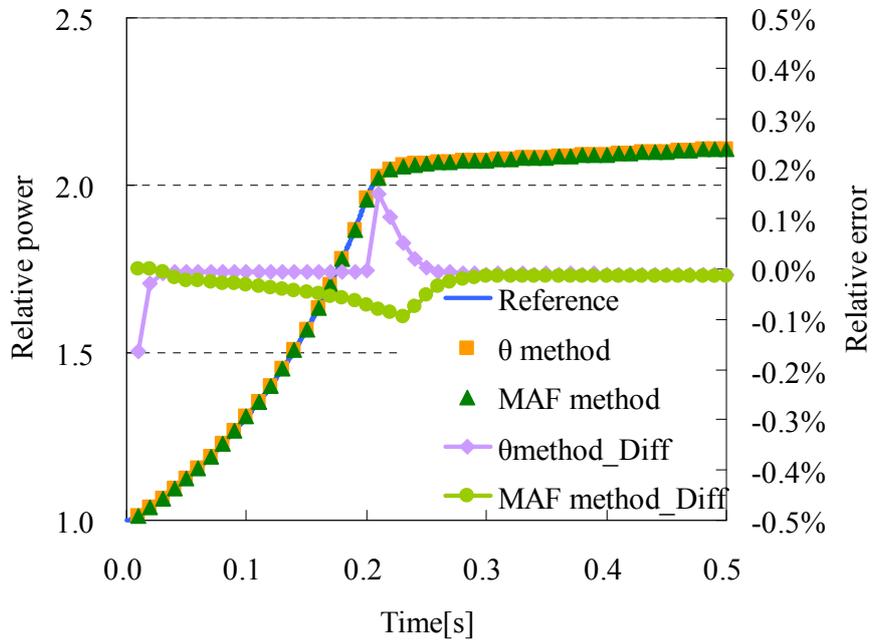


図 6.2.3.17 近代ノード法を用いた時の計算結果(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

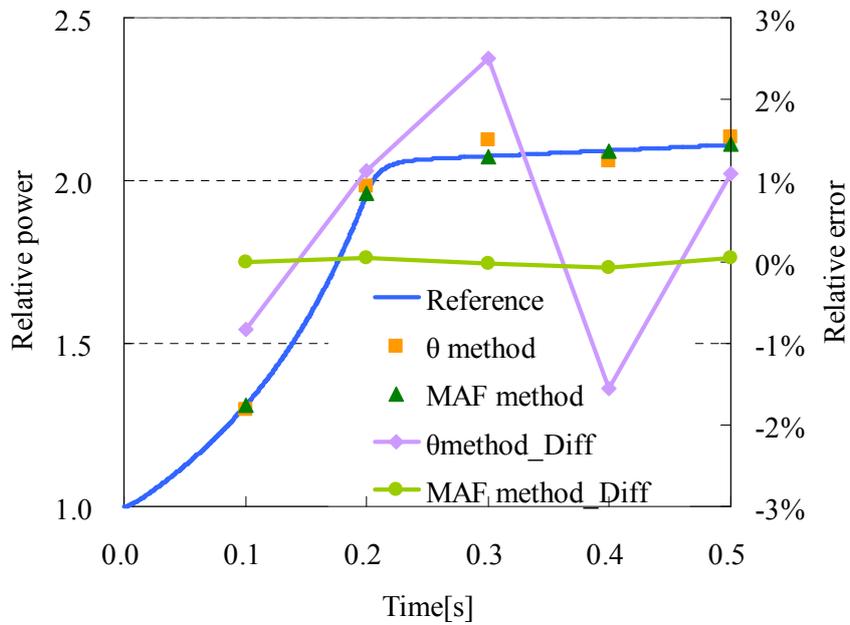


図 6.2.3.18 近代ノード法を用いた時の計算結果(ランプ状、 $\Delta t=0.1\text{sec}$)

上図の結果より、有限差分法と同様に、近代ノード法を用いたとしても MAF 法は従来法に比べて高精度に計算できていることが確認できた。また、図 6.2.3.17 において、MAF 法の計算精度が従来法に比べて僅かに低下している箇所があるが、これは近代ノード法特有のものではなく、MAF 法の計算において振幅関数の反復を行っていないためである。反復を行えば以下に示すように計算精度の低下を抑制することが可能である。しかし、図 6.2.3.17 及び図 6.2.3.19 を比較すると計算精度の差異は大差がないために、計算効率の観点から、振幅関数の反復を行うのは非効率であると考えられる。

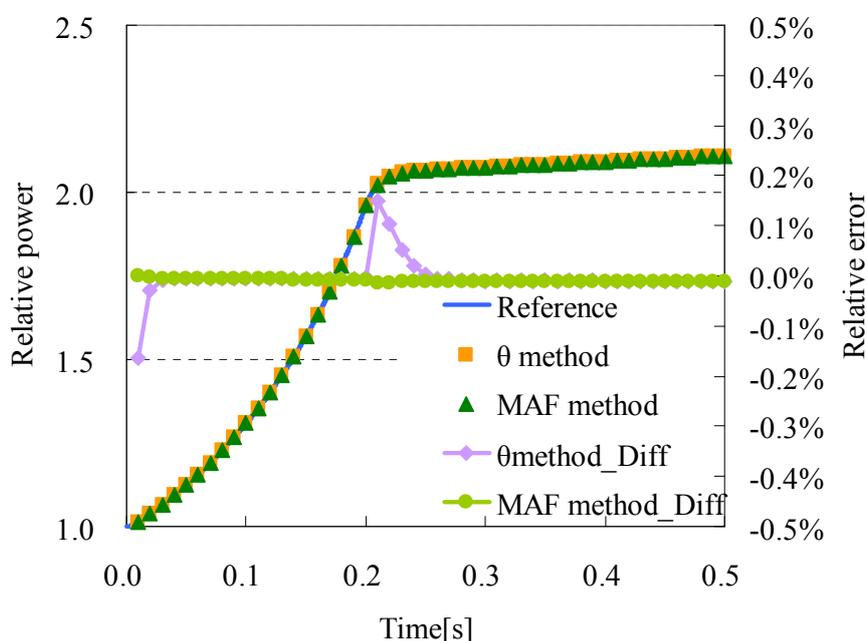


図 6.2.3.19 振幅関数の反復ありの計算結果(ランプ状、 $\Delta t=0.01\text{sec}$)

前節では、TCMFDのタイムステップ幅と計算時間について検討を行なった。そこで、本節では、TCMFDのタイムステップ幅と計算精度についての検討を行う。検討を行う計算ケースとしては、TCMFDのタイムステップを詳細メッシュのタイムステップの1、2、5、10 及び 20 分割をしたケースで検討を行う¹¹。本節では、これらの分割数をサブステップと呼称する。計算条件として詳細メッシュ 20×20 、粗メッシュ 3×3 で計算した時の計算結果を図 6.2.3.20 及び 6.2.3.21 に示す。なお、参照解の結果は θ 法で $1.0 \times 10^4 \text{sec}$ の結果を用いている。また、今回の検討はTCMFDのタイムステップに対する計算精度の影響のみを評価するために、振幅関数の反復を行っている。

¹¹ 詳細メッシュのタイムステップを1分割するケースは、TCMFDのタイムステップが詳細メッシュのものと同様な計算ケースである。

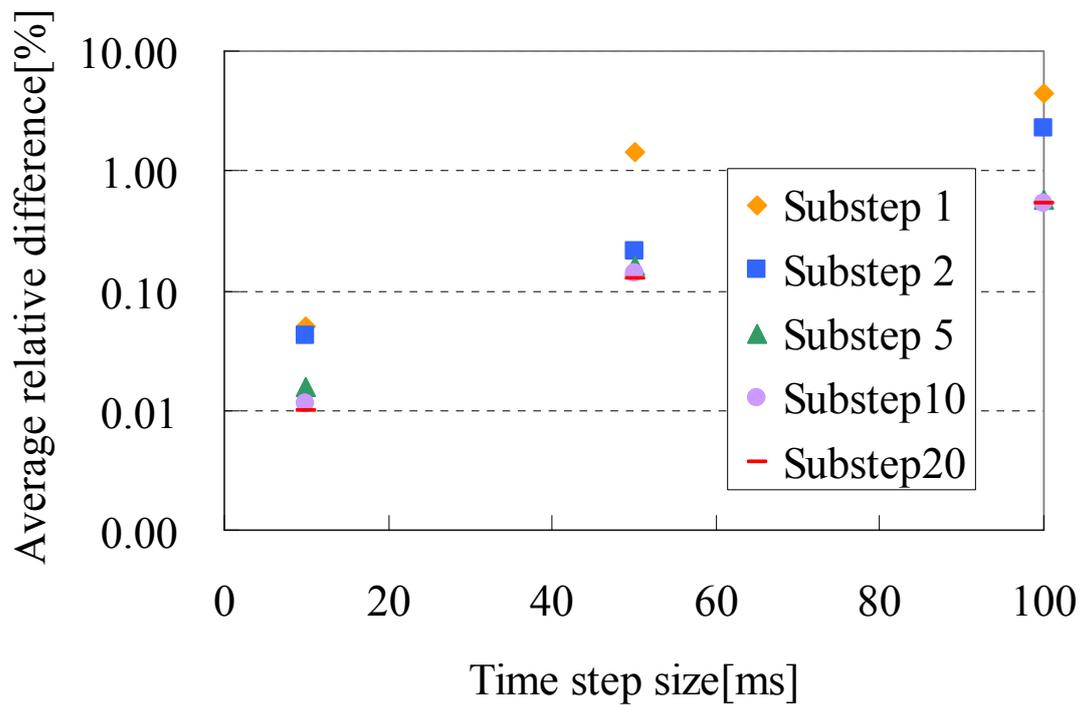


図 6.2.3.20 サブステップ数を変化させた時の計算精度の感度解析(ステップ状)

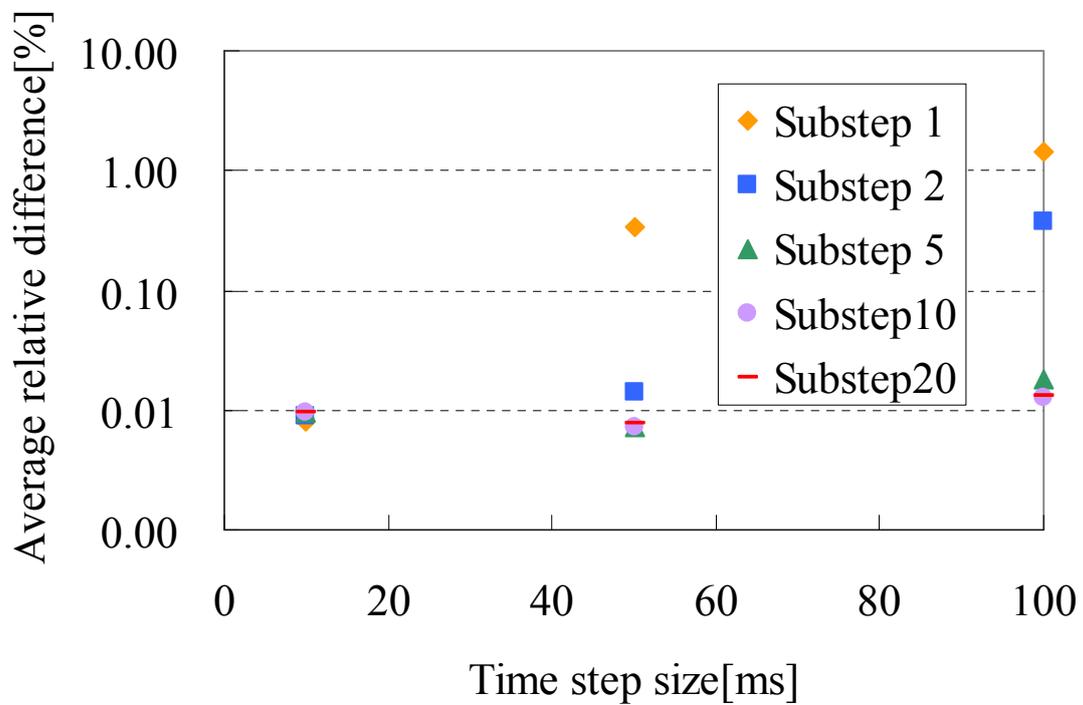


図 6.2.3.21 サブステップ数を変化させた時の計算精度の感度解析(ランプ状)

図 6.2.3.20 及び 6.2.3.21 より、各タイムステップにおいて Substep 数が 5 程度で計算精度が収束していることが分かる。この事実に関連して、ステップ状の図 6.2.3.20 より、詳細メッシュのタイムステップが粗い時は、Substep 数を増加しても参照解に近づいていないことが確認できる。これは、粗タイムステップの場合は、TCMFD に用いる粗メッシュの補正係数が精度よく計算出来ていないことに起因すると考えられる。そのため、MAF 法は TCMFD のタイムステップを詳細にすれば、計算精度が必ずしも向上するとは限らない。また図 6.2.3.21 より、詳細メッシュのタイムステップが粗の場合は、Substep 数を増加による計算精度の向上効果は大きい、タイムステップが詳細になると Substep 数に計算精度が依存していないことが確認できる。この原因としては、タイムステップが十分に細かいために、差分誤差が小さく TCMFD のタイムステップを詳細にしなくても、十分に精度がよい動的周波数が得られているためと考えられる。

近代ノード法においても同程度の計算精度の場合に、従来法に比べて高速に計算可能であるかの検討を行う。詳細メッシュを 80×80 メッシュにし、粗メッシュを 3×3 メッシュにした時の結果を以下に示す。なお、参照解は θ 法の $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{sec}$ で計算した結果を用い、TCMFD のタイムステップは先の検討から Substep 数を 5 とした。なお、振幅関数は反復を行っている。

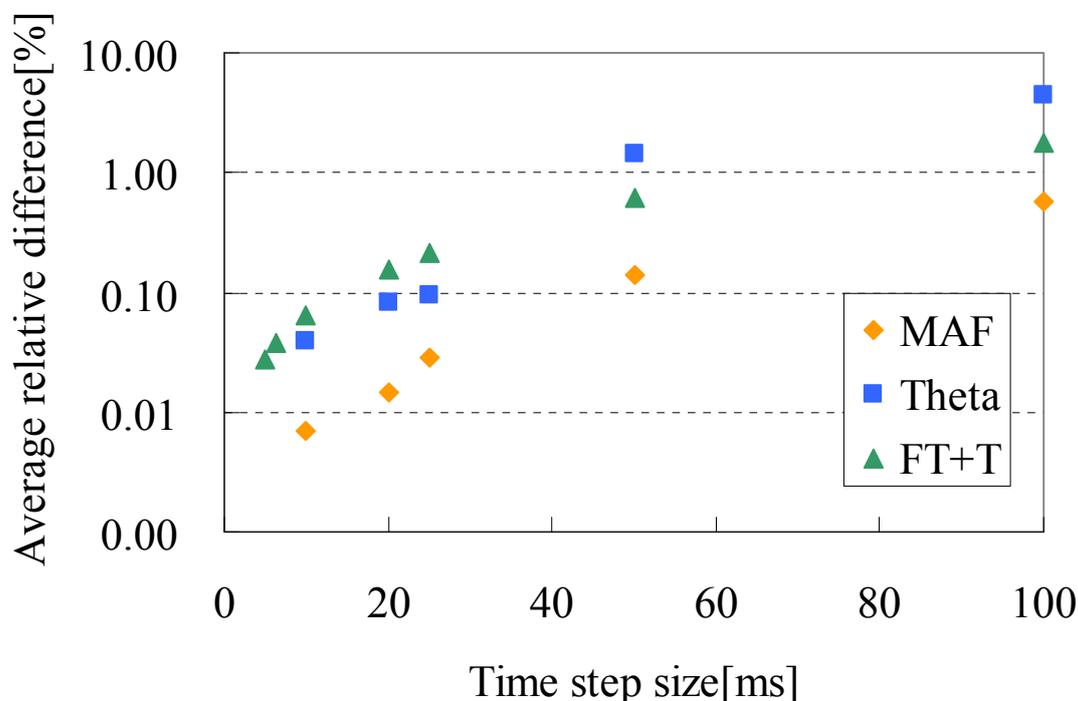


図 6.2.3.22 近代ノード法における各計算手法の感度解析(ステップ状)

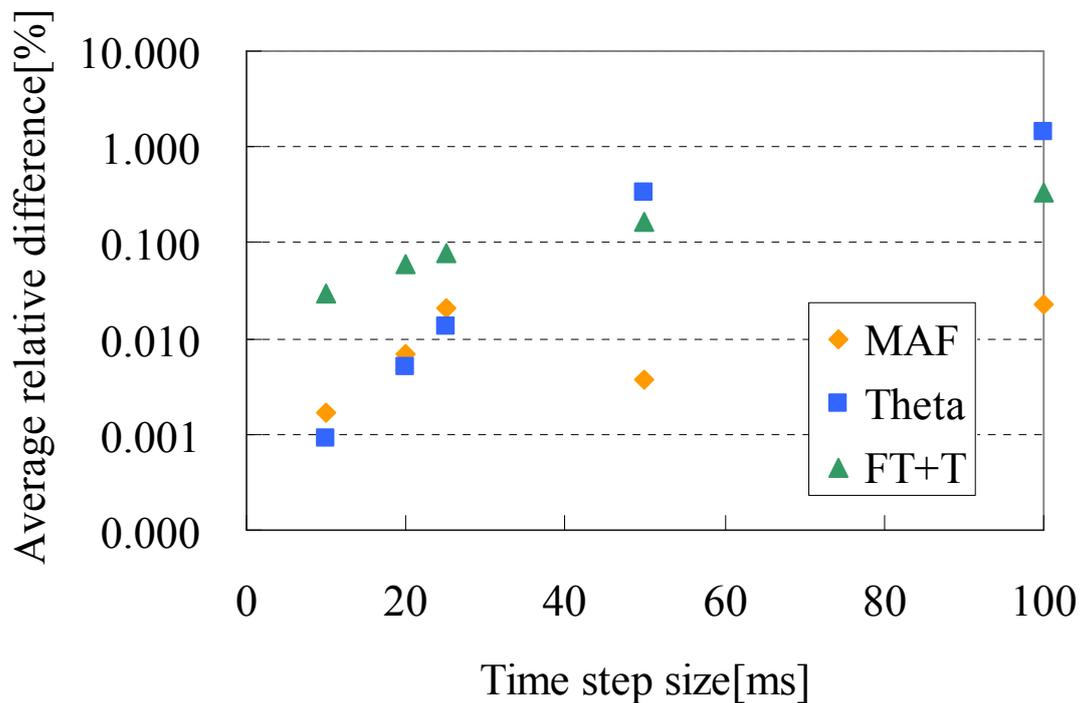


図 6.2.3.23 近代ノード法における各計算手法の感度解析(ランプ状)

目標精度を 0.05% とすると、上記より、ステップ状において MAF、 θ 法のタイムステップは 25ms、10ms となる。一方、ランプ状においては 100ms、25ms となる。なお、ランプ状において、タイムステップ幅を小さくした時に MAF 法の計算精度が改善されていない場合があるが、小数点 3 桁以下という小さな差異であるので、計算上問題がないと考えられる。

上記の検討の結果、計算精度が同程度である時の計算条件を用いて、相対計算時間を比較した結果を以下に示す。

表 6.2.3.10 近代ノード法における相対計算時間の結果(ステップ状)

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	1.8

表 6.2.3.11 近代ノード法における相対計算時間の結果(ランプ状)

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	1.8

表 6.2.3.10 及び 6.2.3.11 より、ステップ状・ランプ状によらず MAF 法は従来の計算手法よりも高速に計算可能であることを確認できた。また、近代ノード法における MAF 法の相対計算時間は、表 6.2.3.8 及び 6.2.3.9 の有限差分の結果とほぼ同程度であった。このことから、有限差分法や近代ノード法によらず MAF 法は従来法よりも高速に計算可能であり、MAF 法は従来法よりも有用であることを確認できた。

上記までの MAF 法の議論をまとめると、以下になる。

- ・ 振幅関数はエネルギー依存性を適切に取り扱わなければ、従来法よりも高精度な MAF 法の解を得ることができない。
- ・ エネルギー依存性を考えつつも計算コストを低減するために、詳細エネルギー群の TCMFD 計算を用いてエネルギー依存の振幅関数を算出する。
- ・ 詳細エネルギー群の TCMFD を用いた結果、MAF 法は従来法に比べて非常によい計算精度を実現した。
- ・ 振幅関数の反復を行わないことで、計算精度はほとんど低下させずに計算コストを大幅に低減することが可能であった。ただし、タイムステップ幅が詳細な時において、MAF法は振幅関数の反復をしないと計算精度の低下が顕著になる場合がある¹²。
- ・ メッシュ数が多い体系においては TCMFD の計算コストが相対的に低くなるために、MAF 法は詳細計算に適している。
- ・ 詳細計算体系において、計算精度を同程度にした時に MAF 法は従来法よりも高速に計算することが可能であった。
- ・ 炉心計算の主流である近代ノード法と MAF 法をカップリングさせても、有限差分法と同様に、MAF 法は従来法に比べて高精度に計算が可能である。

6.3 LMWベンチマーク問題

前節までは、TWIGL ベンチマークを用いて Krylov 部分空間法、周波数関数近似法及び MAF 法についての検証計算を行なった。その結果、Krylov 部分空間法と周波数関数近似法は従来法よりも優れている点があったが、従来法を根本的に改善するには至らなかった。しかし、MAF 法については従来法よりも非常に高精度に計算することができ、次世代の動特性解法になる可能性がある。そこで本節以降では、TWIGL ベンチマーク問題よりも実機の解析に近い、より複雑なベンチマーク問題を用いて MAF 法の感度解析を行う。

本節で用いるベンチマーク問題は LMW ベンチマーク問題²⁾である。LMW ベンチマーク問題は、以下に示すように、PWR 炉心を模擬した 3 次元計算体系であり、制御棒

¹² この項目に対する詳細な検討は、LRA ベンチマーク問題の節について検討を行う。

を移動させることにより炉心に摂動を与える。

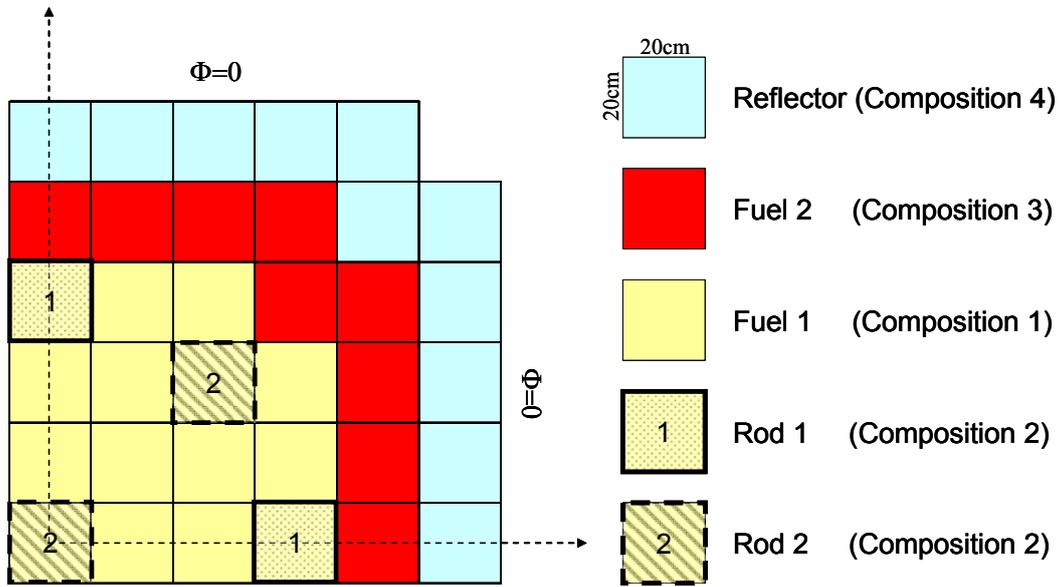


図 6.3.1 LMW ベンチマーク問題の計算体系(径方向)

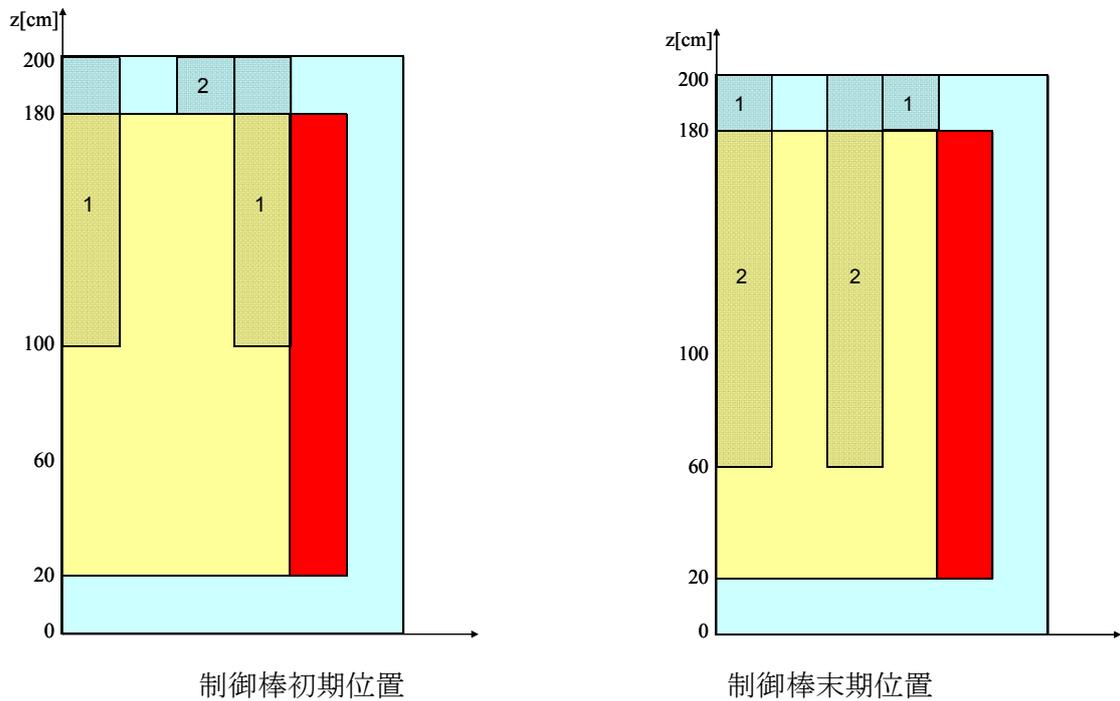


図 6.3.2 LMW ベンチマーク問題の軸方向図

表 6.3.1 及び 6.3.2 に示すように、LMW ベンチマーク問題では、中性子束のエネルギー群数を 2 群、遅発中性子先行核種数が 6 群の計算を行う。定常状態時には、制御棒バンク 1 は炉心に挿入されており、制御棒バンク 2 は炉心に挿入されていない。LMW ベン

チマーク問題では、バンク 1 の制御棒を 3cm/s で引き抜くことによって正の反応度を投入する。一方、7.5 秒からはバンク 2 の制御棒を挿入することで負の反応度を投入する。そのため、本ベンチマーク問題では、正及び負の反応度が炉心に投入されるために、TWGL ベンチマーク問題よりは複雑な計算体系になっている。

表 6.3.1 LMW ベンチマーク問題の使用核定数

Composition	Group	D[cm]	Σ_a [1/cm]	$v\Sigma_f$ [1/cm]	Σ_{21} [1/cm]
1	1	1.423913	0.01040206	0.006477691	0.01755550
	2	0.356306	0.08766217	0.112732800	
2	1	1.423913	0.01095206	0.006477691	0.01755550
	2	0.356306	0.91462170	0.112732800	
3	1	1.425611	0.01099263	0.007503284	0.01717768
	2	0.350574	0.09925634	0.137800400	
4	1	1.634227	0.00266057	0.0	0.02759693
	2	0.264002	0.04936351	0.0	
	χ_1	χ_2	ν	ν_1 [cm/s]	ν_2 [cm/s]
	1	0	2.5	1.25E+07	2.50E+05

Perturbation

Control Rod Group 1 removed at 3.0cm/s, $0.0 < t < 26.666s$

Control Rod Group 2 inserted at 3.0cm/s, $7.5 < t < 47.5s$

表 6.3.2 LMW ベンチマーク問題の使用遅発中性子先行核定数

Family	β	λ [1/s]
1	0.0002470	0.0127
2	0.0013845	0.0317
3	0.0012220	0.1150
4	0.0026455	0.3110
5	0.0008320	1.4000
6	0.0001690	3.8700

LMW ベンチマーク問題には、フィードバックを考慮しない場合とフィードバックを考慮する場合の計算がある。一般的に行われる LMW ベンチマーク問題の計算はフィードバックがない問題であり、本研究でもこちらのみ検証計算を行う。

6.3.1 LMWベンチマーク問題 without feedback

本節で検討を行う、LMW benchmark problem without feedback は動特性計算の検証計算に多く用いられている手法であり、計算結果については数多くの論文に記載されている^{2, 10, 14-19}。そこで本節では、現在まで計算されてきた LMW ベンチマーク問題の結果と自作コードの計算結果を比較することで、自作の計算コードで妥当な計算が行えているかを確認する。自作の計算コードの多項式解析的ノード法で計算した結果と、他の炉心計算コードの炉心平均出力密度[W/cm³]の計算結果を比較したものを表 6.3.1.1 及び図 6.3.1.1 に示す。なお、収束条件は 1.0×10^{-7} とした。

表 6.3.1.1 LMW ベンチマーク問題の計算結果

Calculation code	SKETCH-N	SPNOVA-K	AETNA	SIMULATE-3	SPANDEX	自作
Mesh structure	11×11×40	6×6×10	11×11×40	6×6×10	22×22×80	20×20×40
Timestep size[s]	0.25	2	0.25	2	0.375	0.1
Time[s]	Power density[W/cc]					
0	150	150	150	150	150	150
10	201	203	199	200	201	200
20	257	259	253	256	257	256
30	207	209	204	205	206	207
40	122	124	121	122	121	122
50	76	77	75	75	75	76
60	58	59	58	58	58	58

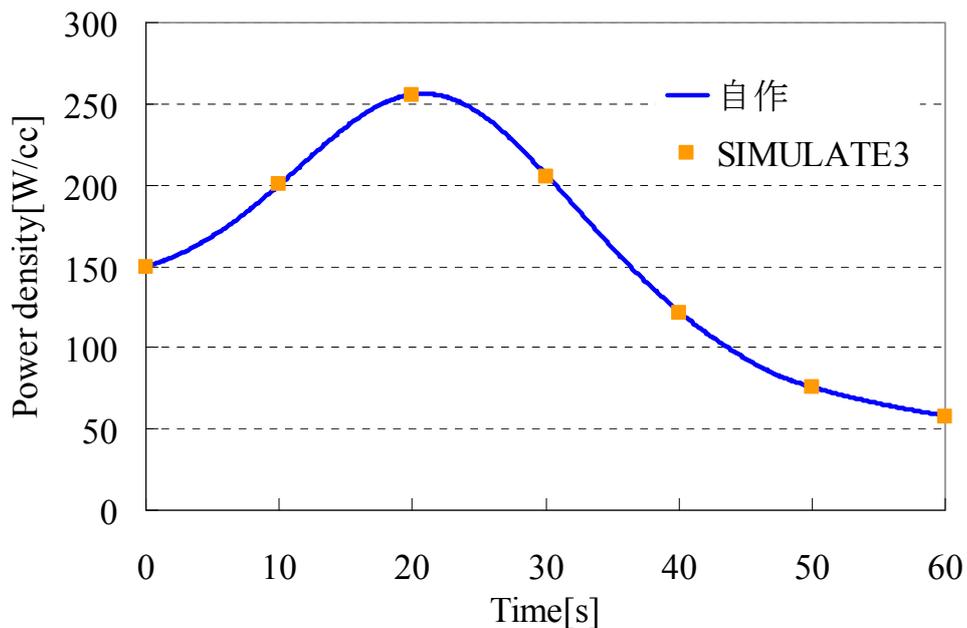


図 6.3.1.1 自作コードと SIMULATE3 の計算結果の比較

表 6.3.1.1 より、本研究で作成した自作コードと商用炉心計算コードはよい一致をしている。実際に、図 6.3.1.1 に自作コードの計算結果と SIMULATE3 コード⁹⁾の計算結果を示しているが、非常によく一致していることが確認できる。このことから、自作コードは適切に LMW ベンチマーク問題を計算できていることを確認したので、以下では、自作コードの計算条件を様々に変化させることで、MAF 法と従来法の感度解析を行っていく。なお、TWIGL ベンチマーク問題において、ノード法と MAF 法のカップリングは特に問題がなかったために、以下の結果は全てノード法の結果である。

TWIGL ベンチマーク問題において、MAF 法は従来法に比べて高精度に計算することが可能であった。しかし、LMW ベンチマークにおいて MAF 法は高精度に計算ができるかの検討を行っていない。そこで、LMW ベンチマーク問題でも MAF 法が高精度に計算できるか確認する必要がある。詳細メッシュを $22 \times 22 \times 40$ メッシュ、TCMFD のメッシュ数を $6 \times 6 \times 10$ メッシュで計算をした時の計算結果を以下に示す。なお、参照解は表 6.3.1.1 に示した自作コードの結果を用いている。

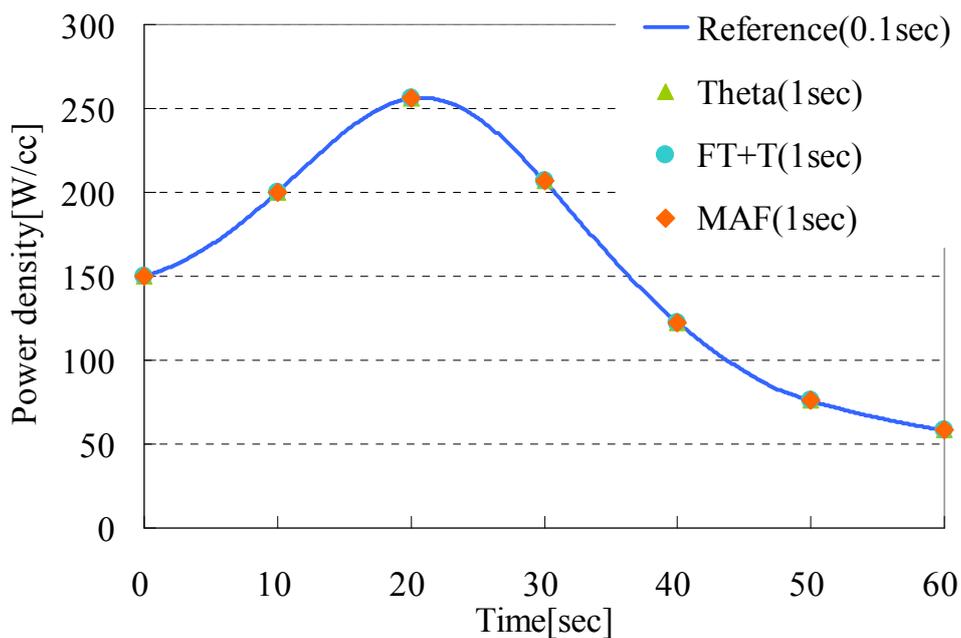


図 6.3.1.2 LMW ベンチマーク問題の結果 ($\Delta t = 1 \text{ sec}$)

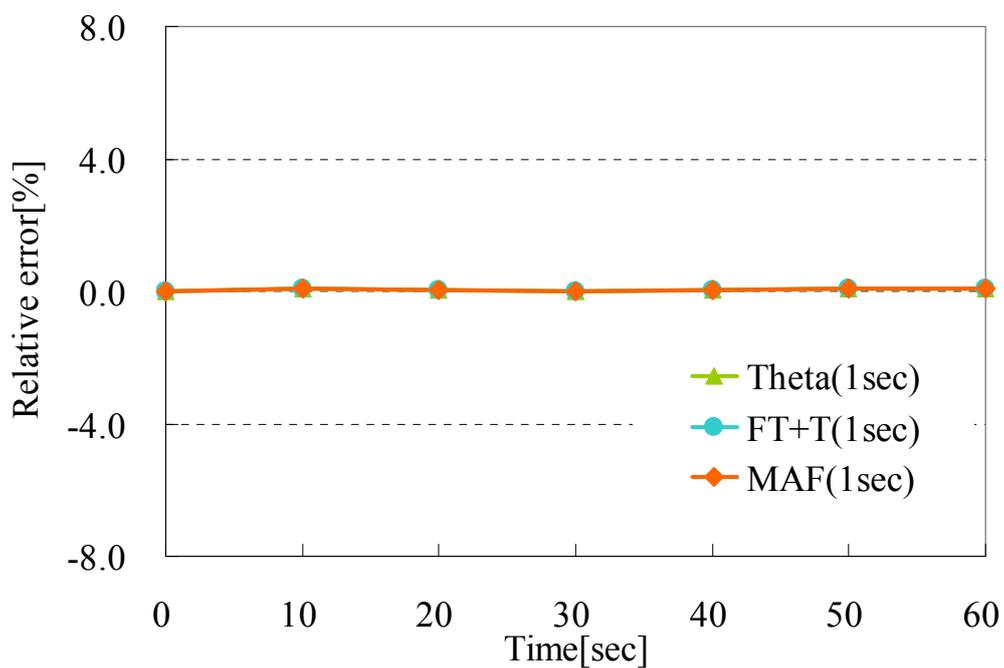


図 6.3.1.3 LMW ベンチマーク問題の結果の相対差異 ($\Delta t = 1\text{sec}$)

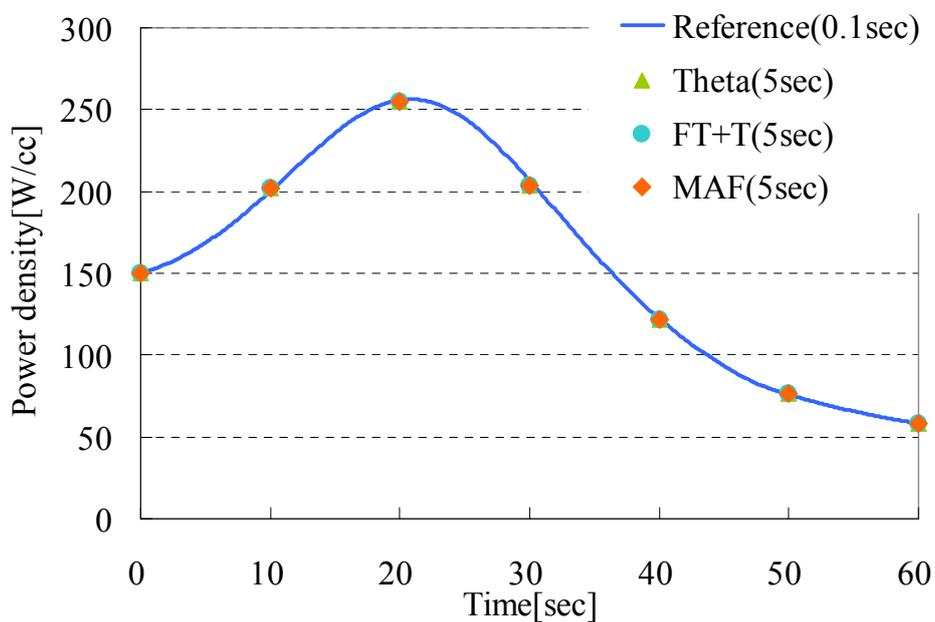


図 6.3.1.4 LMW ベンチマーク問題の結果 ($\Delta t = 5\text{sec}$)

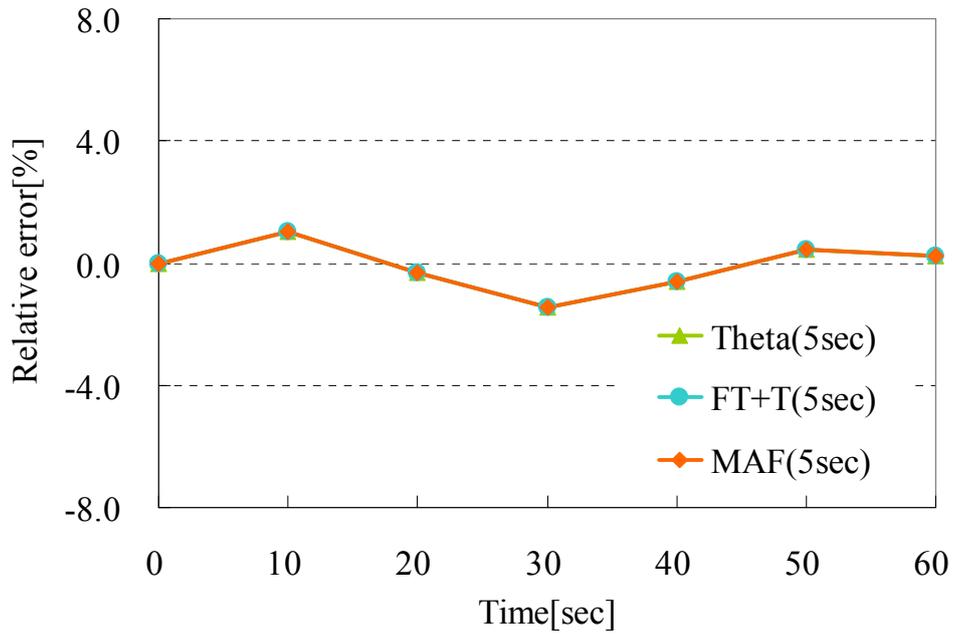


図 6.3.1.5 LMW ベンチマーク問題の結果の相対差異($\Delta t = 5\text{sec}$)

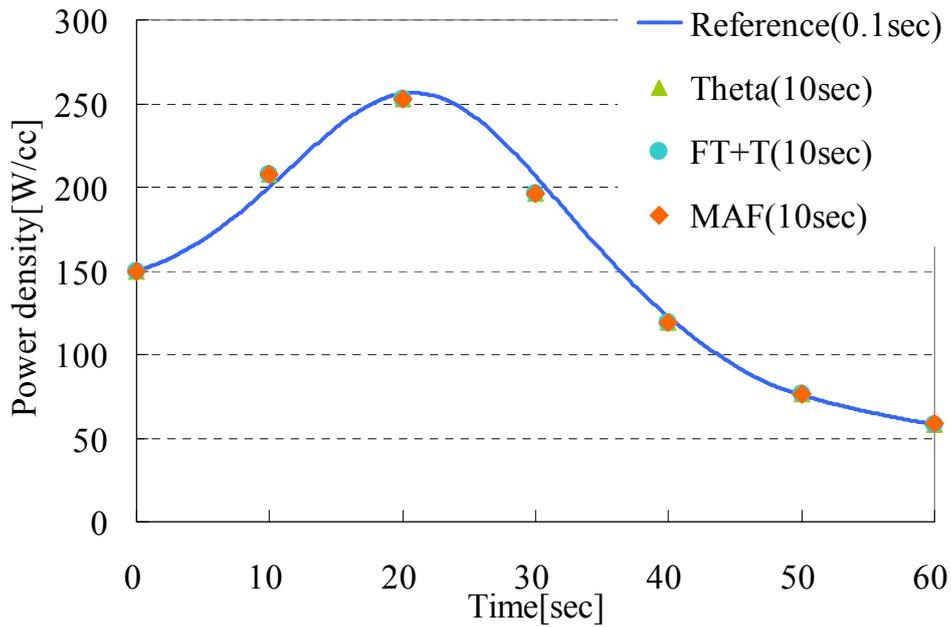


図 6.3.1.6 LMW ベンチマーク問題の結果($\Delta t = 10\text{sec}$)

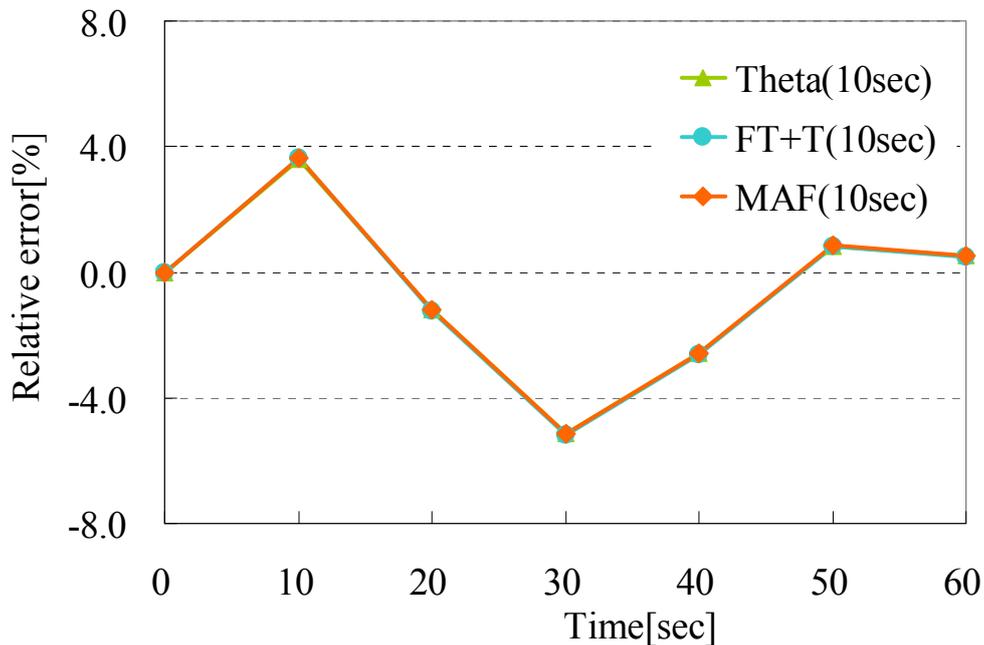


図 6.3.1.7 LMW ベンチマーク問題の結果の相対差異($\Delta t=10\text{sec}$)

上図より、LMW ベンチマーク問題では、従来法である周波数変換法と θ 法の計算精度と MAF 法の計算精度は同程度であることが確認できる。しかし、MAF 法は TCMFD とカップリングさせることで、詳細タイムステップでの計算結果を反映しているため、計算精度が向上するはずである。このように、LMW ベンチマーク問題で MAF 法の計算精度が向上しなかった原因としては、TWIGL ベンチマーク問題に比べ、LMW ベンチマーク問題はタイムスケールが大きく遅発中性子先行核の精度が、出力の結果に大きく寄与するためと考えられる。

一般的な遅発中性子先行核密度の計算方法は、核分裂源を線形近似することで遅発中性子先行核密度を解析的に計算する方法である。そのため、核分裂源を線形で適切に近似できる場合には、高精度に計算が可能である。しかし、タイムステップ幅が 10sec の場合のような粗タイムステップでは、図 6.3.1.6 から確認できるように、核分裂源(炉心出力)が線形に変化していないことが分かる。そのため、LMW ベンチマーク問題のようにタイムスケールが大きな問題の場合には、遅発中性子先行核密度を精度よく計算しなければタイムステップ幅を大きくすることが困難である。そこで、粗タイムステップで遅発中性子先行核密度を正確に計算するための方法として、4 章の MAF 法の節で述べた次式を用いる。

$$\begin{aligned}
C_m(\mathbf{r}, t + \Delta t) = & \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_m \Delta t - \frac{(1 - \theta)\Delta t}{Q_{m,i}(t)} \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \Big|_t}{1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t}} \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)} C_m(\mathbf{r}, t) \\
& + \frac{\theta \Delta t}{\left(1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t}\right)} \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) \\
& + \frac{\Delta t}{\left(1 + \lambda_m \theta \Delta t + \frac{\theta \Delta t}{Q_{m,i}(t + \Delta t)} \frac{\partial Q_{m,i}(t)}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t}\right)} \frac{Q_{m,i}(t + \Delta t)}{Q_{m,i}(t)} (1 - \theta) \beta_m \sum_g v \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{6.3.1.1}$$

(6.3.1.1)式の詳細は既に述べているので本節では簡易に述べるが、上式は見かけ上は遅発中性子先行核密度の式であるが、実際には形状関数の式である。そのため、時間に対して弱く依存するために、粗タイムステップで計算しても精度よく計算できる可能性がある。上式を計算コードに実装した時のタイムステップ幅 $\Delta t = 10\text{sec}$ の時の計算結果を以下に示す。

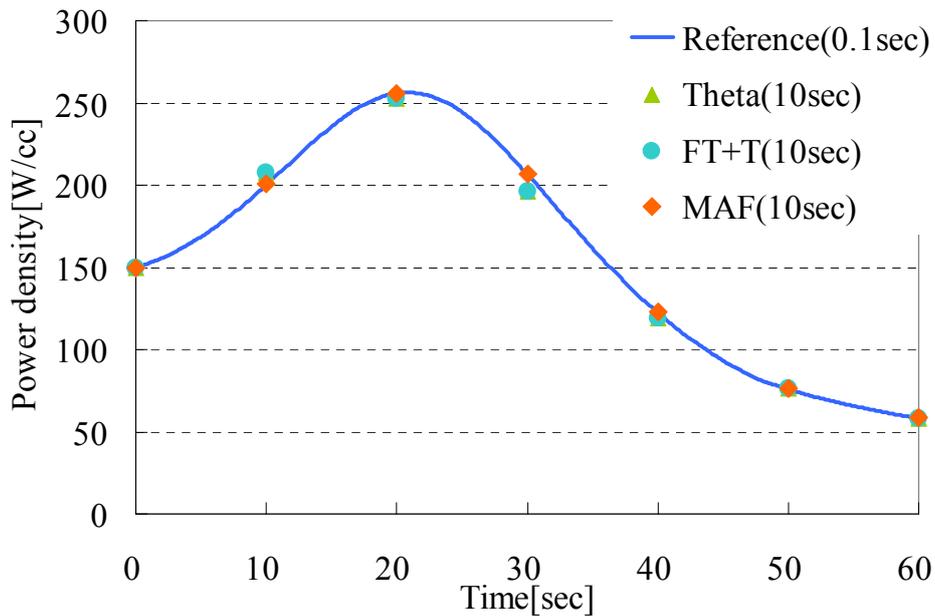


図 6.3.1.8 遅発中性子先行核密度の解法を変更した時の結果 ($\Delta t = 10\text{sec}$)

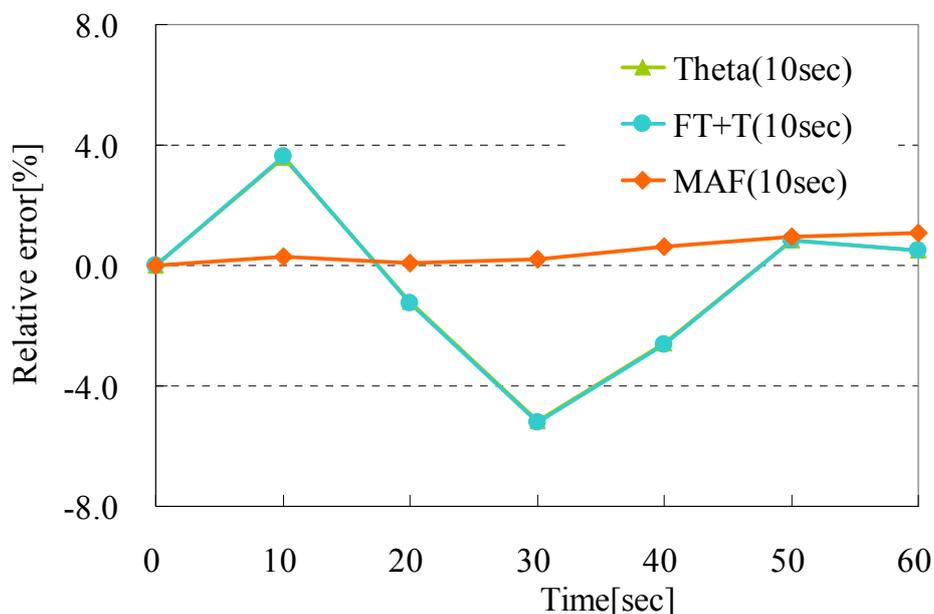


図 6.3.1.9 遅発中性子先行核密度の解法を変更した時の相対差異 ($\Delta t=10\text{ecs}$)

上図より、タイムステップ幅 $\Delta t=10\text{sec}$ という非常に大きなタイムステップ幅にも関わらず、遅発中性子先行核密度の解法を変更した MAF 法は、従来法に比べて高精度に計算ができていることを確認した。このように遅発中性子先行核密度の解法を変更して計算精度を向上できたのは、MAF 法独自の遅発中性子先行核密度の計算方法の採用と、TCMFD とのカップリングを用いて中性子束を高精度に計算出来ているためである。上記より、LMW ベンチマーク問題でも MAF 法を用いることで従来法よりも高精度に計算できることを確認した。

上記より、 $\Delta t=10\text{sec}$ のような粗タイムステップ幅においても、高精度に炉心の動特性を評価できることを示した。タイムステップが大きいと計算コストが低減できるが、安全解析で必要となる、燃料の発生熱量等の積分量を適切に計算できなくなる可能性がある。炉心の出力変化の積分値を正確に計算するためには、小さいタイムステップ幅で詳細な炉心の出力変化を評価する必要がある。しかし、これは計算コストを増大させてしまうことや、MAF 法の粗タイムステップで計算できるメリットを大きく低減させてしまう。そこで、MAF 法の粗タイムステップ計算でも炉心の詳細な出力変化を得るための方法として、TCMFD の結果を用いる方法を新たに提案する。

MAF 法は、詳細メッシュ計算を再現するように TCMFD の計算を行なっている。そのため、TCMFD の結果は通常の粗メッシュ計算に比べて精度がよい。また、TCMFD は詳細メッシュに比べて詳細タイムステップで計算している。このことから、詳細メッシュのタイムステップ間の出力は、TCMFD の結果で代用できる可能性が高いと考えら

れる。この TCMFD の結果を用いる方法の妥当性を検証するために検証計算を行う。計算条件を先のものと同様とした時の計算結果を以下に示す。

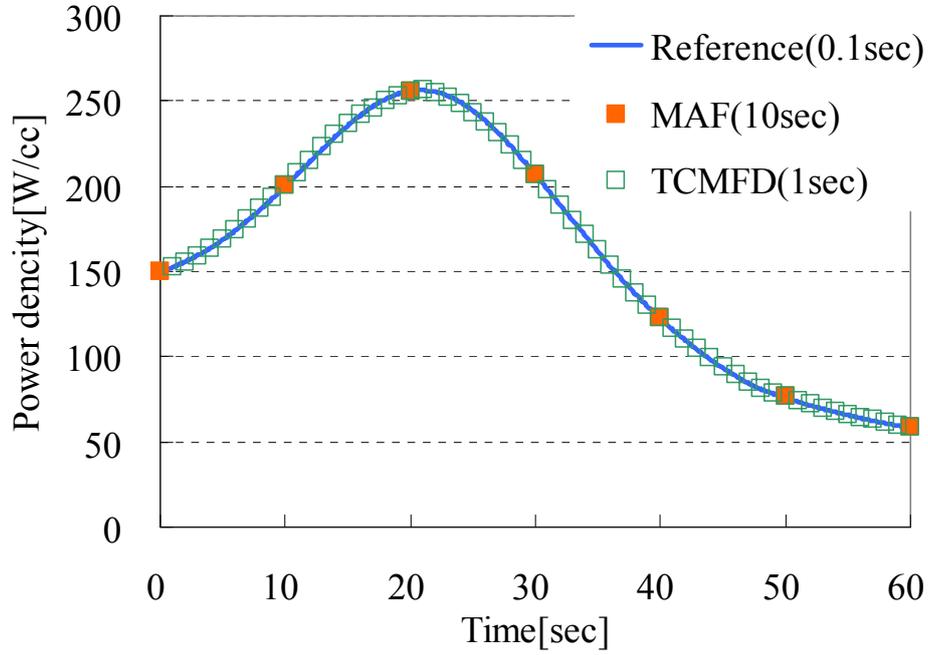


図 6.3.1.10 TCMFD の計算結果を用いて詳細メッシュ計算の補間をした時の結果

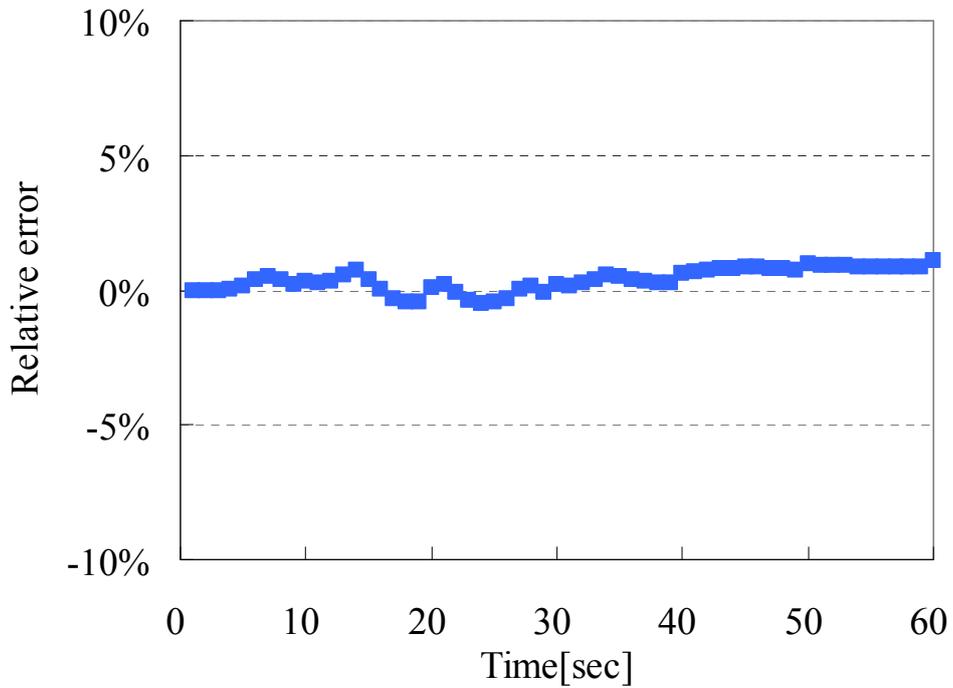


図 6.3.1.11 TCMFD の結果を用いた時の相対差異

図 6.3.1.10 より、詳細メッシュ計算のタイムステップ間を TCMFD の結果を用いることにより、炉心の出力推移を滑らかに再現できていることが分かる。また、参照解との相対差異を比較しても、非常に精度よく計算ができていることが確認できる。以上のことより、TCMFD の結果を用いて、詳細メッシュにおいて詳細タイムステップで計算した時とほぼ同程度の計算精度を得ることが可能であることを示した。

以上より、LMW ベンチマーク問題を用いて、MAF 法の基本的な性質に関して感度解析を行って来た。そこで、MAF 法を用いることで従来法よりも計算効率がどの程度向上したのかを定量的に評価する必要がある。上述した、遅発中性子先行核密度の新たな計算方法と TCMFD を用いた計算結果の補間を用いることにより、詳細タイムステップの従来法とほぼ等価の計算結果を得ることが可能であることを示した。このことを踏まえて、従来法のタイムステップ幅 $\Delta t=1\text{sec}$ の時と、MAF 法の詳細メッシュのタイムステップ $\Delta t=10\text{sec}$ 及び TCMFD のタイムステップ幅 $\Delta t=1\text{sec}$ の時を比較することで、計算時間の比較を行う。メッシュ構成は今までの計算条件と同様の時の相対計算時間を以下に示す。

表 6.3.1.2 相対計算時間

	MAF	Theta	FT+T
Relative CPU time	1.0	3.8	4.0

表 6.3.1.2 より、MAF 法は従来法よりも高速に計算ができていることが確認できる。上記のように、MAF 法が従来法よりも高速に計算できる要因は、TCMFD を用いることで、粗タイムステップを用いても詳細タイムステップの結果を精度よく得ることが可能なためである。このことより、MAF 法は従来法よりも有用性が高い手法であることを確認した。

TWIGL ベンチマーク問題において、粗メッシュ数が詳細メッシュ数に対して十分に小さい時に MAF 法の利点が活かせることを示した。表 6.3.1.2 の時の MAF 法における振幅関数の計算は計算時間の 30%を占めており、十分に MAF 法のメリットが活かされているとは言い難い。そこで、上記までの計算条件よりも粗メッシュ/詳細メッシュの比を小さくすることで、LMW ベンチマーク問題でも MAF 法の有用性がさらに向上するかについて検討を行う。

計算体系を詳細メッシュ $55 \times 55 \times 100$ に変更を行い、TCMFD に用いる粗メッシュを $6 \times 6 \times 10$ メッシュ、タイムステップ幅を $\Delta t=1\text{sec}$ とした時の計算結果について比較を行う。比較を行うに当たり、MAF 法が先の計算条件と同様に高精度に計算が可能か否

かを確認する必要がある。参照解を θ 法の $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{sec}$ で計算したときの計算結果及び相対差異を以下に示す。

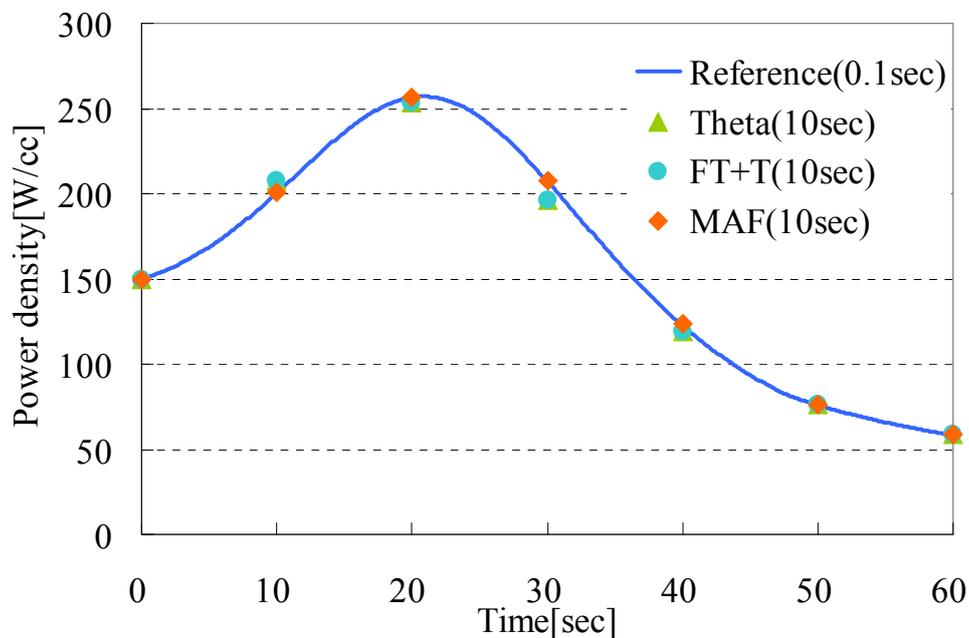


図 6.3.1.12 詳細メッシュ時の計算結果($\Delta t = 10 \text{sec}$)

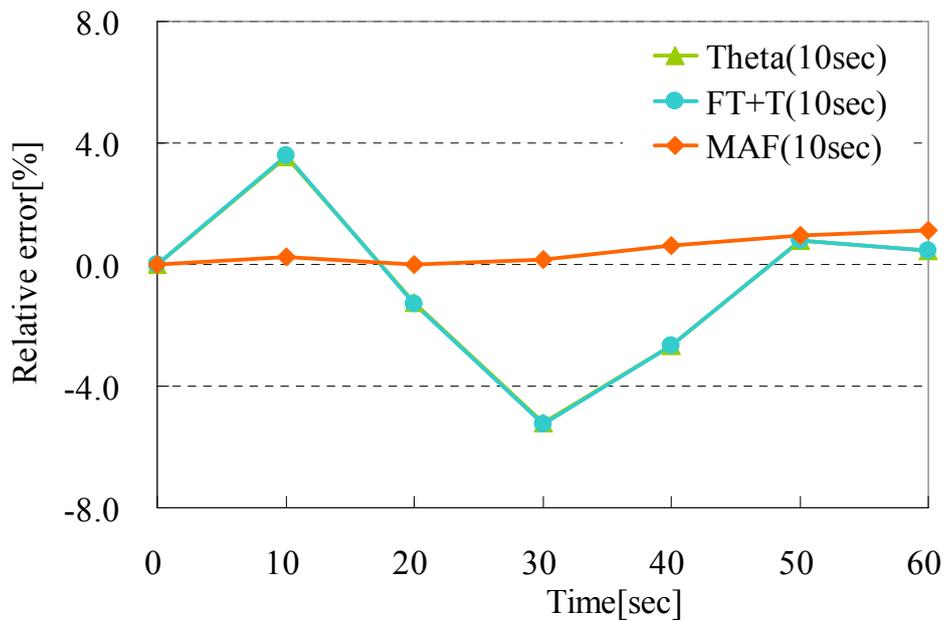


図 6.3.1.13 詳細メッシュ計算における相対差異($\Delta t = 10 \text{sec}$)

上記より、詳細メッシュ計算においても、MAF 法は高精度に計算できていることを確認した。また、TCMFD の計算結果を用いて、詳細メッシュのタイムステップ間の出力を補間した結果を以下に示す。

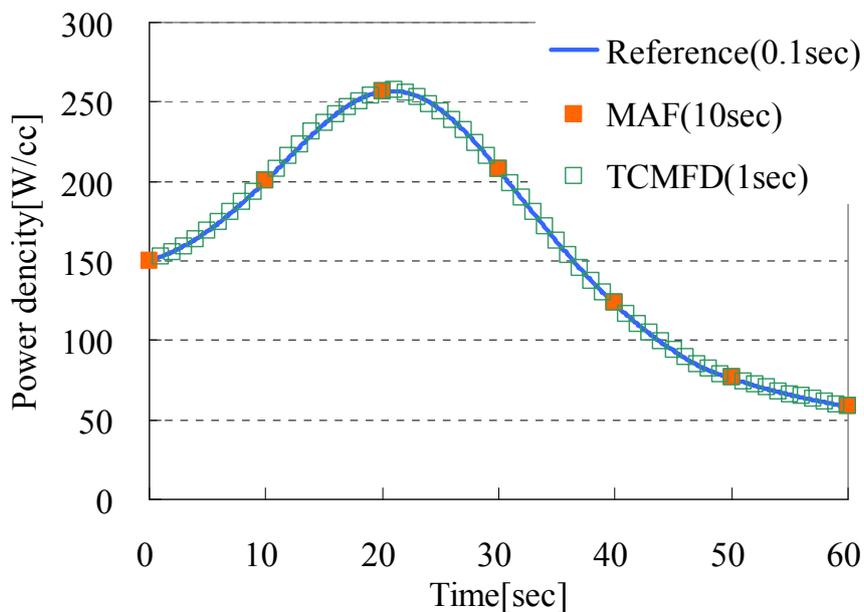


図 6.3.1.14 詳細メッシュ計算における TCMFD の計算結果

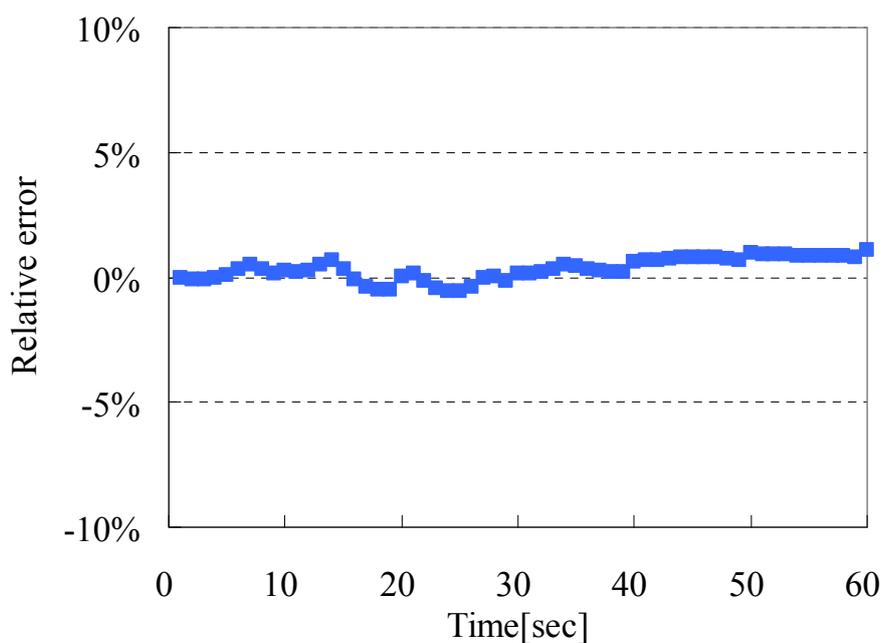


図 6.3.1.15 詳細メッシュ計算における TCMFD と参照解の相対差異

以上のことから、今回の $50 \times 50 \times 100$ メッシュの詳細計算は先の $20 \times 20 \times 40$ メッシュとほぼ同様の結果を得ることができた。このことから、今回の詳細メッシュ計算においても先と同様に、従来法の θ 法及び周波数変換法の $\Delta t = 1\text{sec}$ の時の計算時間の比較を行う。上記した MAF 法及び従来法の計算条件で計算した時の相対計算時間を以下に示す。

表 6.3.1.3 詳細メッシュ計算の相対計算時間

	MAF	Theta	FT+T
Relative CPU time	1.0	4.6	4.8

表 6.3.1.3 より、先の表 6.3.1.2 より MAF 法の有用性が向上していることが確認できる。そのため、TWIGL ベンチマーク問題のような 2 次元体系だけではなく、3 次元体系においても粗メッシュ/詳細メッシュの比を小さくすることで、MAF 法のメリットをより活かされることを確認した。なお、表 6.3.1.3 の結果が表 6.3.1.2 と比較してあまり変化がない原因としては、詳細メッシュが十分に細かく、TCMFD の計算時間が合計の計算時間に対しての影響が小さいためと考えられる。事実、表 6.3.1.2 の条件では、TCMFD の計算時間の割合は全体の計算時間の 20%程度であり、小さかった。

上記では、粗メッシュ/詳細メッシュの比を小さくすることで、MAF 法の有用性を向上させてきた。しかし、先に議論してきた、MAF 法と TCMFD の結果を用いることで、詳細タイムステップの計算も再現できるという点に着目すれば、TCMFD のタイムステップを細かくすることで、より詳細タイムステップの計算を行ったことと等しいことになるので、従来法よりも計算効率をさらに向上させることが可能である。TCMFD のタイムステップ幅のみ $\Delta t = 0.1\text{sec}$ に変更し、その他の計算条件を先のものと同様にした時の、計算結果及び計算差異を以下に示す。

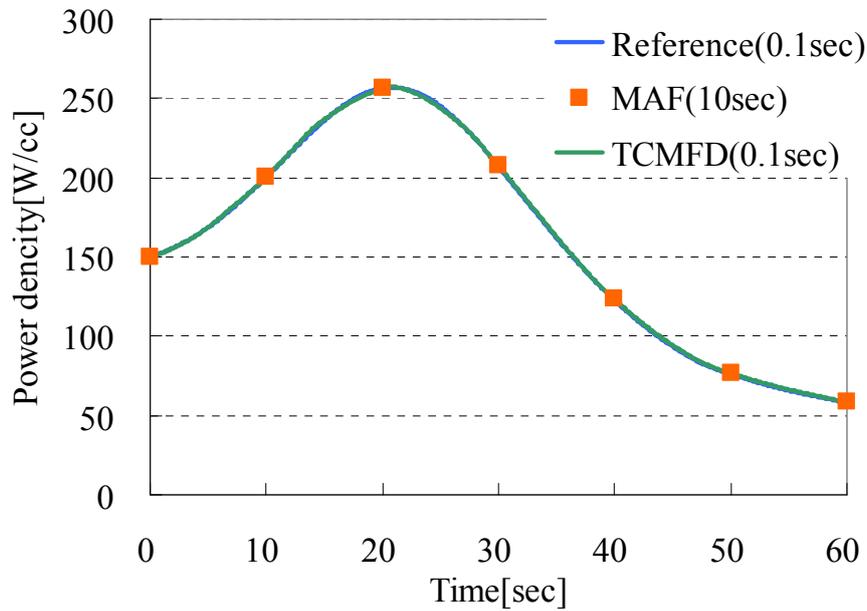


図 6.3.1.16 詳細メッシュ計算における TCMFD($\Delta t=0.1\text{sec}$)の時の結果

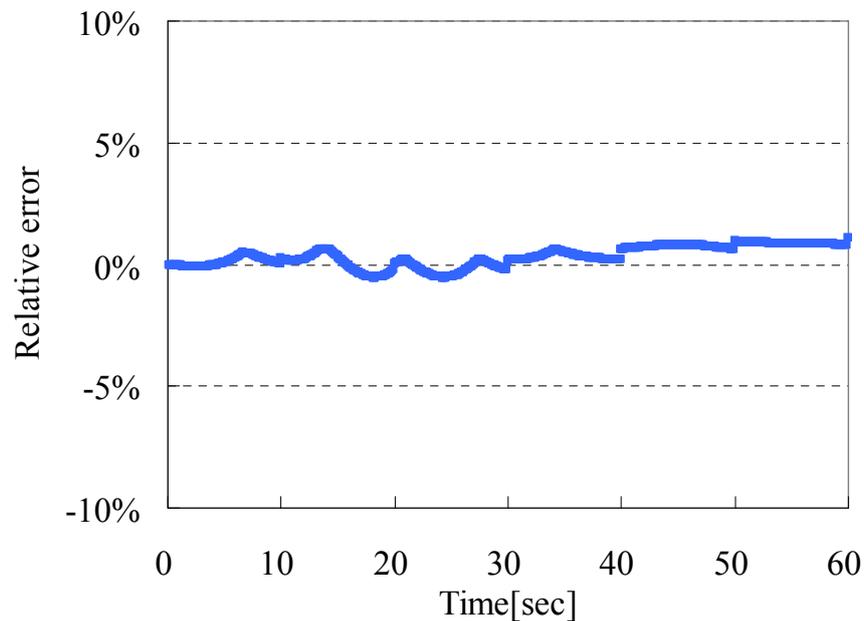


図 6.3.1.17 詳細メッシュ計算における TCMFD($\Delta t=0.1\text{sec}$)の時の相対差異

図 6.3.1.16 及び 6.3.1.17 から、詳細メッシュ計算で $\Delta t=0.1\text{sec}$ で計算した時(参照解)の結果を MAF 法と TCMFD の結果は精度よく再現できていることが確認できる。これは、詳細メッシュの計算を TCMFD に上手く再現できるように、優れた補正係数を TCMFD に与えているためであると考えられる。実際に、図 6.3.1.17 の相対差異の絶対値の平均

値は 0.4%であり、MAF 法と TCMFD の結果は高精度に計算ができています。また、図 6.3.1.17 から、10sec 毎に相対差異の傾向が変化していることが確認できる。この不連続性の原因は以下のメカニズムで発生すると考えられる。

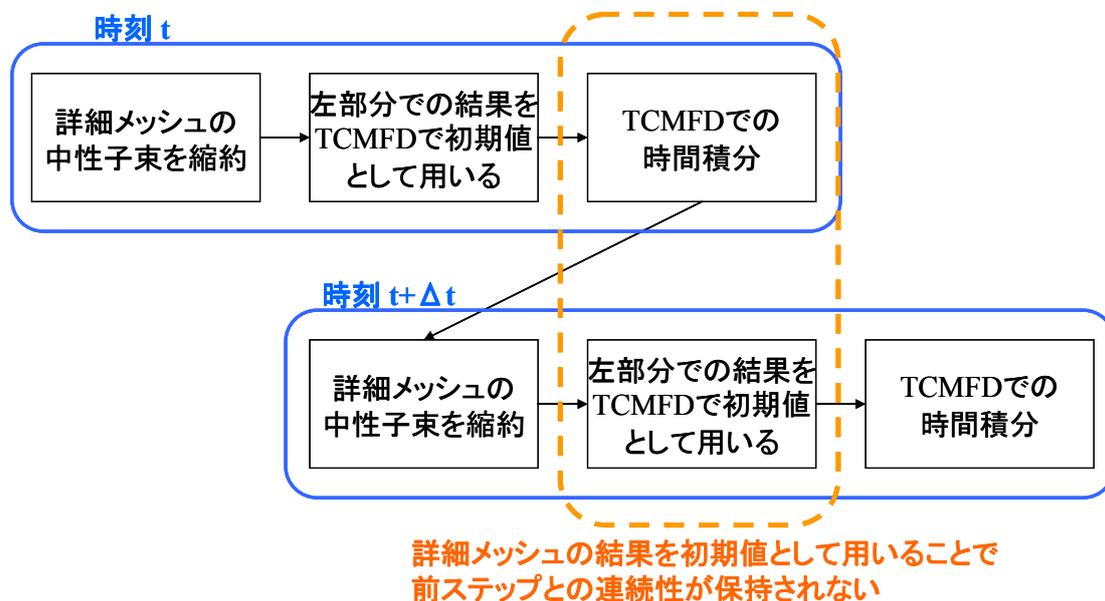


図 6.3.1.18 TCMFD における計算結果の不連続性発生メカニズム

図 6.3.1.18 に示すように、詳細メッシュでの計算結果を TCMFD の初期値として用いている。そのため、詳細メッシュのタイムステップ内での TCMFD の計算は、TCMFD の計算のみであるので計算結果は連続的に変化する。しかし、次タイムステップの初期値は、また詳細メッシュでの計算結果を初期値として利用するので、前ステップ最後の TCMFD の計算結果と現タイムステップの TCMFD の結果は連続性が保持できなくなってしまう。ただし、図 6.3.1.17 のように今回の計算の場合はこの不連続性は小さいので、あまり問題にする必要性がない。以上より、TCMFD のタイムステップを小さくした時の傾向及び問題点について記述した。なお、目的である、MAF 法と参照解の計算時間を比較すると、以下の結果を得る。

表 6.3.1.4 MAF 法と参照解の相対計算時間

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	23.4

表 6.3.1.4 より、MAF 法は粗タイムステップで詳細タイムステップを再現できるという点に着目すれば、従来法に比べて非常に高い計算効率を実現することが可能である。そ

のためMAF法は、詳細メッシュにおいて粗タイムステップを用いて、詳細計算を再現できるために、今後のより詳細になる炉心解析手法に適した手法であると言える。

6.4 LRAベンチマーク問題

本節ではBWR炉心の制御棒落下事象を模擬した、LRAベンチマーク問題³⁾を用いた検証計算を行う。LRAベンチマーク問題には、2及び3次元の問題が用意されており、2次元の場合にはバックリングを用いて3次元を模擬する。また、制御棒は、図6.4.1に示す斜線部の制御棒が落下するとしており、即発臨界に達する非常に強い反応度が炉心に投入される。

表6.4.1及び6.4.2に示すように、中性子束のエネルギー群数及び遅発中性子先行核種数は2群になっている。また、LRAベンチマーク問題には、断熱近似であるために非常に簡易なフィードバックであるが、ドップラー効果を考慮した上で過渡計算を行う必要がある。

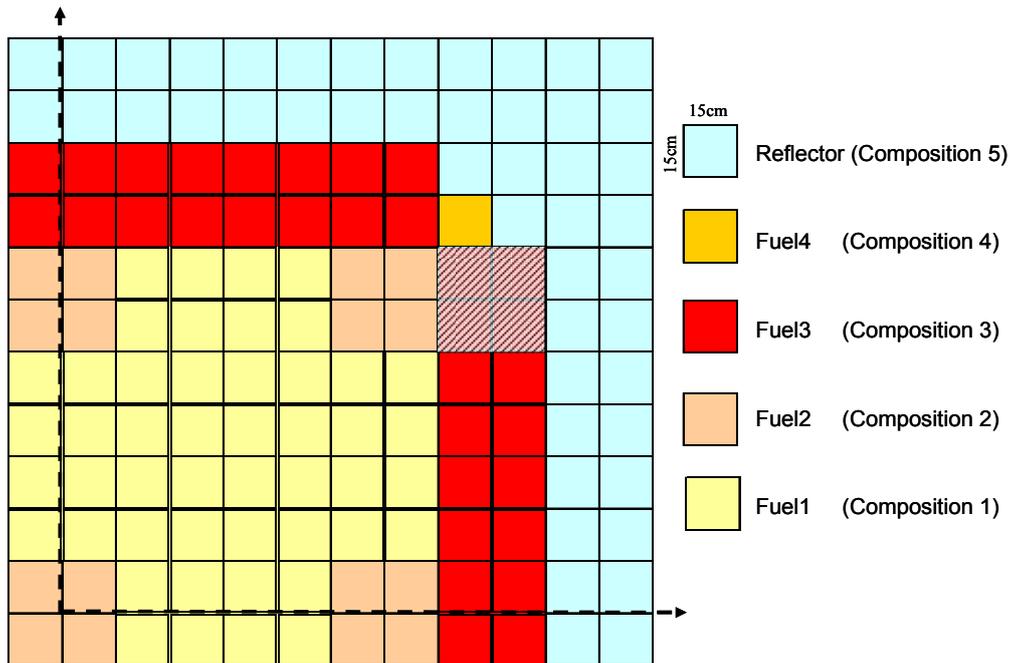


図 6.4.1 LRA ベンチマーク問題の径方向図

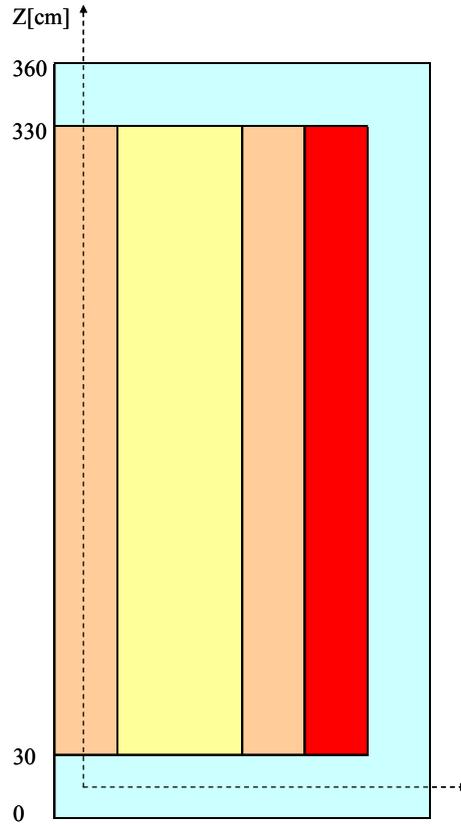


図 6.4.2 LRA ベンチマーク問題の軸方向図

表 6.4.1 LRA ベンチマーク問題の使用核定数

Composition	Group	D[cm]	Σ_a [1/cm]	$\nu\Sigma_f$ [1/cm]	Σ_{21} [1/cm]
1	1	1.2550	0.008252	0.004602	0.02533
	2	0.2110	0.100300	0.109100	
2	1	1.2680	0.007181	0.004609	0.02767
	2	0.1902	0.070470	0.086750	
3	1	1.2590	0.008002	0.004663	0.02617
	2	0.2091	0.083440	0.102100	
4	1	1.2590	0.008002	0.004663	0.02617
	2	0.2091	0.073324	0.102100	
5	1	1.2570	0.000603	0.0	0.04754
	2	0.1592	0.019110	0.0	
	χ_1	χ_2	ν	ν_1 [cm/s]	ν_2 [cm/s]
	1	0	2.43	3.00E+07	3.00E+05

表 6.4.2 遅発中性子先行核の使用定数

Family	β	$\lambda[1/s]$
1	0.0054	0.0654
2	0.001087	1.35

Adiabatic Feedback Data¹³

$$\Sigma_{a,1} = \Sigma_{a,1}^0 \left\{ 1 + \alpha_1 \left(\sqrt{T_{fuel}} - \sqrt{T_{fuel}^0} \right) \right\} \quad (6.4.1)$$

$$\alpha_1 = 2.034 \times 10^{-3} \sqrt{K}$$

$$T_0 = 300K$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{fuel}(\mathbf{r}, t) = \alpha_2 \sum_{g=1}^G \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \quad (6.4.2)$$

$$\alpha_2 = 3.83 \times 10^{-11} Kcm^3 / J$$

Energy Conversion Factor

$$Power = \varepsilon \int_{V_{core}} \Sigma_f(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (6.4.3)$$

$$\varepsilon = 3.204 \times 10^{-11} Ws / fission$$

Transient Initial Conditions

Mean power density at $t=0$, $10^{-6}W/cc$

Fuel temperature at $t=0$, 300K

Perturbation

Control rod removed with velocity of 150 cm/s 3D

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,2}(t) &= \Sigma_{a,2}(0)(1 - 0.0606184t) & t \leq 2 \\ \Sigma_{a,2}(t) &= 0.8787631\Sigma_{a,2}(0) & t > 2 \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Buckling for both energy groups

$$B^2 = 1.0 \times 10^{-4} \quad (6.4.5)$$

¹³ 本項目には他の数値が用いられている場合があるが、参考文献 10)より、本ページに示した値がもっともらしいと考えられる。

6.4.1 LRAベンチマーク問題 2D

本節では、LRA ベンチマーク問題の2次元体系の計算を行う。まず初めに、LMW ベンチマークと同様に、自作計算コードで適切な計算結果を得ることができるか検討を行う必要がある。自作計算コードで2次元 LRA ベンチマーク問題を計算した結果を以下に示す。なお、タイムステップ幅は5章に示した、本研究で開発した自動タイムステップを用いており、初期タイムステップ幅 $\Delta t = 0.005\text{sec}$ 、 $(\omega\Delta t)_{\max} = 0.01$ とした。また、収束条件は 1.0×1.0^{-7} とした。

表 6.4.1.1 2次元 LRA ベンチマーク問題の計算結果^{10, 14, 17)}

Calculation Code	TWOD-II	QUANDRY	SKETCH-N	自作
Mesh structure	22×22	11×11	22×22	22×22
Eigenvalue	0.99636	0.99641	0.99638	0.99638
No.of time-step	2600	1000	2098	3080
Time of the first power peak[s]	1.438	1.435	1.439	1.439
Average power at the first peak[W/cc]	5411	5473	5481	5498
Average power at the 2nd peak[W/cc]	784	797	801	799
Average power at time 3s[K]	96	98	99	99
Average fuel temperature at time 3s[K]	1087	1108	1099	1101
Maximum fuel temperature at time 3s[K]	2948	3029	2986	2990

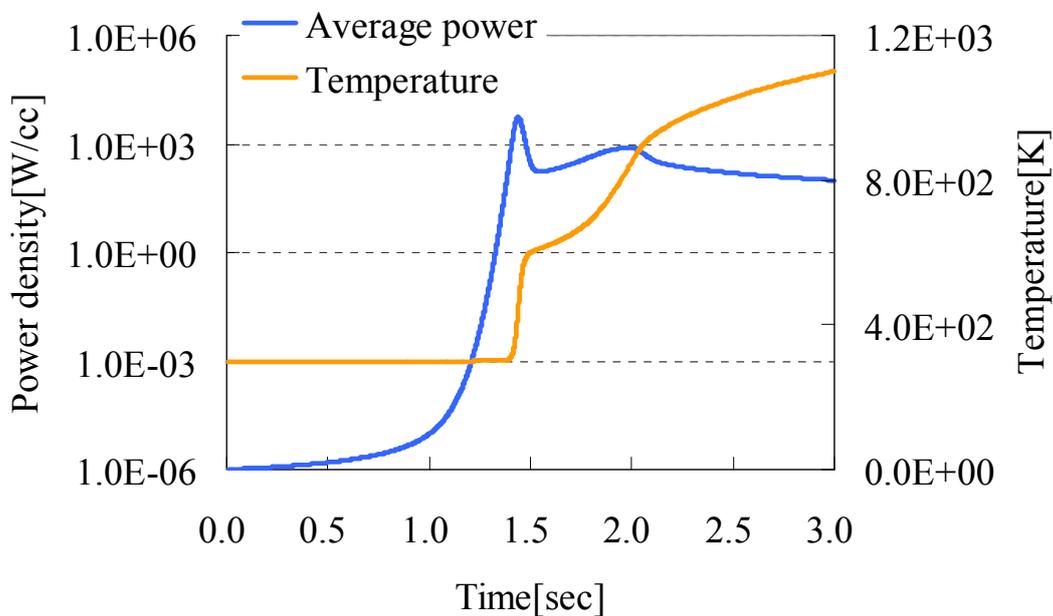


図 6.4.1.1 2次元 LRA ベンチマーク問題の計算結果

表 6.4.1.1 より、自作計算コードは他の炉心計算コードとよく一致していることが分かる。このことから、2次元 LRA 自作コードを用いて適切に計算できていることを確認

できた。以上より、自作コードは適切に 2 次元 LRA ベンチマーク問題を計算できていることを確認したので、以下では、自作コードの計算条件を様々に変化させることで、MAF 法と従来法の感度解析を行う。

先の TWIGL 及び LMW ベンチマーク問題と同様に、LRA ベンチマーク問題も MAF 法が高精度に計算できるか検討を行う必要がある。検討するために、タイムステップ幅を $\Delta t=0.01\text{sec}$ に固定し、従来法及び MAF 法で計算を行う。詳細メッシュを 22×22 、TCMFD のメッシュを 11×11 とし、遅発中性子先行核の計算方法は両手法とも(3.7.2.6)式を用いた時のノード法の計算結果を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップは詳細メッシュの $1/10$ とし、参照解は $\Delta t=0.0005\text{sec}$ で計算した θ 法の結果を用いた。

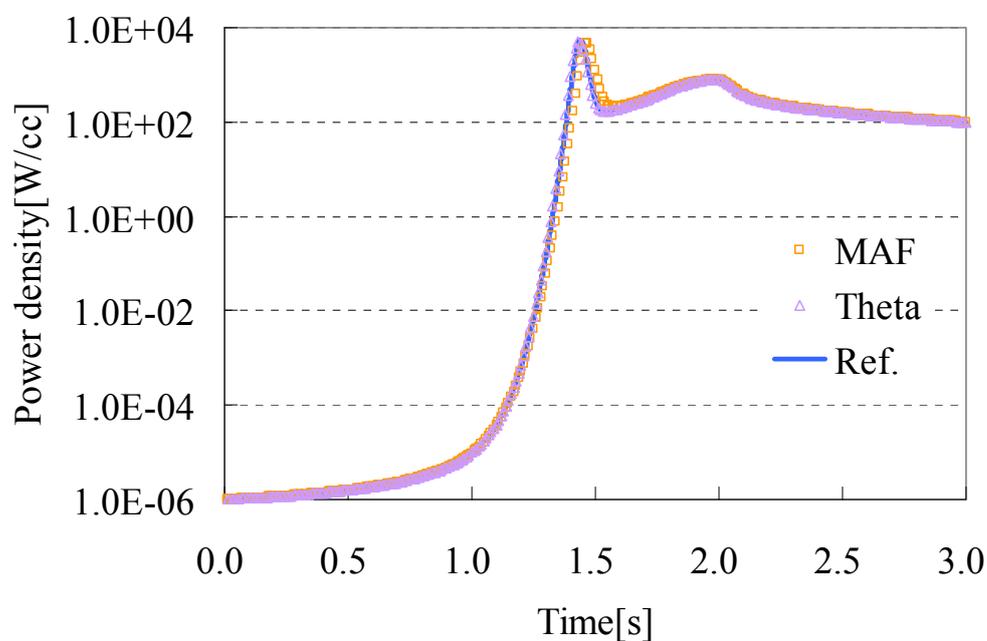


図 6.4.1.2 粗タイムステップにおける従来法と MAF 法の炉心出力の結果

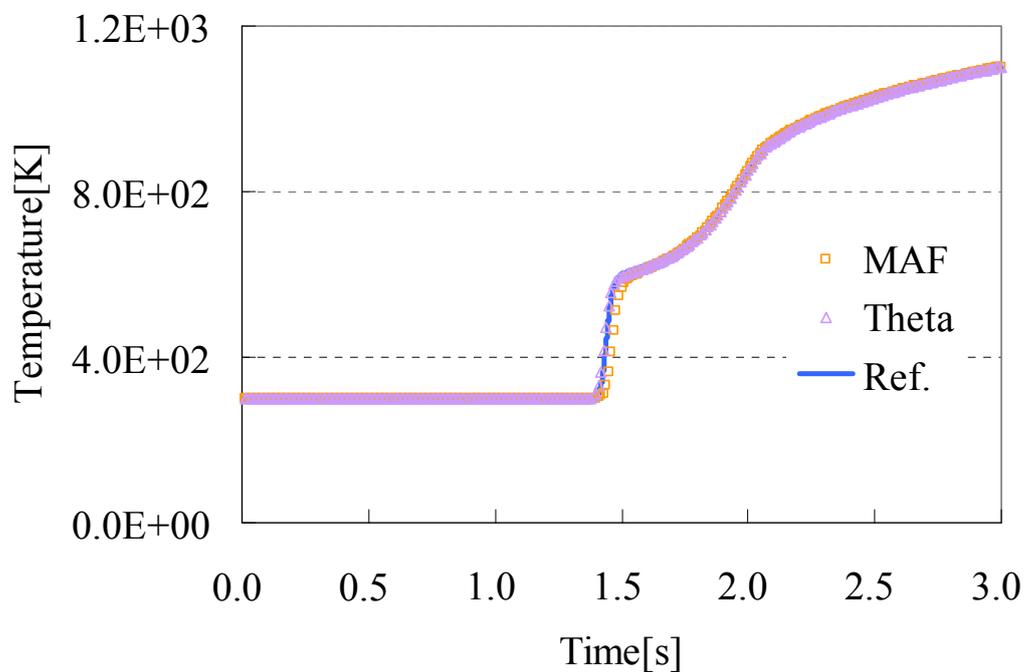


図 6.4.1.3 粗タイムステップにおける従来法と MAF 法の燃料温度の結果

図 6.4.1.2 より、 θ 法では参照解の初めのピーク位置をうまく再現できているが、MAF 法ではピーク位置が少し異なることが確認できる。また、出力ピーク位置が異なるために、図 6.4.1.3 から燃料温度が上昇する時間が MAF 法では参照解と異なってしまっている。 θ 法及び MAF 法の計算差異を定量的に評価するために、参照解と比較した計算差異を以下に示す。

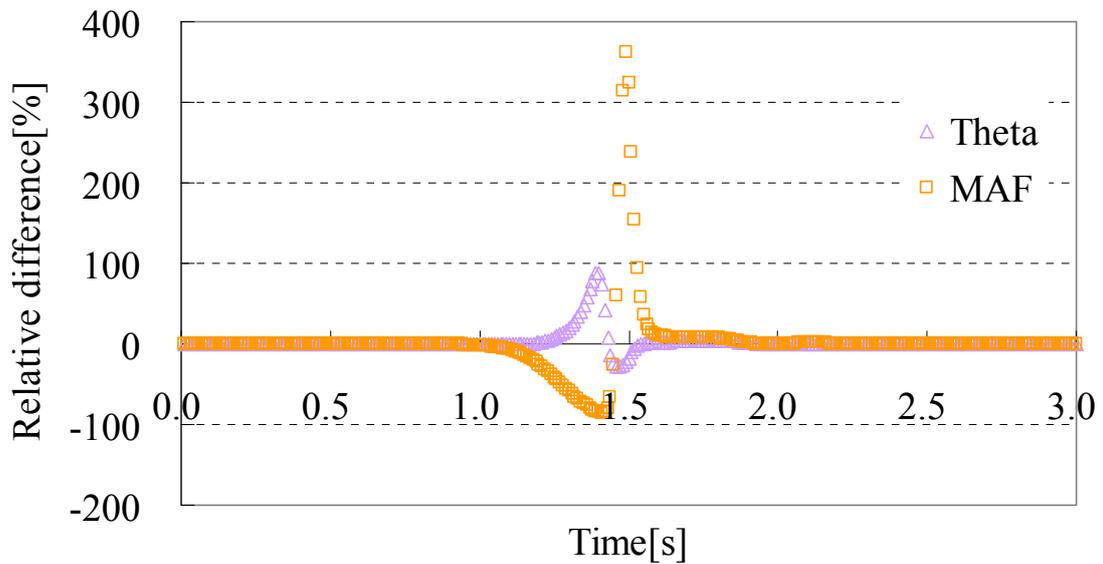


図 6.4.1.3 出力密度の計算差異

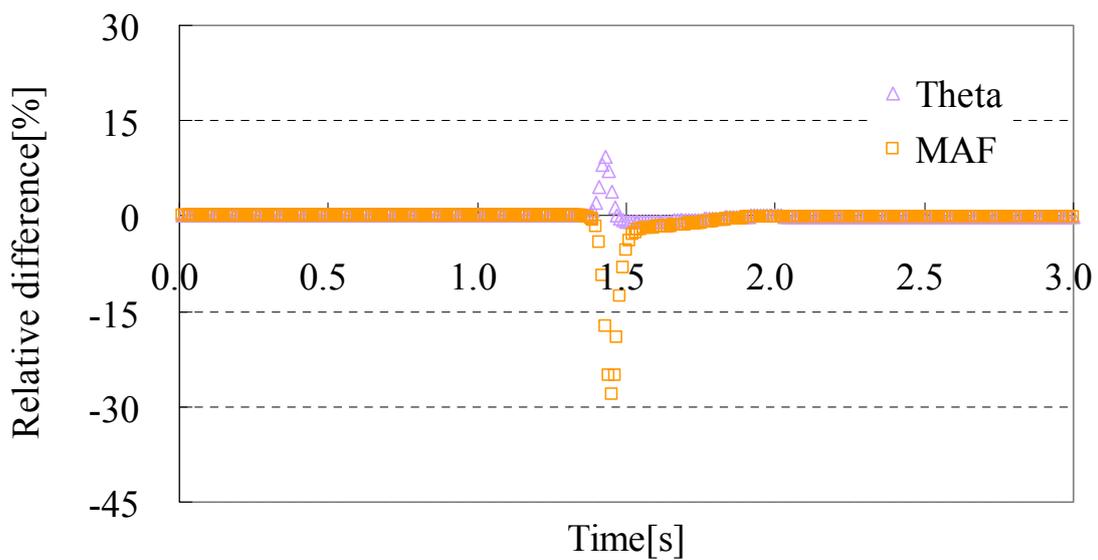


図 6.4.1.4 燃料温度の計算差異

図 6.4.1.3 及び 6.4.1.4 より、出力密度及び燃料温度共に、1.4~1.5 秒の時に MAF 法の計算差異が大きくなっていることが確認できる。また上図より、MAF 法の計算差異が顕在化しているのは、フィードバックで炉心出力が急激に変化している時間帯と一致していることが分かる。

TWIGL ベンチマーク問題の検証計算でも述べたが、振幅関数を反復しないことで計

算精度が低下することを確認している。このこと踏まえて考えると、LRA ベンチマーク問題では即発臨界を模擬した問題であり、振幅関数を反復しないことによる計算精度の低下が顕在化した可能性がある。そこで、この仮定を検証するために、計算条件を先と同様にし、振幅関数を反復させた時の計算結果を以下に示す。なお、比較のために先の θ 法の結果もプロットしている。

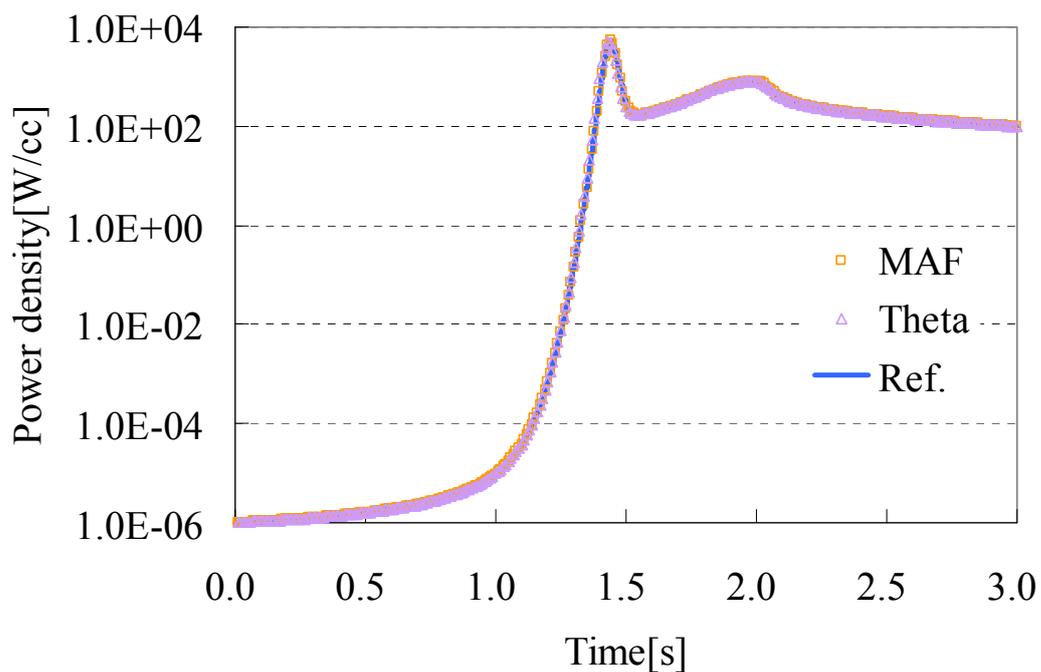


図 6.4.1.5 振幅関数を反復させた時の炉心出力結果

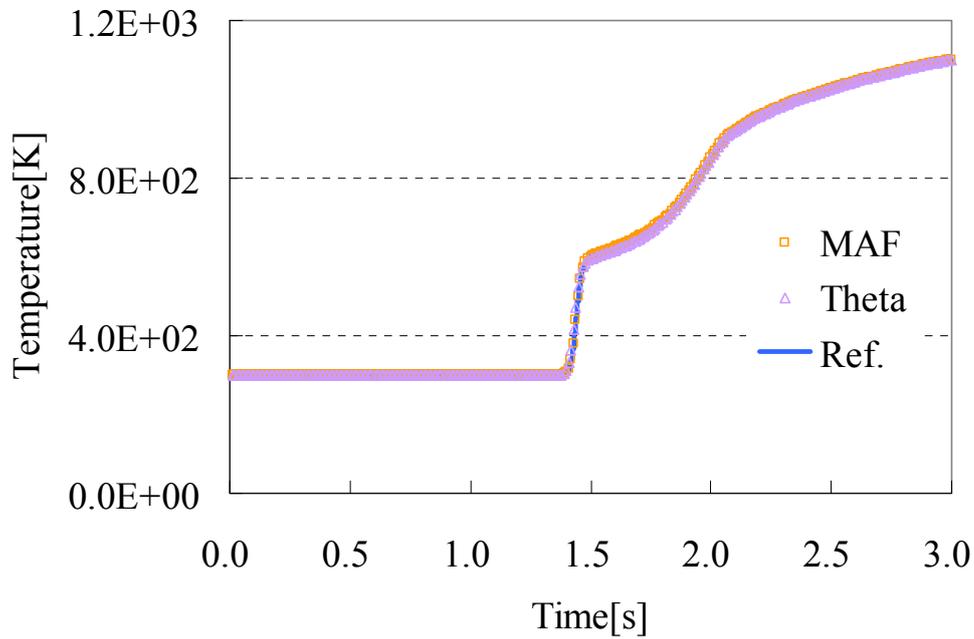


図 6.4.1.6 振幅関数を反復させた時の燃料温度の結果

図 6.4.1.5 及び 6.4.1.6 から、振幅関数を反復させた時の MAF 法は、炉心出力のピーク位置を適切に再現できていることができています。そのため、燃料温度の変化も参照解とよく一致していることが確認できます。振幅関数を反復させることで、計算差異の改善度合いを定量的に評価するために、以下に出力密度及び燃料温度の計算差異を示す。

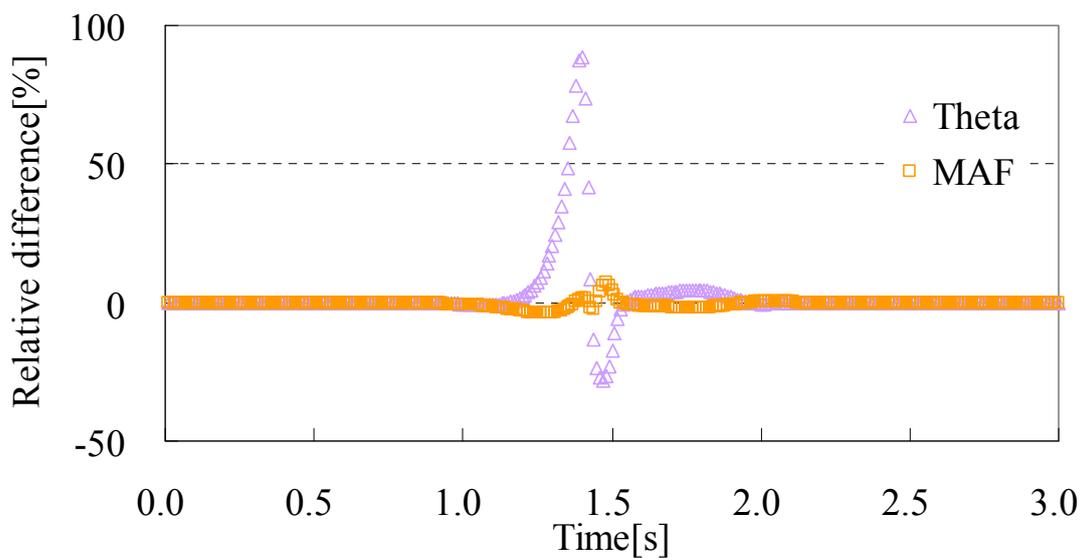


図 6.4.1.7 振幅関数を反復させた時の炉心出力の計算差異

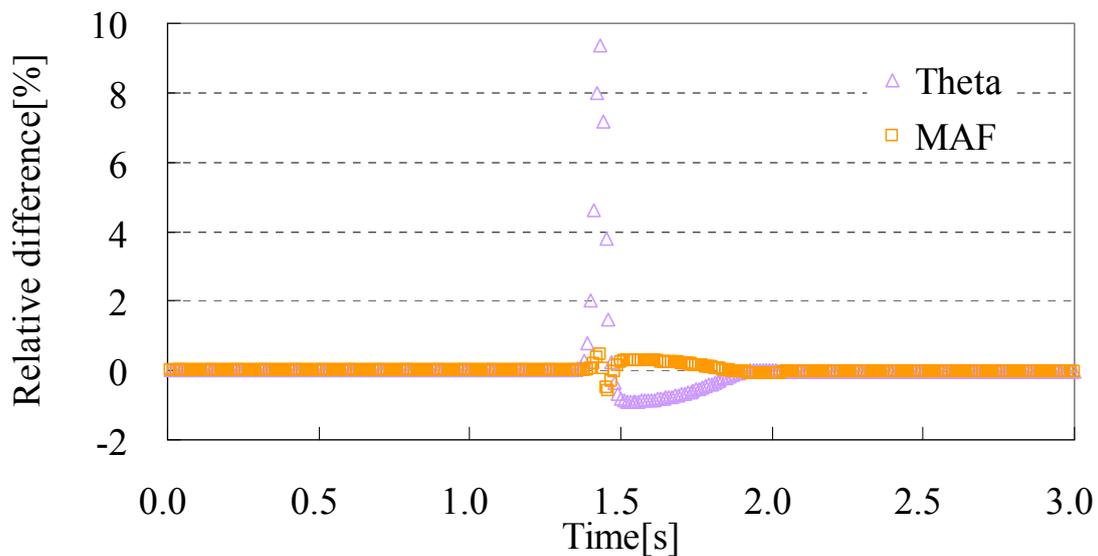


図 6.4.1.8 振幅関数を反復させた時の燃料温度の計算差異

図 6.4.1.7 及び 6.4.1.8 より、振幅関数を反復させた時の MAF 法は、従来法よりも高精度な計算可能であることが確認できる。従来法は、絶対値最大の相対差異が炉心出力で 88.6%、燃料温度で 9.4%であるのに対して、MAF 法は炉心出力が 7.2%、燃料温度が 0.6%と非常に優れた計算精度の結果が得られている。これらのことから、先の MAF 法の計算精度が良好でなかった原因は振幅関数を反復しなかったためであり、振幅関数を反復させることで、LRA ベンチマーク問題においても従来法に比べて高精度に計算可能であることを確認できた。

上記では、振幅関数を反復させることで MAF 法の計算精度低下を抑制していた。しかし、振幅関数の計算は多群の TCMFD で計算を行っており、詳細メッシュ計算時には相対的に計算コストが低いが、改良準静近似法等の振幅関数に比べて高い計算コストになっている。そのため、計算コストの観点から、出来る限り振幅関数の計算を行わずに計算精度を保持させたい。これらのことから、振幅関数の反復回数に上限値を定めることによって、計算精度をあまり低下させずに計算時間を向上させることが期待できる。そこで、振幅関数の反復回数の上限値を設定したときの計算を行った。計算結果を図 6.4.1.9 に示す。なお、計算条件は先の計算と同様の条件を用い、参照解として反復回数の上限を設定しないときの結果を用いている。

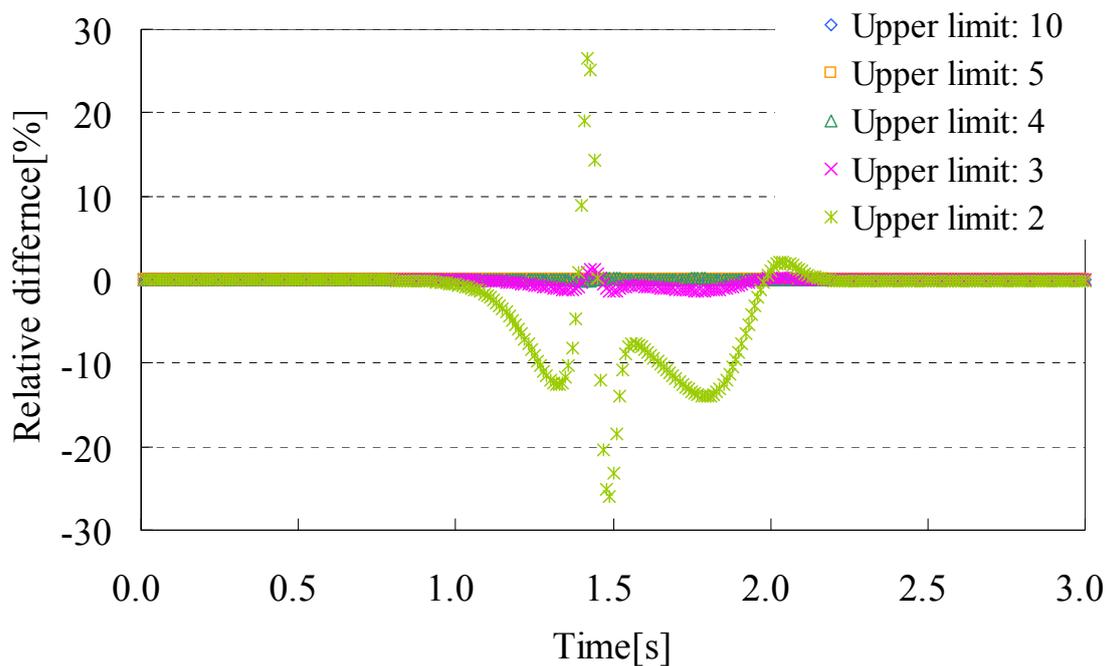


図 6.4.1.9 振幅関数の上限値を決めたときの計算差異

図 6.4.1.9 より、上限値を 5 以上することで計算精度がほぼ収束していることが確認できる。また、同様に振幅関数の反復回数の上限値を低くすることにより、計算精度が悪化することが上図より確認できる。なお、振幅関数を反復しない場合の絶対値最大相対差異は 335%であり、図 6.4.1.9 に反復なしの結果を追記すると他の計算結果の相違が確認できないために、図 6.4.1.9 には記載していない。

上述した議論では、詳細メッシュが 22×22 メッシュであり、1 メッシュあたり 7.5cm という粗メッシュ計算であった。しかし、TWIGL ベンチマーク問題及び LMW ベンチマーク問題の検証計算の結果、MAF 法は詳細計算に適していることが分かっている。そのため、以下では LRA ベンチマーク問題においても詳細計算の検証計算を行っていくために、詳細メッシュを 165×165 に変更して議論を行っていく。

メッシュ数を変更しても、 θ 法よりも高精度に計算可能であるかを検証するために、詳細メッシュ以外は先と同様の計算条件で計算を行なった結果を以下に示す。なお、下記の結果は、振幅関数の反復上限値を定めていない時の結果である。

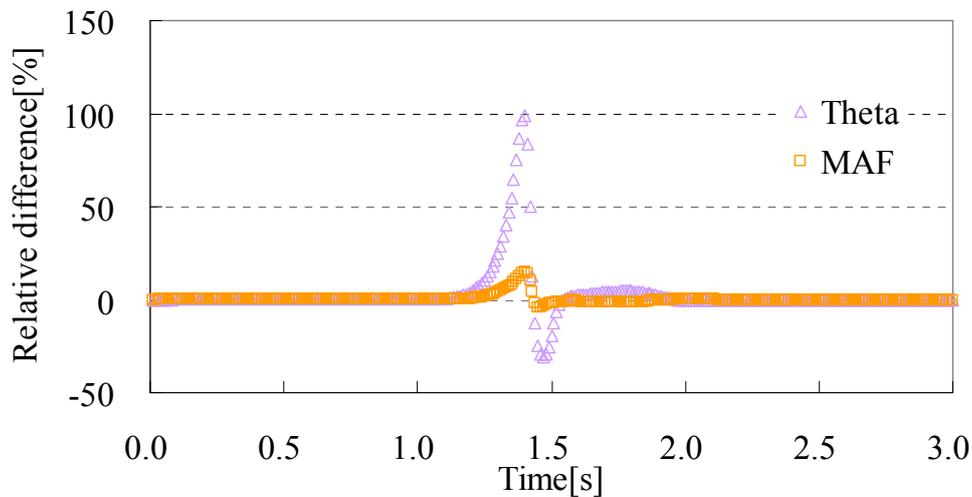


図 6.4.1.10 詳細メッシュ計算における参照解との炉心出力の相対差異

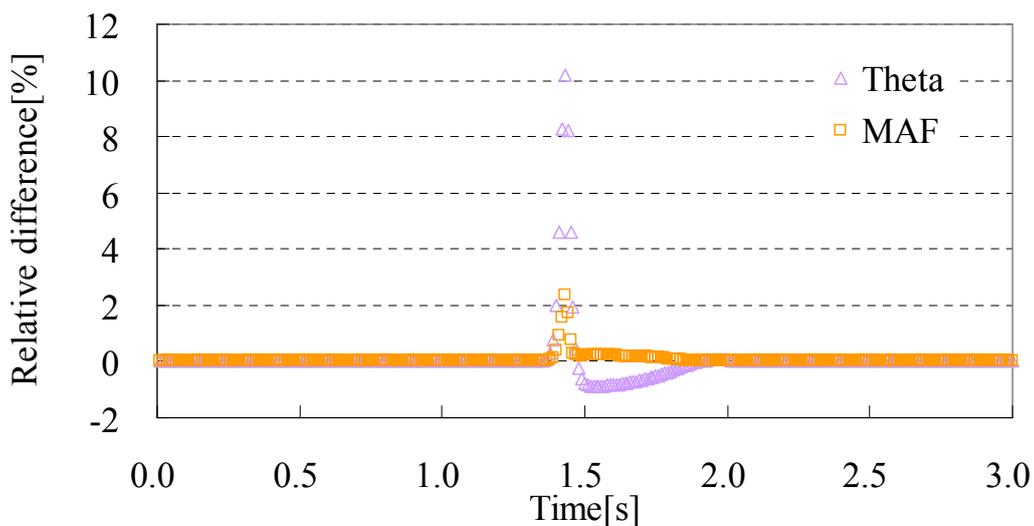


図 6.4.1.11 詳細メッシュ計算における参照解との燃料温度の相対差異

図 6.4.1.10 及び 6.4.1.11 から、詳細メッシュに変更しても、MAF 法は従来法に比べて高精度に計算可能であることを確認できる。また、LRA ベンチマーク問題で模擬する制御棒落下のように、局所的に強い反応度が投入する条件下で粗メッシュ/詳細メッシュの比を小さくしても、計算精度に大きな影響を与えていないことが分かる。つまり、TCMFD に用いる粗メッシュでも、適切に詳細メッシュの過渡計算を再現できていると考えられる。この原因として、現行の炉心解析手法が集合体単位の均質化断面積を用いている可能性があり、Pin-by-Pin 計算の時は、必ずしも同様の結果が得られるとは限ら

ないと考えられる。この検討は、今後の検討課題の一つである。次に、振幅関数の反復上限値を定めた時の感度解析の結果を以下に示す。なお、相対差異の算出方法は、先の感度解析の時と同様である。

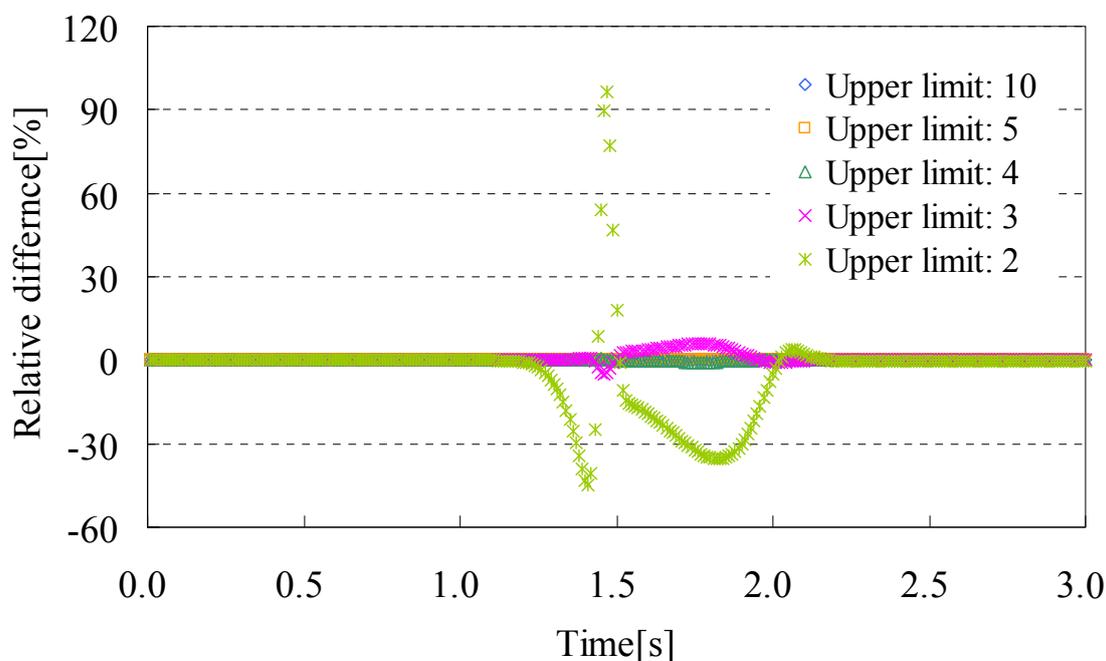


図 6.4.1.12 詳細計算における振幅関数の上限値を決めたときの計算差異

図 6.4.1.12 より、詳細計算でも振幅関数の反復回数を増加させることで、計算精度のバラつきが小さくなっていることが確認できる。また、注目すべきこととして、図 6.4.1.9 と比較して、図 6.4.1.12 も上限値が 4 程度で計算結果が収束している。このことより、振幅関数の反復を行わないことによる、計算精度の低下の要因はメッシュ数には強く依存しないことが考えられる。また、LMW ベンチマークでは振幅関数を反復させないで適切な計算結果が得られていたことを考慮すると、振幅関数の反復を行わないことによる計算精度の低下の主要因は、投入反応度の強さに依存すると考えられる。そのため、投入反応度が分かれば、振幅関数の上限値を適切決定できる可能性があるが、これらの詳細な検討は今後の課題である。以下では、従来法と MAF 法の計算時間についての検討を行っていく。

計算体系としては、先と同様の計算体系を用いる。また、LRA ベンチマーク問題は即発臨界を模擬しており、適切な計算精度を維持するためには、用いるタイムステップ幅が解析時間帯によって大きく異なる。そのため本検討では、5 章で述べた、タイムステップを適宜決定する自動タイムステップモデルを用いた。 θ 法及び MAF 法のタイム

ステップを $(\omega\Delta t)_{\max}=0.4$ で計算した時の結果を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップは参照解の $(\omega\Delta t)_{\max}$ と同様に設定し、参照解は θ 法の $(\omega\Delta t)_{\max}=0.01$ の結果を用いた。

表 6.4.1.2 詳細メッシュ計算の結果

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	3076	82	84
最大出力の時間[s]	1.44	1.43	1.44
炉心最大出力[W/cc]	5456	4890	5409
炉心出力 at 3s[W/cc]	98	97	98
平均燃料温度 at 3s[K]	1094	1102	1100
最大燃料温度 at 3s[K]	2965	2994	2983

表 6.4.1.3 詳細メッシュ計算の計算差異

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	3076	82	84
最大出力の時間[s]	1.441	-0.8%	-0.2%
炉心最大出力[W/cc]	5456	-10.4%	-0.9%
炉心出力 at 3s[W/cc]	98	-2.0%	-0.9%
平均燃料温度 at 3s[K]	1094	0.8%	0.5%
最大燃料温度 at 3s[K]	2965	1.0%	0.6%

表 6.4.1.2 及び 6.4.1.3 より、自動タイムステップを用いても、MAF 法は従来法の θ 法よりも高精度に計算できていることが確認できる。また、安全解析に重要となるピーク出力に対して、従来法では 10%程度の計算差異があるが、MAF 法では 0.9%と計算精度を改善できている。

表 6.4.1.2 の結果は MAF 法の詳細メッシュの結果ではなく、TCMFD による詳細タイムステップの結果を示した。その理由として、図 6.4.1.13 に示すように、タイムステップが粗いとピーク位置がタイムステップ内に埋もれてしまい、適切に再現できない可能

性があるためである。しかし MAF 法は、詳細メッシュの結果を再現できるような TCMFD を詳細タイムステップで計算しているために、表 6.4.1.2 のように粗タイムステップでピーク出力を適切に再現可能となる。

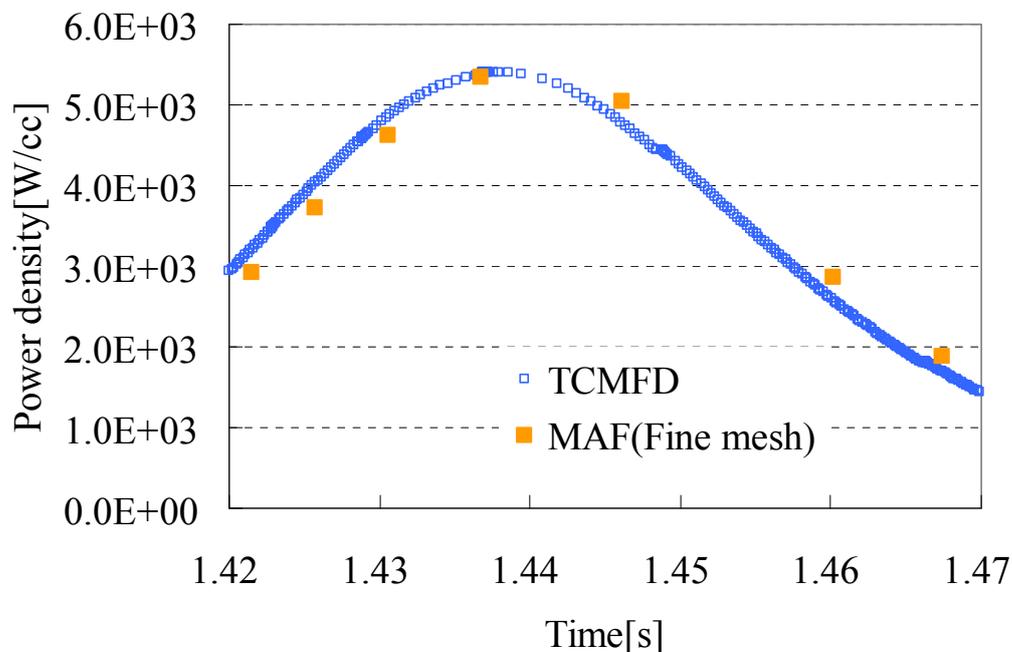


図 6.4.1.13 MAF 法の詳細メッシュのみの結果と TCMFD の炉心出力結果

また、今回用いた計算条件では、従来法の θ 法の計算結果は図 6.4.1.14 に示すように、粗タイムステップを用いているために出力及び燃料温度の粗い変化しか得られない。しかし MAF 法では、図 6.4.1.15 に示すように、TCMFD の結果を用いることで出力及び燃料温度の詳細な変化を得ることが可能である。そのため、燃料に加えられた積算熱量も従来法よりも精度よく計算できる可能性がある。

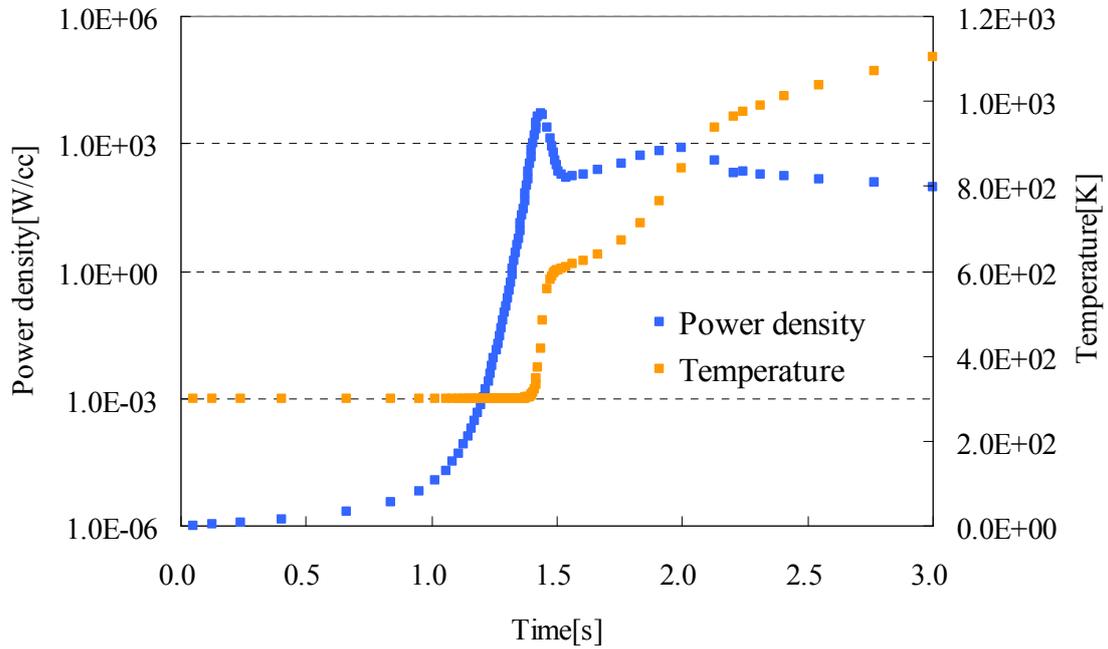


図 6.4.1.14 θ 法の計算結果

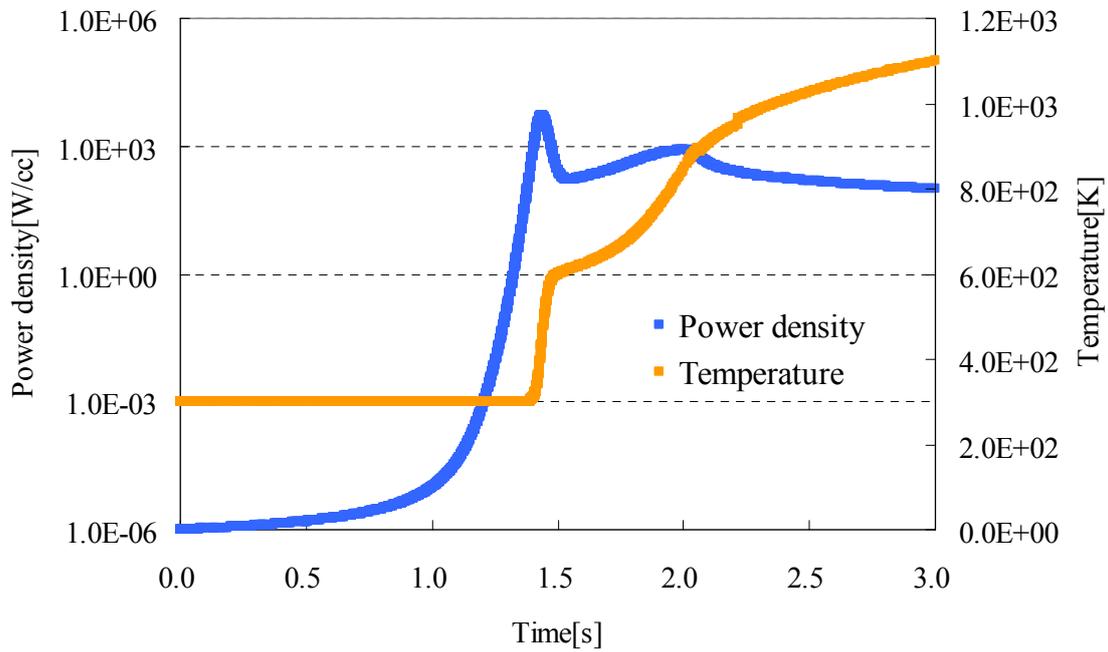


図 6.4.1.15 MAF 法と TCMFD の計算結果

なお目的である、MAF 法と参照解の計算時間の比較を行うと表 6.4.1.4 の結果を得る。

表 6.4.1.4 MAF 法と参照解の相対計算時間

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	6.6

表 6.4.1.4 より、MAF 法は粗タイムステップで詳細タイムステップの参照解を再現できる点に着目すれば、本問題の LRA ベンチマーク問題でも従来法に比べて高い計算効率を実現可能であることを確認した。

6.4.2 LRAベンチマーク問題 3D quarter core

前節では、2次元 LRA ベンチマーク問題を用いて MAF 法の検証を行なった。そこで本節では、LRA ベンチマーク問題として二次元 1/4 炉心以外に用意されている、三次元 1/4 炉心の計算を行っていく。

まず初めに、自作の計算コードで適切な計算結果が得られることを確認するために、自作コードの θ 法の結果と他の計算コードの計算結果の比較を行なった。計算結果を以下に示す。

表 6.4.2.1 三次元 1/4 炉心の LRA ベンチマーク問題の計算結果^{17,20)}

Calculation Code	SKETCH-N	SKETCH-N	SKETCH-N	SYNTH	自作
Mesh structure	12×12×14	12×12×28	12×12×28	67×67×121	22×22×36
Eigenvalue	0.99637	0.99638	0.99638	0.99672	0.99639
No. of time-step	726	718	2680		2033
Time of the first power peak[s]	0.919	0.904	0.909	0.930	0.903
Average power at the first peak[W/cc]	5367	5914	5946	5767	5686
Time to the first minimum [s]	1.027	0.994	0.996	1.05	0.994
Power density at the first minimum [W/cc]	129.8	110.8	113.4	123.3	110.3
Time of the second power peak [s]	1.625	1.519	1.516	1.435	1.482
Average power at the 2nd peak[W/cc]	379	366	365	374	361
Average power at time 3s[K]	71	70	71	70	69
Average fuel temperature at time 3s[K]	1002	1003	1018	1020	995

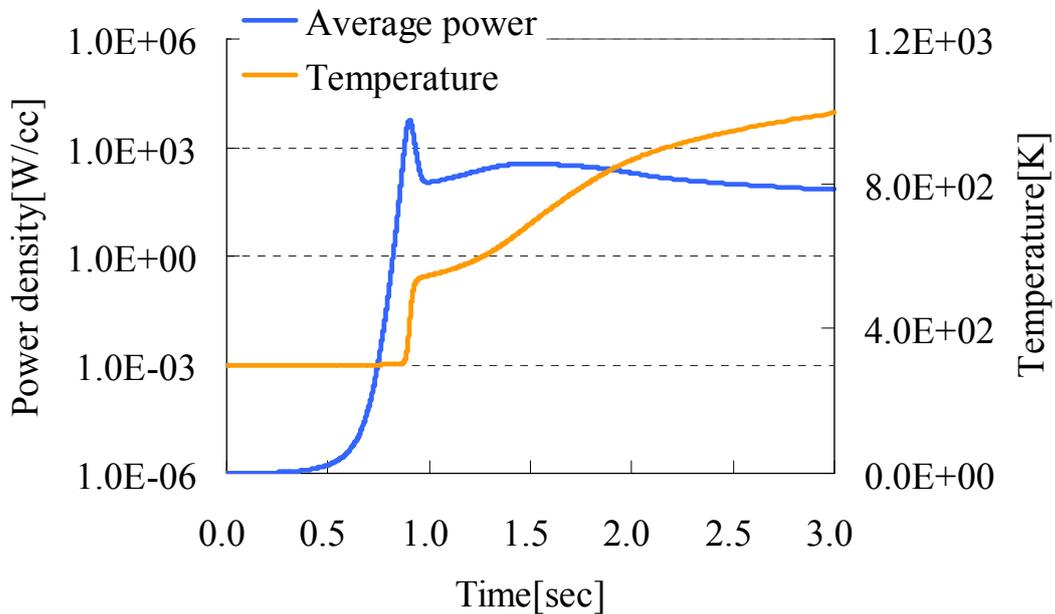


図 6.4.2.1 三次元 1/4 炉心 LRA ベンチマーク問題の計算結果

表 6.4.2.1 より、各計算コードで計算結果のバラつきが大きく見られる。このことより、三次元の即発臨界解析では計算手法の違いによる計算結果の相違が顕著になることが分かる。実際に参考文献 21) では、計算条件は全て同様であるのにも関わらず、Cusping モデルの種類を変更するだけでピーク出力が約 300W/cc 変わることが示されている。これらを考慮しても、自作コードの結果は他の炉心計算コードとも大差ないために、三次元 1/4 炉心の LRA ベンチマーク問題を適切に計算できたと考えられる。以下では、MAF 法と従来法の比較を行っていく。

計算条件として、詳細メッシュ計算は、 $22 \times 22 \times 36$ メッシュ及び $\Delta t = 0.01 \text{sec}$ で計算を行い、TCMFD は $11 \times 11 \times 12$ メッシュ及び $\Delta t = 0.001 \text{sec}$ とした。また参照解として、 θ 法の $\Delta t = 0.0005 \text{sec}$ の結果を用いた。以下に、MAF 法及び θ 法で計算した時の、参照解との相対差異を示す。なお、MAF 法の振幅関数の上限値は定めていない。

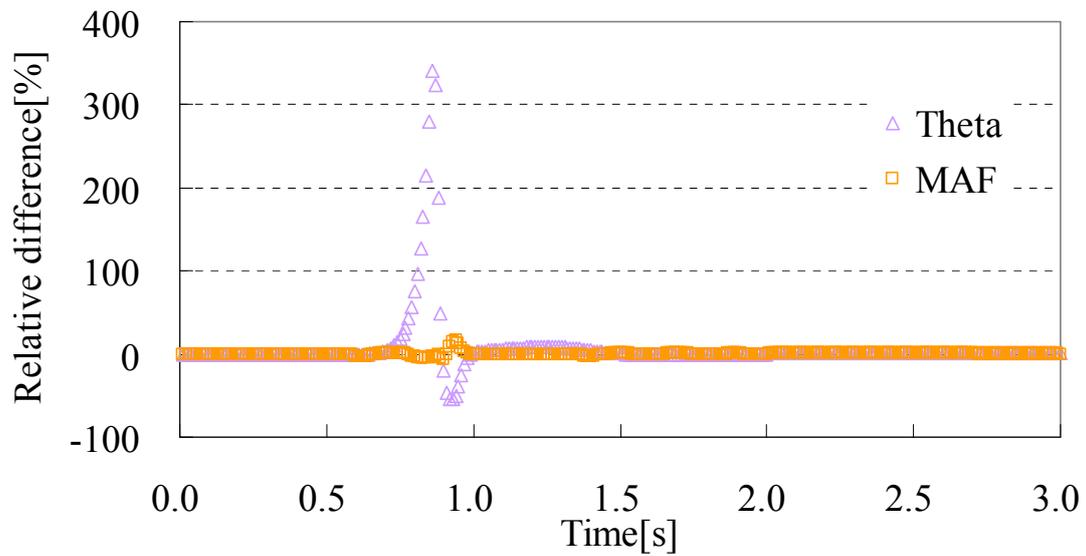


図 6.4.2.2 参照解との炉心出力の相対差異

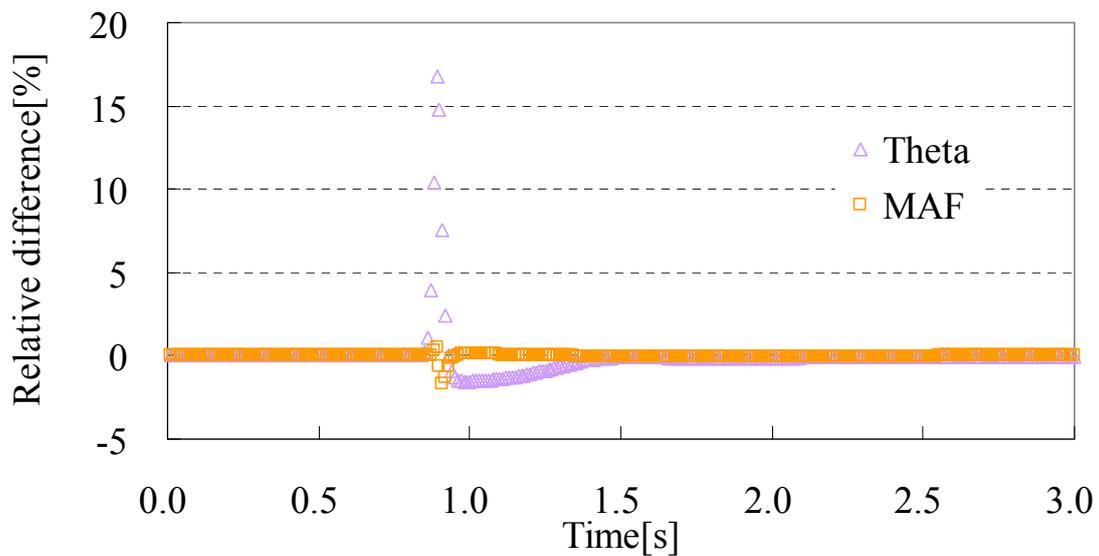


図 6.4.2.3 参照解との燃料温度の相対差異

図 6.4.2.2 及び 6.4.2.3 より、従来法は出力で 340%、燃料温度で 17%の最大相対差異であるのに対して、MAF 法の最大相対差異は出力で 15%、燃料温度 1.7%である。そのため、MAF 法は従来法に比べて高精度に計算できていることが確認できた。このことより、フィードバックがあり、制御棒落下のような局所的かつ大きな反応度投入に対する 3次元体系でも MAF 法は精度よく計算できるので、実機の解析にも耐えられる手法になる可能性がある。

次に詳細計算を行うために、詳細メッシュを $55 \times 55 \times 60$ メッシュ、粗メッシュを $11 \times 11 \times 12$ メッシュにした時の計算を行っていく。前節と同様に本計算問題でも自動タイムステップを用いる。 θ 法及び MAF 法のタイムステップを $(\omega\Delta t)_{\max} = 0.3$ とした時の計算結果を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップは参照解の $(\omega\Delta t)_{\max}$ と同様に設定し、参照解は θ 法の $(\omega\Delta t)_{\max} = 0.01$ の結果を用いた。

表 6.4.2.2 三次元 1/4 炉心の計算結果

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	4263	143	144
最大出力の時間[s]	0.902	0.900	0.902
炉心最大出力[W/cc]	5656	5567	5627
炉心出力 at 3s[W/cc]	68	68	68
平均燃料温度 at 3s[K]	990	991	990

表 6.4.2.3 三次元 1/4 炉心の相対差異

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	4263	143	144
最大出力の時間[s]	0.902	-0.1%	0.0%
炉心最大出力[W/cc]	5656	-1.6%	-0.5%
炉心出力 at 3s[W/cc]	68	-0.2%	-0.1%
平均燃料温度 at 3s[K]	990	0.0%	0.0%

表 6.4.2.2 及び 6.4.2.3 より、MAF 法は従来法よりも高精度に計算できていることが分かる。特に、ピーク時の計算精度が従来法よりも改善されている。また、前節でも述べたが、MAF 法は TCMFD の結果を用いることで、図 6.4.2.4 に示すように、粗タイムステップにも関わらず滑らかな炉心出力の変化を得ることが可能である。

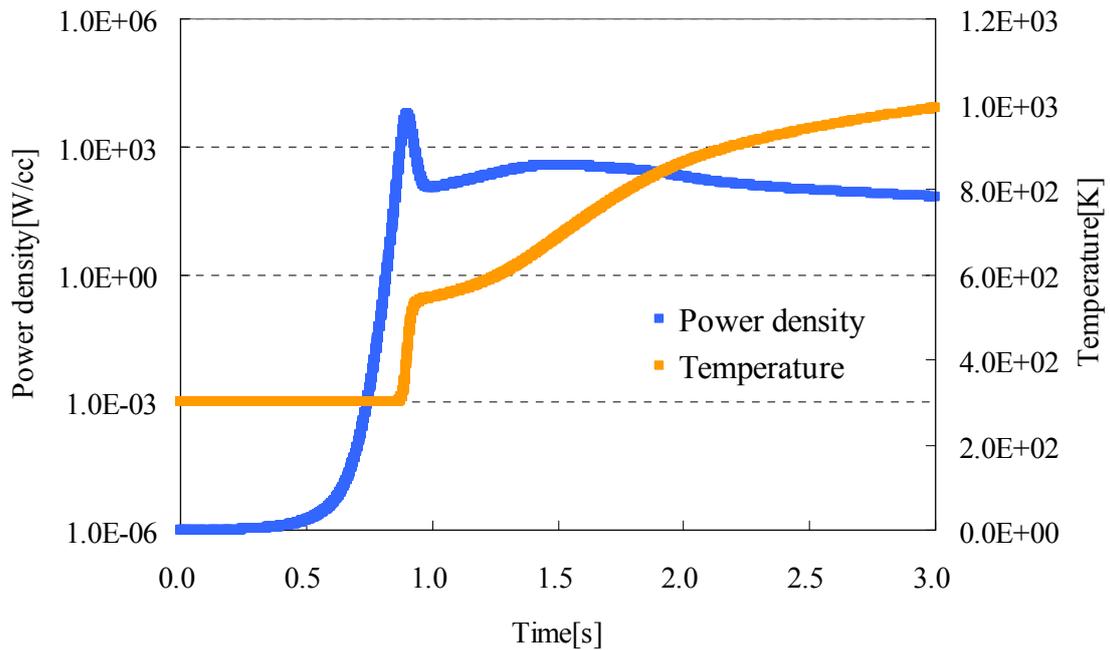


図 6.4.2.4 MAF 法と TCMFD の計算結果

なお目的である、MAF 法と参照解の計算時間の比較を行うと表 6.4.2.4 の結果を得る。

表 6.4.2.4 MAF 法と θ 法の相対計算時間

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	4.2

表 6.4.2.4 より、MAF 法は粗タイムステップで詳細タイムステップの参照解を再現できる点に着目すれば、本問題でも従来法に比べて高い計算効率を実現可能であることを確認した。

6.4.3 LRAベンチマーク問題 3D full core

前節までは、オリジナルの LRA ベンチマーク問題である、二次元及び三次元 1/4 炉心の計算を行った。これらは 1/4 体系で計算を行っているために、炉心全体で考えると 4 本の制御棒が落下していることになる。しかし、K. S. Smith 氏により、全炉心単一制御棒落下の問題が提案されて以来、多くの炉心計算コードで解析されてきた。そこで、本研究においても全炉心単一制御棒落下問題の計算を行っていく。

まず初めに、全炉心 LRA ベンチマーク問題においても適切な計算結果が得られることを確認するために、自作コードの θ 法で計算した結果と他の炉心計算コードの結果の

比較を行う。以下に計算結果を示す。

表 6.4.3.1 三次元全炉心 LRA ベンチマーク問題の計算結果^{10,17)}

Calculation Code	SKETCH-N	SKETCH-N	PANTHER	SPANDEX	自作
Mesh structure	24×24×14	24×24×28	13×13×10	22×22×14	44×44×36
Eigenvalue	0.99637	0.99638		0.99642	0.99639
No.of time-step	698	702	820	1430	2013
Time of the first power peak[s]	0.967	0.949	0.950	0.956	0.952
Average power at the first peak[W/cc]	1485	1486	1514	1478	1486
Time to the first minimum [s]	1.09	1.05	1.08	1.06	1.05
Power density at the first minimum [W/cc]	35.3	34.8	36.7	36.4	34.0
Time of the second power peak [s]	1.63	1.61	1.52	1.62	1.61
Average power at the 2nd peak[W/cc]	112	103	170	109	102
Average power at time 3s[K]	22	22	23	22	21
Average fuel temperature at time 3s[K]	497	497			495

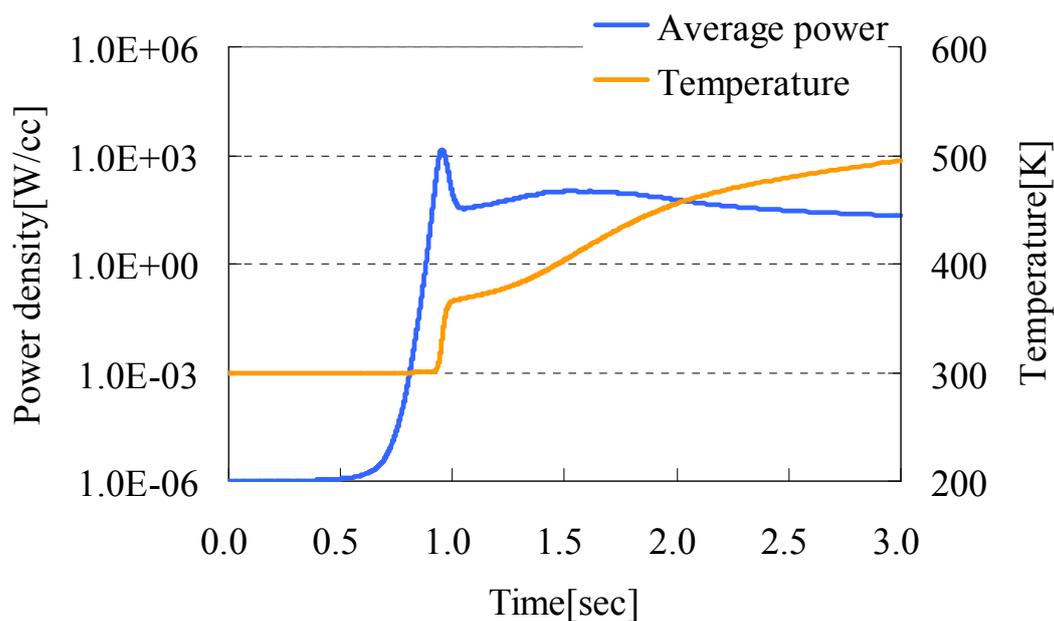


図 6.4.3.1 3次元全炉心の計算結果

表 6.4.3.1 より、自作コードの計算結果は他の炉心計算コードと比較してよく一致しており、自作コードの妥当性を確認することができた。また、三次元 1/4 炉心の結果に比べて、全炉心計算の場合は計算コード間の結果の相違が小さいことが確認できる。この原因として、1/4 炉心では制御棒が 4 本落下しているのに対して、全炉心計算の場合は単一制御棒落下なので投入反応度が小さいために、計算結果に相違が小さいかったと考

えられる。

また、上記では2~3次元のLRAベンチマーク問題の計算を行ってきた。そこで、計算条件の違いにより、炉心挙動の差異を比較するために、2~3次元のLRAベンチマーク問題の結果をまとめたものを以下に示す。

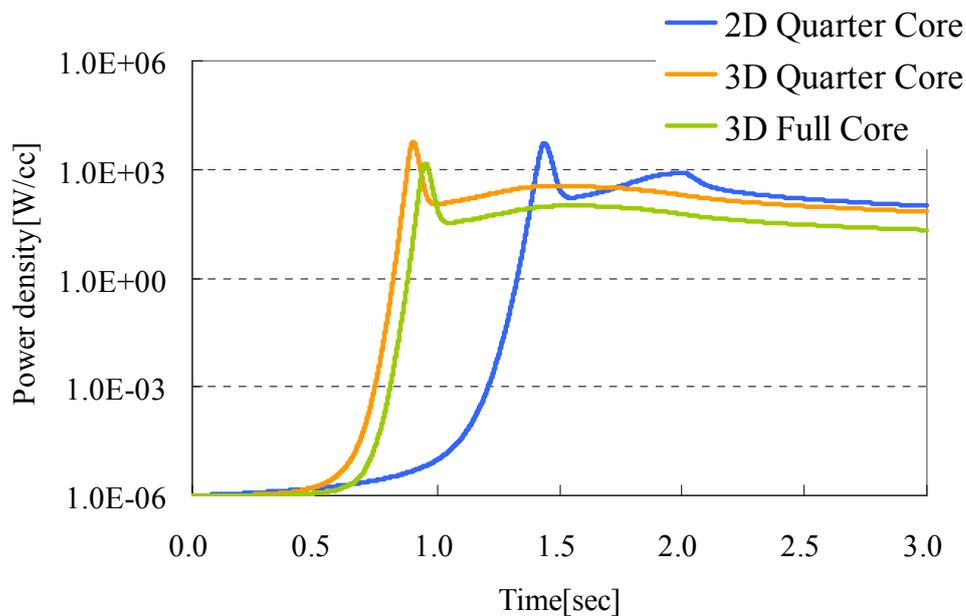


図 6.4.3.2 2次元及び3次元LRAベンチマークの炉心出力の計算結果

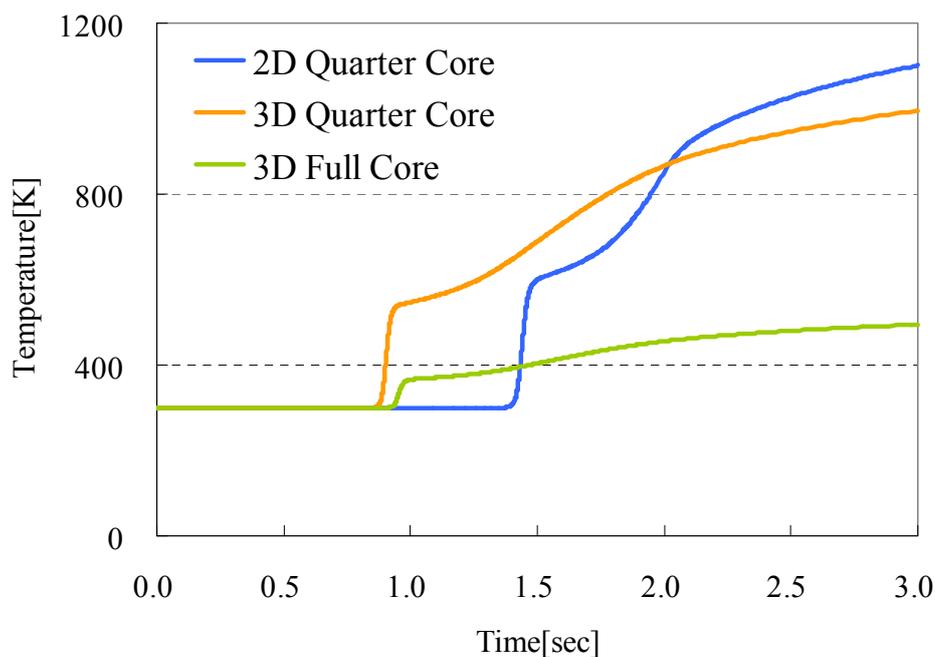


図 6.4.3.3 2次元及び3次元LRAベンチマークの燃料温度の計算結果

三次元全炉心では単一制御棒落下事象であるために、他の2つの問題と投入反応度が異なるが、二次元1/4炉心と三次元1/4炉心の投入反応度は同じである。しかし、図6.4.3.2及び6.4.3.3の結果を確認すると、二つの計算ケースの炉心挙動はかなり異なっている。

次に、三次元全炉心でのMAF法と従来法の計算精度比較を行う。前節までと同様に、三次元全炉心計算でもMAF法が従来法に比べて高精度に計算可能であるか検討を行う。計算条件として、詳細メッシュを44×44×36メッシュ、粗メッシュを22×22×12メッシュにし、 $\Delta t=0.01\text{sec}$ で計算した時の計算差異を以下に示す。なお、TCMFDのタイムステップは $\Delta t=0.001\text{sec}$ とし、参照解として $\Delta t=0.0005\text{sec}$ で計算した θ 法の結果を用いた。

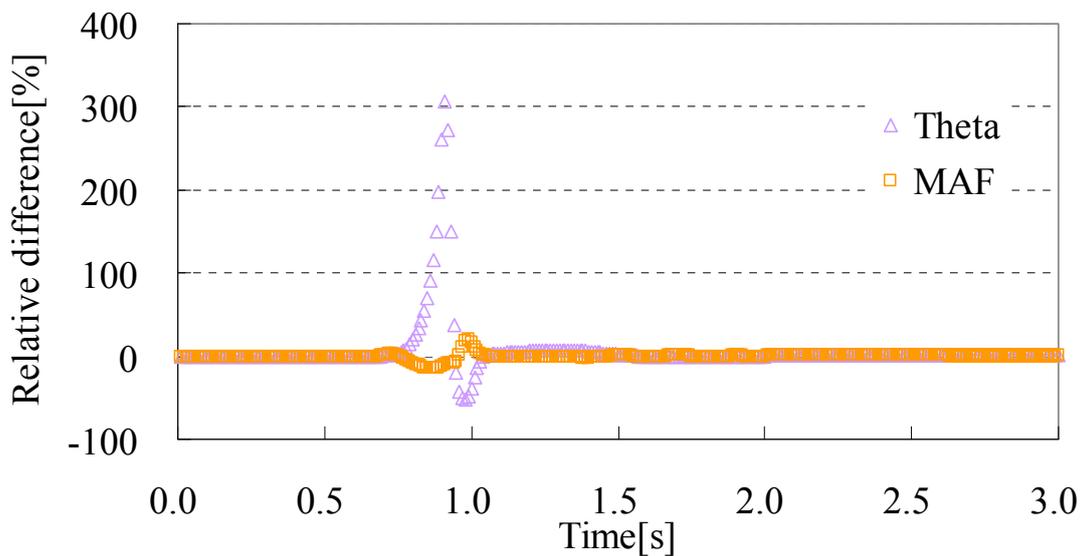


図 6.4.3.4 全炉心 LRA ベンチマーク問題の炉心出力の計算差異

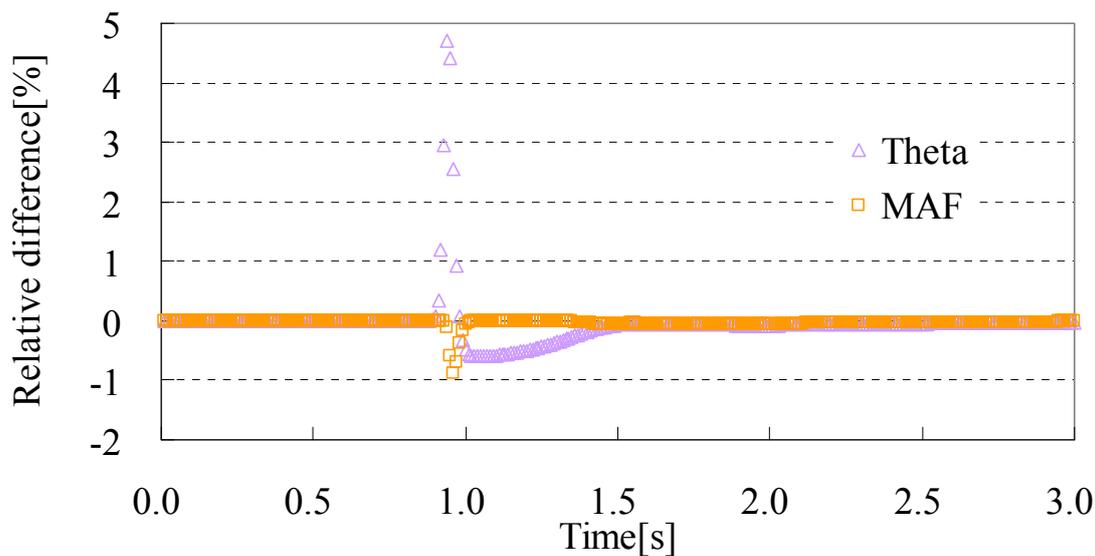


図 6.4.3.5 全炉心 LRA ベンチマーク問題の燃料温度の計算差異

図 6.4.3.4 より、 θ 法における炉心出力の絶対値の最大相対差異は 306%であるが、MAF 法は 19.6%である。また図 6.4.3.5 より、 θ 法における燃料温度の絶対値の最大相対差異は 4.7%であるが、MAF 法は 0.89%である。そのため、三次元全炉心計算においても MAF 法は θ 法の計算精度よりも一桁程度優れた結果を得ることを確認した。以上より、二次元、三次元 1/4 及び三次元全炉心の LRA ベンチマーク問題で MAF 法の計算精度が従来法よりも高精度であることを確認した。

次に、詳細計算での計算時間の比較を行う。詳細メッシュを $110 \times 110 \times 24$ メッシュ、粗メッシュを $22 \times 22 \times 12$ メッシュにした時の計算を行っていく。計算時間を比較するにあたり、自動タイムステップを用いた。 θ 法及び MAF 法のタイムステップを $(\omega\Delta t)_{\max} = 0.6$ とした時の計算結果を以下に示す。なお、TCMFD のタイムステップは参照解の $(\omega\Delta t)_{\max}$ と同様に設定し、参照解は θ 法の $(\omega\Delta t)_{\max} = 0.01$ の結果を用いた。

表 6.4.3.2 三次元全炉心の計算結果

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	4038	73	73
最大出力の時間[s]	0.953	0.948	0.948
炉心最大出力[W/cc]	1468	1389	1448
炉心出力 at 3s[W/cc]	21	21	21
平均燃料温度 at 3s[K]	493	494	494

表 6.4.3.3 三次元全炉心の相対差異

	Ref.	Theta法	MAF法
タイムステップ数	4038	143	144
最大出力の時間[s]	0.953	-0.5%	-0.5%
炉心最大出力[W/cc]	1468	-5.4%	-1.3%
炉心出力 at 3s[W/cc]	21	-0.3%	0.2%
平均燃料温度 at 3s[K]	493	0.1%	0.1%

表 6.4.3.2 及び 6.4.3.3 より、MAF 法は従来法よりも高精度に計算できていることが分かる。3次元 1/4 炉心と同様に、特にピーク時の計算精度が従来法よりも改善されており、安全解析を行う上で優れた手法であると言える。また、MAF 法は TCMFD の結果を用いることで、図 6.4.3.6 に示すように、粗タイムステップで滑らかな炉心出力の変化を得ることが可能であるために、精度良く積算発熱量を計算できる可能性がある。

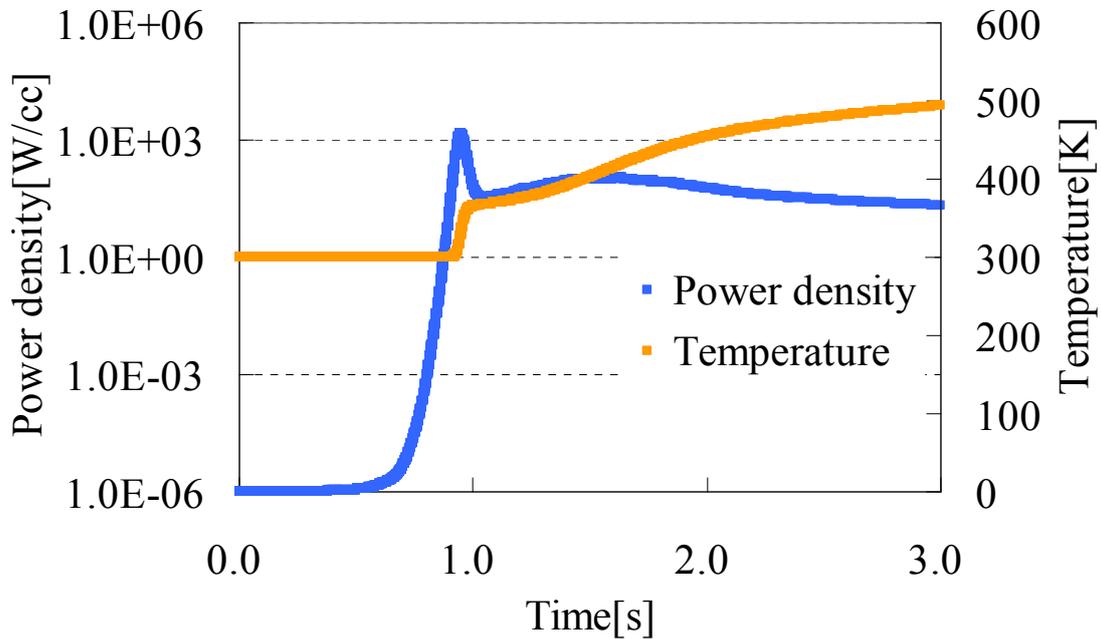


図 6.4.3.6 粗タイムステップにおける MAF 法の TCMFD の計算結果

なお目的である、MAF 法と参照解(θ 法)の計算時間の比較を行うと表 6.4.3.4 の結果を得る。

表 6.4.3.4 MAF 法と θ 法の相対計算時間

	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	6.9

表 6.4.2.4 より、MAF 法は粗タイムステップで詳細タイムステップの参照解を再現できる点に着目すれば、大規模な全炉心体系の計算も従来法に比べて、高い計算効率を実現可能であることを確認した。

6.5 本章のまとめ

本章で述べたことを以下にまとめる。

- TWIGL ベンチマーク
 - Krylov 部分空間法は断面積が時間変化しないステップ状の場合では、従来法に比べて高速に計算することが可能である。しかし、断面積が時間に依存する場合には、現在の計算方法では計算効率が大きく低下する。

- 周波数関数近似法は、周波数変換法よりもステップ状及びランプ状の両方で高精度に計算することが可能である。また計算時間に関しても周波数変換法とほぼ同程度の計算時間で計算が可能である。しかし、従来法を大幅に改善できてはいない。
 - 振幅関数のエネルギー依存性を適切に取扱う必要があるために、本研究では振幅関数を多群の TCMFD で計算を行なった。同タイムステップの従来法に比べて計算コストは高いが、非常に高精度に計算可能。また、詳細メッシュ体系では同程度の計算精度を得る観点では、従来法よりも MAF 法の方が優れている。
- LMW ベンチマーク問題
 - LMW ベンチマーク問題では、タイムスケールに比べて出力の変化が緩やかなために、遅発中性子先行核密度の計算精度が重要になる。そこで、本研究で開発した新しい遅発中性子先行核密度の計算方法を用いることで、粗タイムステップで従来法に比べて非常に高精度に計算可能であった。
 - 粗メッシュ/詳細メッシュの比を小さくすることで、従来法よりも高速に計算することが可能であった。
 - TCMFD の結果を用いることで、詳細計算を再現できる点に着目すれば、従来法に比べて高い計算効率を達成でき、TCMFD の計算精度も参照解とよく一致していた。
 - LRA ベンチマーク問題
 - 本ベンチマーク問題のように反応度が強い場合には、振幅関数を計算する過程を反復しないと計算精度の低下が顕著になることを確認した。
 - 自動タイムステップモデルを用いても MAF 法は計算精度よく計算できることを確認した。
 - 詳細メッシュのタイムステップでは、ピーク出力時の時間がタイムステップ内に埋もれてしまう場合があるが、TCMFD の結果を用いることにより、ピーク出力及びピーク時間を適切に再現できることを確認した。

以上より、様々な検証計算を行なった結果、MAF 法は粗タイムステップで参照解の計算結果を適切に再現でき、参照解の計算時間よりも高速に計算できることを確認した。そのため、MAF 法はフィードバックがある計算条件や即発臨界のような強い反応度の場合にも精度良く計算可能であり、次世代の動特性解析手法になる可能性がある。

6.6 参考文献

- 1) L. A. Hageman, J. B. Yasinsky, “Comparison of alternating direction time differencing

- method with other implicit method for the solution of the neutron group diffusion equations,” *Nucl. Sci. Eng.*, **38**, 8-32 (1969).
- 2) S. Langenbuch, W. Maurer, W. Werner, “Coarse-Mesh Flux-Expansion Method of the Analysis of Space-Time Effects in Large Light Water Reactor Cores,” *Nucl. Sci. Eng.*, **63**, 437-456 (1969).
 - 3) Argonne Code Center, *Benchmark Problem Book*, ANL-7416, Suppl. 2, (1977).
 - 4) R. B. Sidje, “EXPOKIT: Software package for computing matrix exponentials,” *ACM Trans. Math. Softw.*, **24**[1], 130-156 (1998).
 - 5) Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, Philadelphia (2008).
 - 6) T. Downar, D. Lee, Y. Xu, *et al.*, *PARCS v2.6 U.S NRC Core Neutronics Simulator THEORY MANUAL*, School of Nuclear Engineering Purdue University (2004).
 - 7) B. W. Patton, J. P. Holloway, “Application of preconditioned GMRES to the numerical solution of the neutron transport equation.” *Ann. Nucl. Energy*, **29**[2], 109-136 (2002).
 - 8) A. Yamamoto, M. Tatsumi, N. Sugimura, “Numerical Solution of Stiff Burnup Equation with Short Half Lived Nuclides by the Krylov Subspace Method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[2], 147-154 (2007).
 - 9) S. Noritake, A. Imakura, Y. Yamamoto, *et al.*, “A Large-Grained Parallel Solver for Linear Simultaneous Ordinary Differential Equations based on Matrix Exponential and its Evaluation,” *Transac. of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **19**[3], 293-312 (2009). [in Japanese]
 - 10) T. M. Sutton, B. N. Aviles, “Diffusion theory methods for spatial kinetics calculation,” *Prog. Nucl. Energy*, **30**[2], 119-182 (1996).
 - 11) M. Hochbruck, C. Lubich, “On Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator,” *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**[5], 1911-1925 (1998).
 - 12) C. Moler, C.V. Loan, “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later,” *SIAM review*, **45**[1], 3-49 (2003).
 - 13) M. Tatsumi, A. Yamamoto, “Advanced PWR Core Calculation Based on Multi-group Nodal-transport Method in Three-dimensional Pin-by-Pin Geometry,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[6], 376-387 (2003).
 - 14) K. Smith, “An analytical nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equation,” Nuclear engineer and Master of Science, Massachusetts institute of technology, (1976).
 - 15) C. H. Kang, “Discontinuous Space-Time Dependent Nodal Synthesis Method for Reactor Analysis,” Doctor of Science, Massachusetts institute of technology, (1996).

- 16) J. C. Gehin, "A Quasi-Static Polynomial Nodal Method for Nuclear Reactor Analysis," Doctor of Philosophy, Massachusetts institute of technology, (1992).
- 17) V. G. Zimin, H. Ninokata, "Nodal neutron kinetics model based on nonlinear iteration procedure for LWR analysis," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **25**[8], 507-528 (2003).
- 18) M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, "Development of Kinetics Model for BWR Core Simulator AETNA," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**[4], 201-212 (2003).
- 19) T. Endo, M. Tatsumi, "Study on kinetic transport solvers for pin-by-pin core calculation," *Proc. PHYSOR2008*, Interlaken, Switzerland, Sept. 14-19, 2008, (2008). [CD-ROM]
- 20) E. Berga, F. D. Pasquantonio, E. Salina, "Computation accuracy and efficiency of a coarse-mesh analytic nodal method for LWR transient problems, in comparison with a space-time synthesis method." *Ann. Nucl. Energy*, **8**, 509-524 (1981).
- 21) 池田秀晃, "3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用", 博士論文, 大阪大学, (2002).

第7章 結論

近年の安全設計において、Code Scaling, Applicability and Uncertainty Methodology (CSAU)に代表されるように、炉心の安全裕度をより正確に評価する試みが行われている。CSAUは炉心パラメータの不確定性を精度よく評価するために、多数の計算条件で計算を行う必要がある。また、以前の炉心解析手法は、近代ノード法に基づく粗メッシュ計算が炉心計算の標準的な手法となっていた。しかし、近年の炉心解析の傾向としては、炉心の燃料棒出力を直接評価可能であるPin-by-Pin計算や輸送計算を初めとする計算コストが高い詳細計算が活発に研究されている。以上のことから、動特性解析手法としても高精度かつ高速な解析手法が求められている。

現在の動特性解析手法として、完全陰解法、 θ 法、周波数変換法、改良準静近似法を初めとする様々な手法が考案されている。しかし、これらの解析手法は互いに独立して扱われており、動特性解析を体系づけてかつ統一的に扱える手法が存在していなかった。

以上より本研究では、工学的に必要とされている高精度かつ高速に扱える手法と、原子炉物理学における動特性解析手法の理論を統一的に扱える手法の開発を行った。

第1章では、炉心の異常な過渡・事故事象を計算する必要がある、安全解析の現状及び炉心の不安定事象について言及した。また、安全解析の手法として、炉心パラメータの不確定性を扱うことで、適切な安全裕度を評価する試みである CSAU 法について述べた。また、PWR 炉心で現在主流の制御棒価値測定法として、Dynamic Rod Worth Measurement 法について述べた。そして、1章の最後に現在の炉心計算コードの計算方法についてまとめた。

第2章では、炉心計算手法の基礎となる定常状態の拡散方程式の導出を行った。実効増倍率の計算を含む拡散方程式は固有値問題に帰着するが、固有値計算方法としてべき乗法、内部反復として、ADI法について述べた。また、現在の炉心計算法として広く用いられている、近代ノード法についての理論及び実装方法について述べた。さらに、計算機で効率よく計算を行うために各種加速法についても言及した。

第3章では、本研究で新たな動特性解析手法を開発するにあたり、従来の動特性解析手法について詳細に記述した。まず初めに、炉心の応答を簡易に知ることが可能であり、現在にも用いられている、一点炉動特性の物理的な近似及び随伴方程式を用いた厳密な導出について述べた。その次に、数値時間積分法の基礎として、陽解法及び陰解法の計算イメージと数値不安定性について述べた。空間依存動特性方程式の数値解法として、 θ 法、周波数変換法、SCM、改良準静近似法に対して各手法の基礎式及び特徴について詳細に述べた。また、動特性解析手法の解析精度に大きく影響を与える遅発中性子先行核密度の計算方法と自動タイムステップモデルについても述べ、近代ノード法の時間依存への拡張についての問題点についても述べた。

4章では、本研究で新たに開発した動特性方程式の解法について述べた。まず初めに、空間に関して離散化された動特性方程式の解析解は指数行列になることを示し、本研究で対象とする大規模疎行列の指数行列を効率的に計算方法である、Krylov 部分空間法について述べた。次に、指数行列の汎用的な計算方法である、Contour Integrals 法について述べた。Contour Integrals 法の計算方法としては、大きく分けてコーシーの積分公式と逆ラプラス変換を計算する方法がある。しかし、どちらの計算方法とも動特性方程式の固有値分布が非常に大きいため、実用的ではないと結論づけた。Krylov 部分空間法と Contour Integrals 法は動特性計算には使われてないが、他の分野で使われていた既存の方法であった。

一方、周波数関数近似法は本研究で新たに開発した、オリジナルな手法である。従来の周波数変換法よりも周波数の時間依存性を厳密に取扱うことにより、高精度化を目指した手法である。MAF 法も同様に本研究のオリジナルな手法であり、また、従来の動特性解析手法を統一的に扱える手法である。MAF 法では正確な振幅関数を計算するために、時間依存の CMFD 計算を新たに提案した。

5章では、実際の商用炉を解析する上では欠かすことができない、フィードバック効果の取扱いについて述べた。様々な物理的要因からフィードバックがあることを示し、フィードバック計算手法について述べた。また、フィードバック効果を簡易に考慮した自動タイムステップモデルについて新たに開発を行った。

6章では、4章で提案し、本研究で開発した動特性計算手法の検証計算を行なった。Krylov 部分空間法は断面積が時間依存性を有しない場合の計算精度・時間は従来法に比べて優れている。しかし、商用炉の解析のように断面積が時間依存性を有する場合においては、本研究で用いたモデルでは従来法に比べて有用性は小さかった。一方、周波数関数近似法は従来法に対して高精度に計算することが可能であったが、従来法を根本的に改善することは困難であった。最後に、従来法を統一的に扱える MAF 法は、従来法のどの手法よりも非常に高精度に計算が可能であることを確認した。また、他のベンチマーク問題でも MAF 法は粗タイムステップを用いて、従来の詳細計算を再現できるために、高い計算効率で計算可能であることを示した。

以上のことから、本研究では新たな動特性解析手法の開発を行い、従来法に比べて高い計算精度と計算効率を実現可能である手法を開発することができた。また、動特性解析手法を統一的に扱える手法を開発することで、動特性解析理論の体系化を行った。本研究で新たに提案した手法は、今後の動特性解析手法と原子炉物理学の発展に貢献するものであると考えられる。

Appendix A 多点炉動特性方程式

A.1 本章の概要

第4章のMAF法の節において、メッシュ毎の一点炉方程式を計算するだけではMAF法が不安定になることを記述し、その考察に多点炉動特性方程式を用いた。そこで本章では、多点炉動特性方程式について言及する。多点炉動特性方程式に述べる前に、まず初めに定常状態の結合炉について考える。

A.2 定常状態の結合炉

定常状態において、系全体では中性子束は次式を満足する。

$$A\phi_g(\mathbf{r}) = \frac{\chi_g}{k} s(\mathbf{r}) \quad (\text{A.2.1})$$

ここで、

A : 拡散、吸収、散乱を表す演算子

$$s(\mathbf{r}) : \text{領域 } \mathbf{r} \text{ の核分裂源} \quad s(\mathbf{r}) = \sum_g \nu \Sigma_{f,g} \phi_g(\mathbf{r})$$

である。

(A.2.1)式の演算子 A 及び共役演算子 A^\dagger を用いて次式を満たすグリーン関数を定義する。

$$A^\dagger G(\mathbf{r}, g : \mathbf{r}', g') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{gg'} \quad (\text{A.2.2})$$

(A.2.1)式に(A.2.2)式で定義したグリーン関数を乗算し位相空間で積分する。

$$\langle G(\mathbf{r}, g : \mathbf{r}', g') A \phi_g(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle G(\mathbf{r}, g : \mathbf{r}', g) \frac{\chi_g}{k} s(\mathbf{r}) \right\rangle \quad (\text{A.2.3})$$

また、(A.2.2)式に $\phi_g(\mathbf{r})$ を乗算し位相空間で積分する。

$$\langle \phi_g(\mathbf{r}) A^\dagger G(\mathbf{r}, g : \mathbf{r}', g') \rangle = \langle G^\dagger(\mathbf{r}, g : \mathbf{r}', g') A \phi_g(\mathbf{r}) \rangle = \phi_g(\mathbf{r}) \quad (\text{A.2.4})$$

(A.2.3)式及び(A.2.4)式やグリーン関数の対称性を用いることで最終的に以下の方程式が導ける。

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \int \sum_{g'} \chi_{g'} G(\mathbf{r}', g' : \mathbf{r}, g) s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.2.5})$$

上式に $\nu \Sigma_{f,g}$ を乗算して、全エネルギーで積分すると次式が得られる。

$$s(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \sum_g \nu \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}) \int_V \sum_{g'} \chi_{g'} G(\mathbf{r}', g' : \mathbf{r}, g) s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.2.6})$$

(A.2.6)式は核分裂源 $s(\mathbf{r})$ を未知数とする積分方程式で、グリーン関数が得られていれば $s(\mathbf{r})$ について計算することができる。

しかし、(A.2.2)式のグリーン関数を多次元多領域の問題で解析的に求めるのは困難であり、また数値的に求めるのも一般に簡単でない¹⁾。この困難を避けるために適当に分割した領域ごとの中性子発生量についての式を考える。

(A.2.6)式を \mathbf{r} について領域 V_i で積分すると次式が得られる。

$$s_i = \frac{1}{k} \sum_g \int_{V_i} d\mathbf{r} \nu \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}) \int_V \sum_{g'} \chi_{g'} G(\mathbf{r}', g' : \mathbf{r}, g) s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.2.7})$$

一方、(A.2.2)式に $\nu \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}')$ を乗算し \mathbf{r}' について領域 V_i 及びエネルギーで積分した次式の量を定義する。

$$G_i(\mathbf{r}, g) = \int_{V_i} d\mathbf{r}' \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, g; \mathbf{r}' g') \quad (\text{A.2.8})$$

(A.2.8)式を用いると(A.2.2)式から次式を導くことができる。

$$A^\dagger G_i(\mathbf{r}, g) = \nu \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}) \delta_i(\mathbf{r}), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (\text{A.2.9})$$

また、(A.2.8)式の $G_i(\mathbf{r}, g)$ を用いると、(A.2.7)式は次式に変形することができる。

$$s_i = \frac{1}{k} \sum_g \int_V d\mathbf{r}' \chi_{g'} G(\mathbf{r}', g') s(\mathbf{r}') \quad (\text{A.2.10})$$

ここで、領域 V_n から領域 V_i への結合係数 k_m を次式で定義する。

$$k_m = \frac{\sum_{g'} \int_{V_n} \chi_{g'} d\mathbf{r}' \int_{V_i} d\mathbf{r} \sum_g \nu \Sigma_{f,g}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}', g' : \mathbf{r}, g) s(\mathbf{r}')}{\int_{V_n} d\mathbf{r}' s(\mathbf{r}')} \quad (\text{A.2.11})$$

$$= \frac{\sum_{g'} \int_{V_n} d\mathbf{r}' \chi_{g'} G_i(\mathbf{r}', g') s(\mathbf{r}')}{\int_{V_n} d\mathbf{r}' s(\mathbf{r}')} \quad (\text{A.2.12})$$

(A.2.12)式を用いると(A.2.10)式は次式になる。

$$s_i = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N k_{in} s_n \quad (\text{A.2.13})$$

(A.2.13)式から(A.2.12)式で定義した結合係数の物理的な意味を知ることができる。

結合係数 k_{in} は領域 V_n で発生した一つの中性子が領域 V_i で次の核分裂中性子を生成

する確率である。また、(A.2.12)式の $G_i(\mathbf{r}', \mathbf{g}')$ は核分裂で生まれた位置 \mathbf{r}' 、エネルギー \mathbf{g}' の一つの中性子が領域 V_m で次の核分裂により生成する中性子数である。したがって $G_{g_i}(\mathbf{r}')$ は位置 \mathbf{r}' 、エネルギー \mathbf{g}' の一つの中性子の重要性を意味しているのので、中性子重要度とも呼ばれる。以上が定常状態の結合炉の議論である。

A.3 多点炉動特性方程式の導出

動特性方程式を以下のように記述する。

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-A' + \frac{1}{k} B' \right) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_i \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.3.1})$$

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{k} \beta_m F \phi_g(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.3.2})$$

演算子 $\int_V d\mathbf{r} \sum_g G_m(\mathbf{r}, t)$ を(A.2.13)式に、 $\int_V d\mathbf{r} \sum_g \phi_g(\mathbf{r}, t)$ を(A.2.9)式へ左から演算し、得られる二つの式の差をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= - \int_V F \phi_g(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} - \int_V d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \delta A \phi_g \\ &+ \frac{1}{k} \int_V d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, t) (1 - \beta_{\text{eff}}) \chi_{p,g} F' \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ &+ \int_V d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, t) \sum_i \chi_{d,m,g} \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

なお、摂動後の核分裂演算子を用いて、時間依存の核分裂源を次式で定義している。

$$s(\mathbf{r}, t) = F' \phi_g(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.3.4})$$

(A.3.4)式を用いることで、時間依存の中性子束及び遅発中性子先行核密度の結合係数を次式で定義することが出来る。

$$k_{p,in}(t) = \frac{\int_V d\mathbf{r}' \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \chi_{p,g} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\int_V d\mathbf{r} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.5})$$

$$k_{d,m,in}(t) = \frac{\int_V d\mathbf{r}' \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \chi_{d,m,g} C_m(\mathbf{r}, t)}{\int_V d\mathbf{r} C_m(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.6})$$

遅発中性子は即発中性子よりもエネルギーが低いので、吸収されるまでの移動距離は

即発中性子よりも小さい。したがって熱中性子炉では遅発中性子の漏れが小さい分だけ $k_{d,m,ii}$ は $k_{p,ii}$ よりも大きく、 $n \neq i$ に対する $k_{d,m,in}$ は遅発中性子の移動距離が小さいので、即発中性子に対するものより小さい¹⁾。中性子寿命に関するパラメータ及び遅発中性子先行核に関するパラメータを次式で定義する。

$$l_i(t) = \frac{\int_{V_i} d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t}}{\int_{V_i} d\mathbf{r} \frac{\partial F' \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t}} \quad (\text{A.3.7})$$

$$\beta_{in}(t) = \frac{\int_{V_n} d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \beta \chi_{p,g} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\int_{V_n} d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \chi_{p,g} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.8})$$

さらに δA 及び δF の摂動による結合係数の直接的な変化を次式で定義する。

$$\Delta k_{A,in}(t) = \frac{\int_{V_n} d\mathbf{r} \sum_g G_i(\mathbf{r}, g) \delta A \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\int_{V_n} d\mathbf{r} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.9})$$

$$\Delta k_{F,i}(t) = \frac{\int_{V_i} d\mathbf{r} \delta F \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\int_{V_i} d\mathbf{r} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.10})$$

以上で定義した記号を用いると、次式の多点炉動特性方程式を導出することが出来る。

$$\frac{ds_i(t)}{dt} = -\frac{(1 - \Delta k_{F,i}(t))s_i(t)}{l_i(t)} + \frac{1}{l_i(t)} \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{1}{k} (1 - \beta_{in}(t)) k_{p,in}(t) - \Delta k_{A,in}(t) \right) s_n(t) \right] + \sum_m k_{d,m,in}(t) \lambda_m C_{mn}(t) \quad (\text{A.3.11})$$

ここで、 $s_i(t)$ 及び $C_{m,i}(t)$ は核分裂源及び遅発中性子先行核密度の領域 V_i での積分量で、次式で定義されている。

$$s_i(t) = \int_{V_i} s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (\text{A.3.12})$$

$$C_{m,i}(t) = \int_{V_m} C_{m,i}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (\text{A.3.13})$$

また、(A.3.2)式を領域 V_i で積分すると、遅発中性子先行核密度についてのノード式が得られる。

$$\frac{dC_{m,i}(t)}{dt} = \frac{1}{k} \beta_{m,i}(t) s_m(t) - \lambda_m C_{m,i}(t) \quad (\text{A.3.14})$$

ここで、

$$\beta_{m,i}(t) = \frac{\int_{V_i} d\mathbf{r} \beta_m F' \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\int_{V_i} d\mathbf{r} F' \phi_g(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.3.15})$$

である。

(A.3.11)式及び(A.3.15)式が多点炉動特性方程式である。

A.4 本章のまとめ

本章では、定常状態の結合炉及び多点炉動特性方程式の導出を行った。

A.5 参考文献

1. 小林啓祐, 原子炉物理, コロナ社, (1996).

Appendix B 一点炉動特性方程式

B.1 本章の概要

本章では、本文中でも考察のために用いた一点炉動特性方程式について述べる。

B.2 一点炉動特性方程式の導出

本節では、本文章の中心となる、一点炉動特性方程式の導出を行う。現在のプラント解析に用いられている一点炉動特性方程式の導出には、随伴中性子束を用いることで、一点炉近似に起因する誤差を低減している¹⁾。しかし、本文章では簡略化の為に随伴中性子束を用いない簡略的な導出を行う。なお、随伴中性子束を用いた詳細な導出は、参考文献2)を参照のこと。以下では、時間依存の拡散方程式から一点炉動特性方程式を導出する。

一般的に、一点炉動特性方程式を導出する過程では、中性子束のエネルギー依存性を考慮しない(全エネルギーで積分する)形で一点炉動特性方程式の導出を行っている²⁾。そのため本文書でも、既に全エネルギーで積分した時間依存の拡散方程式から、一点炉動特性方程式を導出する。全エネルギーで積分した時間依存の拡散方程式は以下である。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta_{eff}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B.2.1})$$

$$\frac{\partial C_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_{eff, m} v \Sigma_f(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_m C_m(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B.2.2})$$

一点炉動特性方程式を導出するために、中性子束 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 及び遅発先行核密度 $C(\mathbf{r}, t)$ が空間 \mathbf{r} 及び時間 t に関して変数分離できるとする。さらに、(B.2.3)及び(B.2.4)式に示すように、中性子束及び遅発先行核密度の空間分布は共通であると仮定する。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \times \phi(t) = \varphi(\mathbf{r}) \times v n(t) \quad (\text{B.2.3})$$

$$C(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \times C(t) \quad (\text{B.2.4})$$

ここで、一点炉動特性方程式の導出には、空間分布 $\varphi(\mathbf{r})$ に時間に関する変数が含まれていない事に注意しなければならない。つまり、空間分布に時間に関する変数が含まれていないということは、一点炉動特性方程式で表現する空間分布は定常状態と同じであると仮定していることになる。

次に、幾何学的バックリング B^2 を用いると、中性子束及び遅発先行核密度の空間分布 $\varphi(\mathbf{r})$ は次式を満足する。

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + B^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B.2.5})$$

(B.2.3)~(B.2.5)式を、一点炉動特性方程式である(B.2.1)及び(B.2.2)式に代入し、整理すると次式になる。

ここでは簡略化のため、断面積の時間依存性は考慮していない。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = -\left(DB^2 + \Sigma_a - (1 - \beta_{eff})\nu\Sigma_f \right) \nu n(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.6)$$

$$\frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = \beta_{eff,m} \nu\Sigma_f(t) \nu n(t) - \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.7)$$

次に、実効増倍率とバックリングは以下の関係式を満足することに注目する。

$$k_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad (B.2.8)$$

(B.2.8)式を(B.2.6)式に代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \left(\Sigma_a + DB^2 \right) \left(-1 + (1 - \beta_{eff})k_{eff} \right) \nu n(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.9)$$

また、炉内の中性子の実効的な平均寿命 l_{eff} は以下で与えられる。

$$l_{eff} = \frac{1}{\nu\Sigma_a + \nu DB^2} \quad (B.2.10)$$

(B.2.10)式を(B.2.9)式に代入すると一点炉動特性方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\left((1 - \beta_{eff})k_{eff} - 1 \right) n(t)}{l_{eff}} + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.11)$$

しかし、一点炉動特性方程式は実効増倍率ではなく、次式の反応度 ρ を用いて表現するので一般的である。

$$\rho \equiv \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \Leftrightarrow k_{eff} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (B.2.12)$$

反応度の式(B.2.12)式を(B.2.11)式に代入する。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\left((1 - \beta_{eff}) \frac{1}{1 - \rho} - 1 \right) n(t)}{l_{eff}} + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.13)$$

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\left((1 - \beta_{eff}) - (1 - \rho) \right) n(t)}{l_{eff} (1 - \rho)} + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.14)$$

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{l_{eff} / k_{eff}} n(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (B.2.15)$$

ここで、中性子世代時間 Λ は以下で与えられる。

$$\Lambda = \frac{l_{eff}}{k_{eff}} \quad (B.2.16)$$

(B.2.16)式を(B.2.15)式に代入することで、最終的に、中性子密度 $n(t)$ に関する一点炉動

特性方程式を導出できた。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{\Lambda} n(t) + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(t) \quad (\text{B.2.17})$$

一方、遅発先行核密度の(B.2.7)式も、(B.2.8)、(B.2.10)及び(B.2.16)式を用いることで、次式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = \frac{\beta_{eff,m}}{\Lambda} n(t) - \lambda_m C_m(t) \quad (\text{B.2.18})$$

(B.2.17)式及び(B.2.18)式から、一点炉動特性方程式を導出することが出来た。

B.3 一点炉動特性方程式の解析解

本章では、一点炉動特性方程式の解析解の導出を行う。前章では、遅発先行核種数は M としていたが、本章では簡略化のため、以下の様に遅発先行核種数を 1 とする。また、本章以降では、 β_{eff} を β と表記する。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \quad (\text{B.3.1})$$

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (\text{B.3.2})$$

(B.3.1)式及び(B.3.2)式から分かるように、この2つの式は連立していることが分かる。このように、微分方程式が連立している方程式を、連立微分方程式と呼ぶ。連立微分方程式の解法にはいくつかの手法があるが、本章ではラプラス変換を用いた導出を行う。

(B.3.1)及び(B.3.2)式をラプラス変換すると次式になる。

$$sN(s) - n(0) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(s) + \lambda C(s) \quad (\text{B.3.3})$$

$$sC(s) - C(0) = \frac{\beta}{\Lambda} N(s) - \lambda C(s) \quad (\text{B.3.4})$$

(B.3.4)式において、 $C(s)$ について整理すると次式になる。

$$C(s) = \frac{1}{s + \lambda} \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \frac{1}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.5})$$

(B.3.5)式を(B.3.3)式に代入する。

$$sN(s) - n(0) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(s) + \lambda \frac{1}{s + \lambda} \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \frac{1}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.6})$$

$$sN(s) - n(0) = \frac{(s + \lambda)\rho - s\beta}{(s + \lambda)\Lambda} N(s) + \frac{\lambda}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.7})$$

(B.3.7)式を $N(s)$ についてまとめる。

$$N(s) = \frac{n(0) + \frac{\lambda}{(s+\lambda)}C(0)}{s - \frac{(s+\lambda)\rho - s\beta}{(s+\lambda)\Lambda}} \quad (\text{B.3.8})$$

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + s\left(\lambda + \frac{\beta - \rho}{\Lambda}\right) - \frac{\lambda\rho}{\Lambda}} \{\lambda C(0) + (s+\lambda)n(0)\} \quad (\text{B.3.9})$$

ここで、次式の(B.3.10)式から逆ラプラス変換して(B.3.11)式の形になるように、(B.3.9)式の分母を s について因数分解することを考える。

$$N(s) = C_1 \frac{1}{s - w_1} + C_2 \frac{1}{s - w_2} \quad (\text{B.3.10})$$

$$n(t) = C_1 \exp(w_1 t) + C_2 \exp(w_2 t) \quad (\text{B.3.11})$$

(B.3.10)式の分母がゼロとするときの解 w は次式を満足する。

$$w^2 - w\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \frac{\lambda\rho}{\Lambda} = 0 \quad (\text{B.3.12})$$

(B.3.12)式の二次方程式を計算すると以下の二つの解を得る。

$$w_1 = \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda\frac{\rho}{\Lambda}}}{2} \quad (\text{B.3.13})$$

$$w_2 = \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda\frac{\rho}{\Lambda}}}{2} \quad (\text{B.3.14})$$

w_1 及び w_2 を用いて(B.3.9)式を整理すると次式を得る。

$$N(s) = \frac{(s+\lambda)}{(s-w_1)(s-w_2)} n(0) + \frac{1}{(s-w_1)(s-w_2)} \lambda C(0) \quad (\text{B.3.15})$$

$$N(s) = \left\{ \frac{\lambda + w_1}{w_1 - w_2} + \frac{\lambda + w_2}{w_2 - w_1} \right\} n(0) + \left\{ \frac{1}{w_1 - w_2} + \frac{1}{w_2 - w_1} \right\} \lambda C(0) \quad (\text{B.3.16})$$

(B.3.16)式に対して逆ラプラス変換を行うと、以下の解を得る。

$$n(t) = \left\{ \frac{\lambda + w_1}{w_1 - w_2} \exp(w_1 t) + \frac{\lambda + w_2}{w_2 - w_1} \exp(w_2 t) \right\} n(0) + \left\{ \frac{1}{w_1 - w_2} \exp(w_1 t) + \frac{1}{w_2 - w_1} \exp(w_2 t) \right\} \lambda C(0) \quad (\text{B.3.17})$$

ここで、遅発先行核密度の初期条件は、定常状態の遅発先行核密度を表しているので、(B.3.2)式の左辺の微分項をゼロにすることで、次式の定常状態の遅発先行核密度の式を

得る。

$$C(0) = \frac{\beta}{\Lambda\lambda} n(0) \quad (\text{B.3.18})$$

(B.3.18)式を(B.3.17)式に代入すると、最終的に次式を得る。

$$n(t) = \left\{ \frac{\lambda + w_1 + \frac{\beta}{\Lambda}}{w_1 - w_2} \exp(w_1 t) + \frac{\lambda + w_2 + \frac{\beta}{\Lambda}}{w_2 - w_1} \exp(w_2 t) \right\} n(0) \quad (\text{B.3.19})$$

これより、一点炉動特性方程式の解析解を得ることができた。しかし、(B.3.19)式の解析解は、一般的に教科書に記載されている解析解³⁾⁵⁾とは異なっている。(ただし、(B.3.19)式は厳密である。)そこで以降では、 C_1 、 C_2 、 w_1 、 w_2 に近似を用いることで、(B.3.19)式から教科書に記載されている一般的な解析解を導出する。

ここで、

$$C_1 = \frac{\lambda + w_1 + \frac{\beta}{\Lambda}}{w_1 - w_2} \quad (\text{B.3.20})$$

$$C_2 = \frac{\lambda + w_2 + \frac{\beta}{\Lambda}}{w_2 - w_1} \quad (\text{B.3.21})$$

である。

まず初めに C_1 について考える。 C_1 を具体的に展開すると次式になる。

$$C_1 = \frac{\lambda + \frac{\beta}{\Lambda} + w_1}{w_1 - w_2} = \frac{\lambda + \frac{\beta}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda\frac{\rho}{\Lambda}}}{2\sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda\frac{\beta}{\Lambda}}} \quad (\text{B.3.22})$$

ここで、以下の近似を用いる。

$$\beta - \rho \gg \Lambda\lambda \quad (\text{B.3.23})$$

$$(\rho - \beta - \Lambda\lambda)^2 \gg 4\lambda\Lambda\rho \quad (\text{B.3.24})$$

上の二つの式に対して一般的な値のオーダー³⁾を代入すると以下の式になる。

$$O(10^{-3}) - \rho \gg 4 \times O(10^{-7}) \quad (\text{B.3.25})$$

$$(\rho - O(10^{-3}) - O(10^{-7}))^2 \gg 4O(10^{-9})\rho \quad (\text{B.3.26})$$

(B.3.25)及び(B.3.26)式のオーダー計算から、(B.3.23)及び(B.3.24)式の近似は程度妥当であることが分かった。ただし、反応度 ρ が β 近傍の場合には、(B.3.23)及び(B.3.24)式の近似は成り立たない。

(B.3.23)式及び(B.3.24)式の近似を用いると、(B.3.22)式は次式になる。

$$C_1 \cong \frac{\lambda + \frac{\beta}{\Lambda} + \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)}{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)} = \frac{\frac{\rho}{\Lambda}}{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)} \cong \frac{\rho}{\rho - \beta} \quad (\text{B.3.27})$$

C_2 についても具体的に展開し、 C_1 と同様の近似条件を用いる。

$$C_2 = \frac{\lambda + w_2 + \frac{\beta}{\Lambda}}{w_2 - w_1} n(0) = \frac{\lambda + \frac{\beta}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda \frac{\rho}{\Lambda}}}{2} \quad (\text{B.3.28})$$

$$- \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda \frac{\beta}{\Lambda}}}{2}$$

$$\cong -\frac{\lambda + \frac{\beta}{\Lambda}}{\rho - \beta} \cong -\frac{\beta}{\rho - \beta} \quad (\text{B.3.29})$$

w_1 についても C_1 、 C_2 と同様な条件を用いて以下のように近似する。

$$w_1 = \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda \frac{\rho}{\Lambda}}}{2} \cong \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right) \quad (\text{B.3.30})$$

最後に w_2 について考える。 w_2 に関しては、近似式の導出は若干面倒である。 w_2 も同様に具体的に展開する。

$$w_2 = \frac{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \sqrt{\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2 + 4\lambda \frac{\rho}{\Lambda}}}{2} \quad (\text{B.3.31})$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) \left(1 + \frac{4\lambda\rho}{\Lambda \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.3.32})$$

次に、(B.3.32)式の2項目についてマクローリン展開を用いて、2次の項までで打ち切ると以下の式を得る。(ここで、 w_2 の近似の仕方が w_1 の近似の仕方と異なるのは、 w_1 の近似法を w_2 に用いると、 w_2 がゼロになってしまい、中性子の時間変化を正確に考慮できないためである。)

$$w_2 \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda \right) \left[1 - 1 - \frac{2\lambda\rho}{\Lambda \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda \right)^2} \right] \quad (\text{B.3.33})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda \right) \left[\frac{2\lambda\rho}{\Lambda \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda \right)^2} \right] \cong -\frac{\lambda\rho}{\rho - \beta} \quad (\text{B.3.34})$$

以上の(B.3.27)、(B.3.29)、(B.3.30)及び(B.3.34)式を用いると、以下の教科書によく用いられる解を得ることが出来た。

$$n(t) = \frac{\rho}{\rho - \beta} \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) - \frac{\beta}{\rho - \beta} \exp\left(-\frac{\lambda\rho}{\rho - \beta} t\right) \quad (\text{B.3.35})$$

以上より、一点炉動特性方程式の厳密な解及び一般的な教科書に記載されている解析解を導出した。

B.4 即発跳躍

前章で用いた(B.3.35)を用いて、中性子世代時間 $\Lambda = 1.5 \times 10^{-5}$ 、遅発中性子割合 $\beta = 0.005$ 、崩壊定数 $\lambda = 0.078$ 及び反応度 $\rho = \pm 0.0025$ とした時の計算結果を図 B.4.1 及び図 B.4.2 に示す。

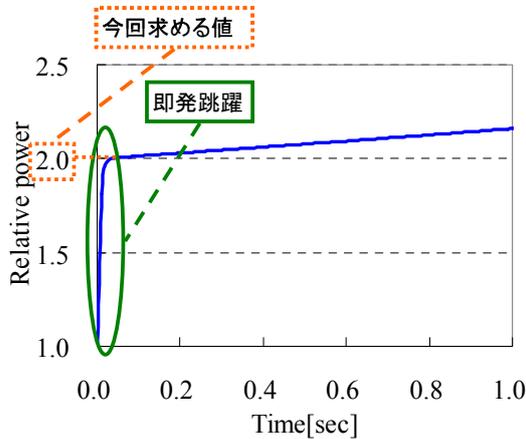


図 B.4.1 $\rho = +0.0025$ の時の炉心出力

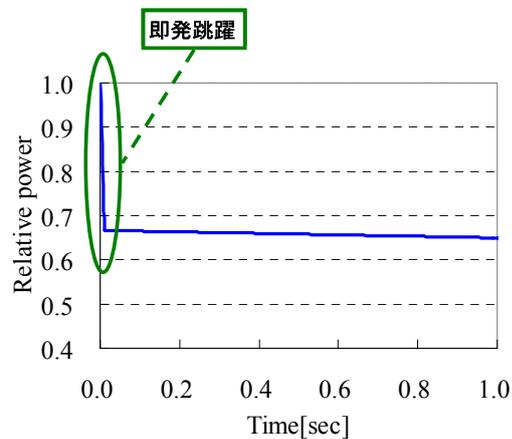


図 B.4.2 $\rho = -0.0025$ の時の炉心出力

図 B.4.1 及び図 B.4.2 から、反応度を瞬時に与えた場合、炉心の出力が急激に増加・減少し、次にそれに比べて非常にゆるやかに変化していることが確認できる。このように、炉心出力が反応度投入時に急激に変化することを、即発跳躍と呼ぶ。そこで本章では、どの程度の反応度を投入すると、どの程度の即発跳躍が起こるのかを、定量的に評価す

るための式を導出する。

即発跳躍の導出は KUCA テキスト⁴⁾、ドウデルスタット⁵⁾、ラマーシュ^{6,7)}の様々の教科書について記述されているが、全ての教科書において、導出方法は異なる。そこで、著者はこの導出の異なることについて、山根先生と議論をしたことがある。そこでの議論において、KUCA テキストの導出が最も物理的かつ数学的に正しいとの結論に至った。そこで本文章では、KUCA テキストに基づいた即発跳躍の導出を行う。一点炉動特性方程式において、反応度が $0 \rightarrow \rho$ に変化したとすると、急激な反応度変化に遅発中性子は追従出来ず、定常状態の C_0 のままであるとする。そのため、(B.3.1)式に遅発先行核の初期条件である $C(0) = \frac{\beta}{\Lambda} n(0)$ を代入する。

$$\frac{dn(t)}{dt} \cong \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \frac{\beta}{\Lambda} n(0) \quad (\text{B.4.1})$$

以降では、上式の微分方程式を解く。

まず、(B.4.1)式の同次形について考える。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) \quad (\text{B.4.2})$$

(B.4.2)式の解は、直ぐに以下の様に得られる。

$$n(t) = C(t) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) \quad (\text{B.4.3})$$

次に(B.4.3)式を(B.4.1)式に代入すると、最終的に(B.4.7)式を得る。

$$\exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) \frac{dC(t)}{dt} + \frac{\rho - \beta}{\Lambda} C(t) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} C(t) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) + \frac{\beta}{\Lambda} n(0) \quad (\text{B.4.4})$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} \exp\left(-\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) n(0) \quad (\text{B.4.5})$$

$$C(t) = -\frac{\beta}{\rho - \beta} \exp\left(-\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) n(0) + C_1 \quad (\text{B.4.6})$$

$$n(t) = -\frac{\beta}{\rho - \beta} n(0) + C_1 \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) \quad (\text{B.4.7})$$

ここで $t=0$ で $n(0)$ なので、(B.4.7)式は次式になる。

$$C_1 = n(0) + \frac{\beta}{\rho - \beta} n(0) \quad (\text{B.4.8})$$

(B.4.8)式を(B.4.7)式に代入すると、最終的に次式を得る。

$$n(t) = \left(n(0) + \frac{\beta}{\rho - \beta} n(0) \right) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) - \frac{\beta}{\rho - \beta} n(0) \quad (\text{B.4.9})$$

$$n(t) = \frac{\rho n(0)}{\rho - \beta} \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} t\right) - \frac{\beta}{\rho - \beta} n(0) \quad (\text{B.4.10})$$

次に、負の反応度について考える。負の反応度において、(B.4.10)式の指数部は負なので、上式の第一項は急激に小さくなる。本章の冒頭で示した即発跳躍の時の値を用いると、(B.4.10)式の指数項は $\exp(-350t)$ となり、非常に早く減衰することが分かる。そのため負の反応度の時には、次式になる。

$$\frac{n_1}{n(0)} \cong -\frac{\beta}{\rho - \beta} \quad (\text{B.4.11})$$

また、正の反応度 $0 < \rho < \beta$ のときも同様に指数部が負なので、

$$\frac{n_1}{n(0)} \cong -\frac{\beta}{\rho - \beta} \quad (\text{B.4.12})$$

となる。しかし、即発臨界の $\rho \geq \beta$ の反応度が加わると、(B.4.10)式の第一項目の指数部が負ならず、第一項目が減衰しなくなり、即発跳躍の式では中性子の時間依存性を記述できなくなる。そのため、即発臨界の場合には、即発跳躍近似を用いることが出来ない。

導出した即発跳躍近似の式の妥当性を確認するために、本章の最初に記載した図B.4.1及び図B.4.2の条件である $\beta = 0.005$ 及び $\rho = \pm 0.0025$ を代入すると、(B.4.13)式及び(B.4.14)式になる。

$$\frac{n_1}{n(0)} = -\frac{\beta}{\rho - \beta} = 2.00 \quad (\rho = +0.0025) \quad (\text{B.4.13})$$

$$\frac{n_1}{n(0)} = -\frac{\beta}{\rho - \beta} = 0.66\dots \quad (\rho = +0.0025) \quad (\text{B.4.14})$$

(B.4.13)及び(B.4.14)式の値と図B.4.1及び図B.4.2を比較すると、一致していることを確認できる。これより、今回導出した即発跳躍の式は妥当であることが分かった。

B.5 逆時間方程式

最後に逆時間方程式について述べる。逆時間方程式とは、炉心に加わる反応度とペリオドの逆数 w の関係を示す式である。逆時間方程式の導出では、第一章と同様にラプラス変換を行う方法と、中性子数の解を仮定して導出する方法がある。本章では、第一章の式を用いることで、簡易に説明したいので、ラプラス変換を用いた導出を行う。一点炉動特性方程式は次式である。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \quad (\text{B.3.1}) \quad (\text{再掲})$$

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (\text{B.3.2}) \quad (\text{再掲})$$

(B.3.1)及び(B.3.2)式をラプラス変換すると次式になる。

$$sN(s) - n_0 = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(s) + \lambda C(s) \quad (\text{B.3.3}) \quad (\text{再掲})$$

$$sC(s) - C_0 = \frac{\beta}{\Lambda} N(s) - \lambda C(s) \quad (\text{B.3.4}) \quad (\text{再掲})$$

(B.3.4)式において $C(s)$ について整理すると、次式になる。

$$C(s) = \frac{1}{s + \lambda} \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \frac{1}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.5}) \quad (\text{再掲})$$

(B.3.5)式を(B.3.3)式に代入する。

$$sN(s) - n_0 = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N(s) + \lambda \frac{1}{s + \lambda} \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \frac{1}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.6}) \quad (\text{再掲})$$

$$sN(s) - n_0 = \frac{(s + \lambda)\rho - s\beta}{(s + \lambda)\Lambda} N(s) + \frac{\lambda}{(s + \lambda)} C(0) \quad (\text{B.3.7}) \quad (\text{再掲})$$

(B.3.7)式を $N(s)$ についてまとめる。

$$N(s) = \frac{n_0 + \frac{\lambda}{(s + \lambda)} C(0)}{s - \frac{(s + \lambda)\rho - s\beta}{(s + \lambda)\Lambda}} \quad (\text{B.3.8}) \quad (\text{再掲})$$

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + s\left(\lambda + \frac{\beta - \rho}{\Lambda}\right) - \frac{\lambda\rho}{\Lambda}} \{\lambda C(0) + (s + \lambda)n(0)\} \quad (\text{B.3.9}) \quad (\text{再掲})$$

ここで、次式の(B.3.10)式から逆ラプラス変換して(B.3.11)式の形になるように(B.3.9)式の分母を s について因数分解することを考える。

$$N(s) = C_1 \frac{1}{s - w_1} + C_2 \frac{1}{s - w_2} \quad (\text{B.3.10}) \quad (\text{再掲})$$

$$n(t) = C_2 \exp(w_1 t) + C_2 \exp(w_2 t) \quad (\text{B.3.11}) \quad (\text{再掲})$$

(B.3.10)式の分母がゼロとするときの解 w は次式を満足する。

$$w^2 - w\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} - \lambda\right) - \frac{\lambda\rho}{\Lambda} = 0 \quad (\text{B.3.12}) \quad (\text{再掲})$$

ここで、(B.3.12)式を反応度 ρ について整理すると、ペリオドの逆数 w と反応度 ρ の関係を表現する逆時間方程式を得ることができる。

$$\Lambda w^2 - w(\rho - \beta - \Lambda\lambda) - \lambda\rho = 0 \quad (\text{B.5.1})$$

$$\rho = \frac{\Lambda w^2 + w(\beta + \Lambda\lambda)}{w + \lambda} = w\Lambda + \frac{w\beta}{w + \lambda} \quad (\text{B.5.2})$$

(B.5.2)式より、一見すると、逆時間方程式を得ることが出来た。しかし(B.5.2)式に含まれている Λ は、(B.5.3)式に示すように反応度 ρ に関する関数なので、(B.5.2)式に対して、

さらに ρ について整理する必要がある。

$$\Lambda = \frac{l_{eff}}{k_{eff}} = l_{eff}(1 - \rho) \quad (B.5.3)$$

(B.5.3)式を(B.5.2)式に代入し、 ρ について整理する。

$$\rho = wl_{eff}(1 - \rho) + \frac{w\beta}{w + \lambda} \quad (B.5.4)$$

$$\rho(1 + wl_{eff}) = wl_{eff} + \frac{w\beta}{w + \lambda} \quad (B.5.5)$$

$$\rho = \frac{wl_{eff}}{1 + wl_{eff}} + \frac{1}{1 + wl_{eff}} \frac{w\beta}{w + \lambda} \quad (B.5.6)$$

以上の手順により、最終的な逆時間方程式の形である、(B.5.6)式を導出することが出来た。なお、教科書によっては、 $T = 1/w$ の関係を用いて(B.5.6)式を書き直した(B.5.7)式を逆時間方程式と呼ぶこともある³⁾。

$$\rho = \frac{l_{eff}}{T + l_{eff}} + \frac{T}{T + l_{eff}} \frac{\beta}{1 + \lambda T} \quad (B.5.7)$$

逆時間方程式の(B.5.6)式に対して、炉心計算に用いられている一般的な値⁴⁾を代入した計算結果を図 B.5.1 に示す。

$$l_{eff} = 1.5 \times 10^{-5} (1/s) \quad (B.5.8)$$

$$\beta = 0.0065 \quad (B.5.9)$$

$$\lambda = 0.078 (1/s) \quad (B.5.10)$$

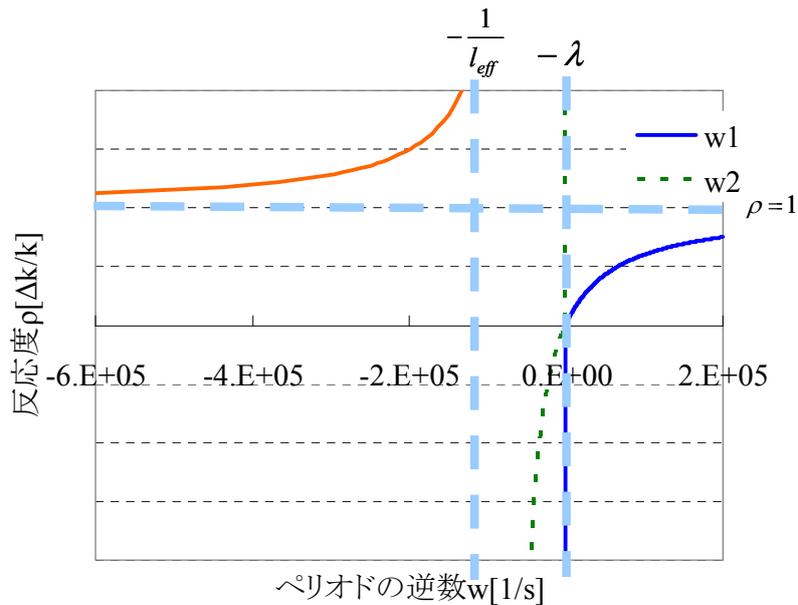


図 B.5.1 逆時間方程式の概略図

図 B.5.1 より、逆時間方程式は $-\lambda$ 、 $-1/l_{eff}$ 及び $+1$ に漸近していることが分かる。 $-\lambda$ 及び $-1/l_{eff}$ に漸近する性質は、(B.5.6)式の各項の分母に起因する。また、逆時間方程式が $+1$ に漸近するのは、以下の式から証明できる。

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{wl_{eff}}{1+wl_{eff}} + \frac{1}{1+wl_{eff}} \frac{w\beta}{w+\lambda} \right) = \lim_{w \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{l_{eff}}{\frac{1}{w} + l_{eff}} + \frac{1}{1+wl_{eff}} \frac{w\beta}{w+\lambda} \right) = \frac{l_{eff}}{l_{eff}} = +1 \quad (\text{B.5.11})$$

ここで注目することとして、図 B.5.1 の逆時間方程式のグラフは、図 B.5.2 に示すような一般的に教科書に記載されている逆時間方程式のグラフ³⁻⁷⁾と比べ、グラフの形が多少異なっている点である。

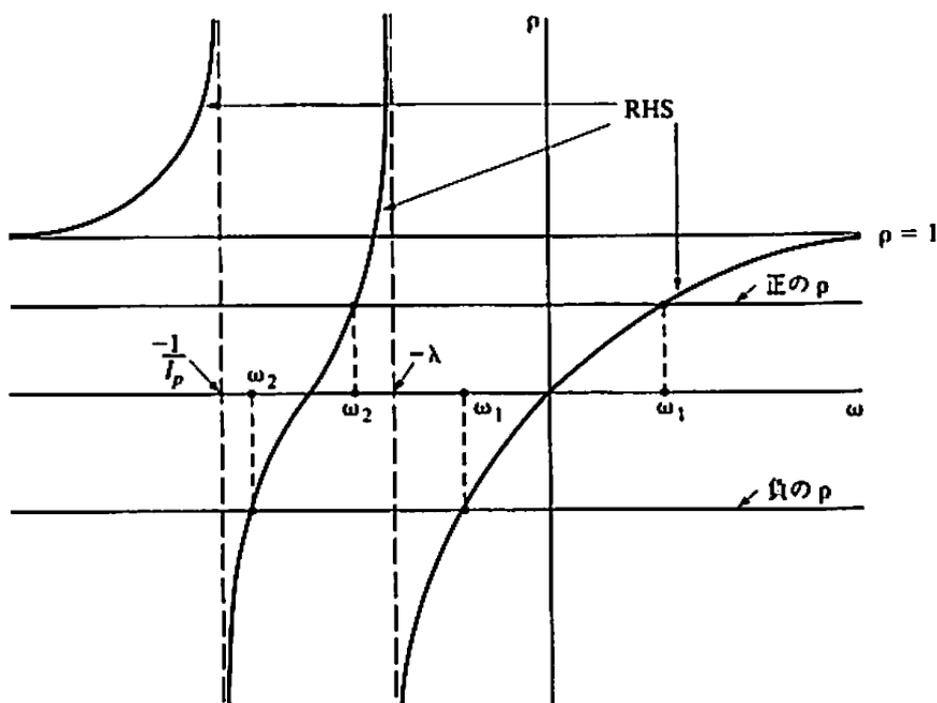


図 B.5.2 一般的に記載されている逆時間方程式のグラフ⁷⁾ (スケールは任意)

図 B.5.2 に示すように、一般的に記載されている逆時間方程式のグラフは、横軸及び縦軸のスケールがかなり歪められており、逆時間方程式の漸近解が等間隔になっている。しかし、漸近解 $-\lambda$ と $-1/l_{eff}$ に実際の値を代入すると、 -0.078 と -6.7×10^4 となり、実際の漸近解は等間隔とは程遠いこと気づく。

本章の最初でも述べたが、逆時間方程式は、反応度とペリオド逆数の関係式である。そのため、ペリオドが既知であるならば反応度が分かり、反応度が分かればペリオドの逆数(一点炉動特性方程式の解析解である(B.3.9)式の指数部に対応)が分かる。そのため逆時間方程式では、中性子+遅発先行核種数分だけの解が求まる。つまり、今回の場合では、中性子+遅発中性子先行核 1 種類の 2 つの解があるはずである。しかし、図 B.5.2 には、曲線が 3 本存在する。そのため、図 B.5.2 には物理的には有り得ない曲線が 1 本存在することになる。答えを先に述べてしまえば、それは、 $\rho > 1$ の時の解しか持ちえない、左端に存在する曲線である。理由としては、反応度 ρ は次式に示すように、分子は分母より小さく、また k は正であるので、1 を超えない。

$$\rho \equiv \frac{k-1}{k} \tag{B.5.12}$$

このことより、逆時間方程式のグラフの左端のグラフは物理的には意味を持たず、左端以外のグラフを用いて、反応度とペリオドの逆数の関係を用いる。以下では、実際に正の反応度及び負の反応度が加わった場合の炉心の出力変化の挙動を、図 B.5.2 の逆時間方程式のグラフを用いて説明する。

まず初めに、正の反応度が加わった場合について述べる。図 B.5.3 に、正の反応度を投入した時の一点炉動特性方程式の解を示す。

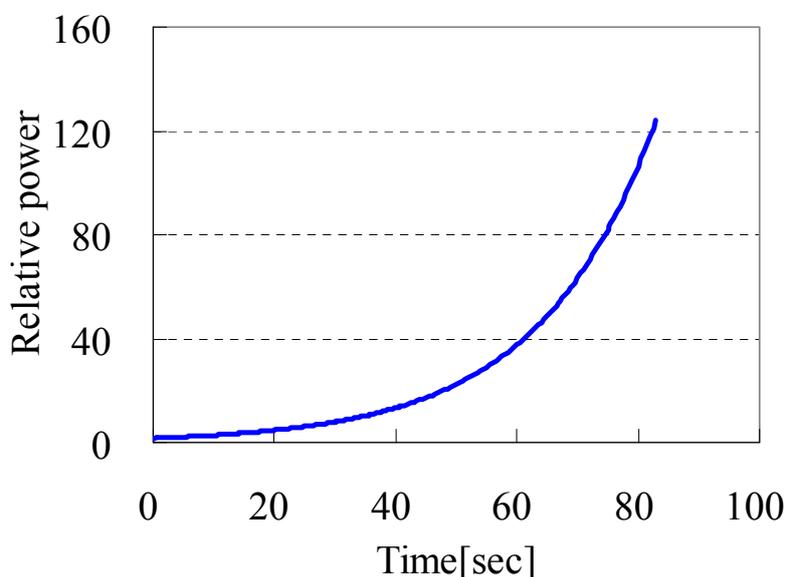


図 B.5.3 正の反応度が加わった場合($\rho = 0.002\Delta k / k$)

第 2 章で行なったように、一点炉動特性方程式の出力変化は指数関数の重ね合わせであるはずである。

しかし、図 B.5.3 より、正の反応度が投入された場合、即発跳躍が終わった後に(かなり見にくいですが)、綺麗な指数関数上に出力が増大していることが分かる。ここで逆時間方程式から分かるように、反応度が正ならば、 w_1 は正であるが、 w_2 は負である。そのため時間が経つにつれて、 $\exp(w_2)$ の寄与が急激にゼロになり、出力は $\exp(w_1)$ で変化することが分かる。そのため、反応度が正の場合では、時間が経つと炉心出力は指数関数の重ね合わせではなく、単項の指数関数で表現できることが分かる。

次に、非常に大きな負の反応度が加わった炉心出力の変化を、図 B.5.4 に示す。

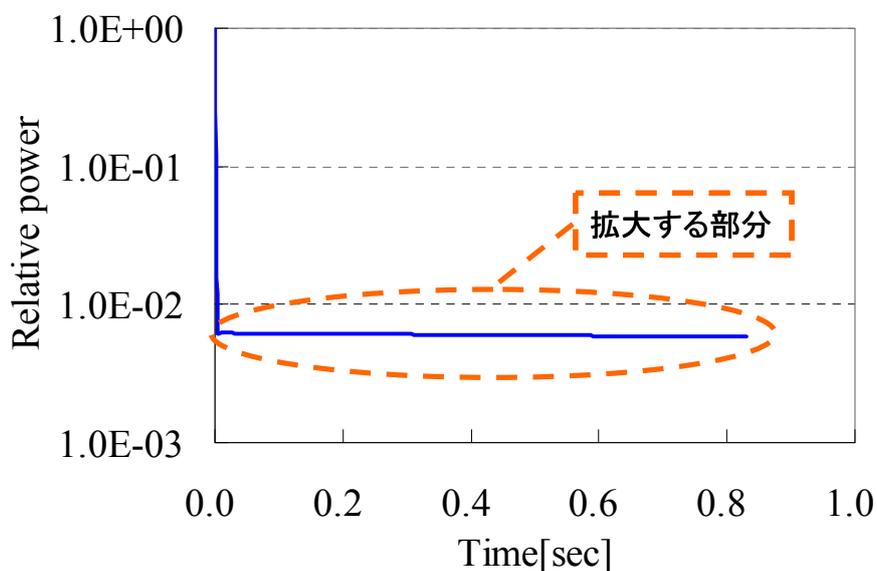


図 B.5.4 非常に大きな負の反応度が投入された場合($\rho = -0.8\Delta k/k$)

図 B.5.4 より、非常に大きな負の反応度が投入された場合、負の即発跳躍が起きた後に、非常にゆるやかに変化していることが分かる。ここで、図 B.5.4 の緩やかに出力が減少している箇所を拡大したのを図 B.5.5 に示す。

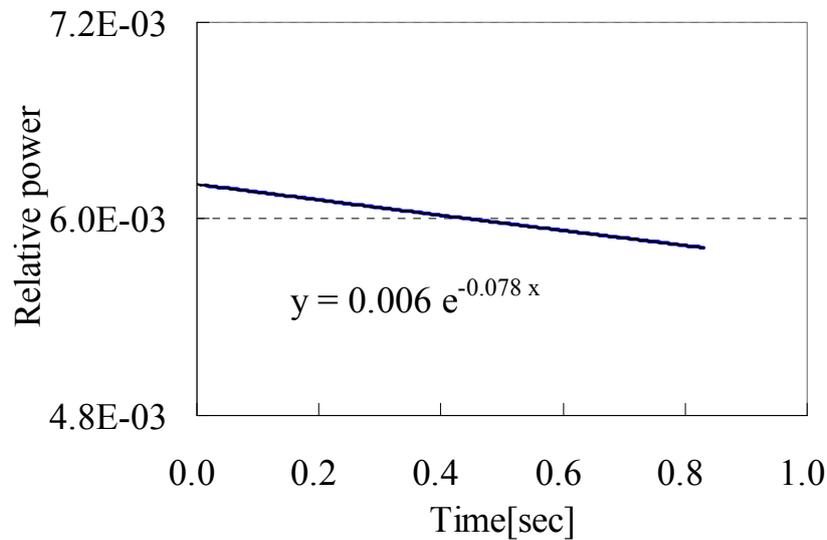


図 B.5.5 緩やかに減少している箇所を拡大したもの

図 B.5.5 より、非常に大きな負の反応度を加えた場合、 $\exp(-\lambda t)$ の割合で減少していることが分かる。ここで、非常に大きな負の反応度が加わった場合、ペリオドの逆数は $-1/l_{eff}$ 及び $-\lambda$ に漸近することが逆時間方程式から分かる。このことから、時間が経つと $\exp(-1/l_{eff})$ の項が急激に減衰し、出力は $\exp(-\lambda t)$ で変化することが分かる。そのため、どんな大きな負の反応度を加えても、直ぐに出力がゼロになるわけではなく、 $\exp(-\lambda t)$ で出力が非常にゆっくり減衰していくことが、図 B.5.2 の逆時間方程式から分かる。

B.5 本章のまとめ

一点炉動特性方程式は、かなり大きな近似を用いているものの、炉心の挙動を簡易的に理解するためには、非常に優れた方程式である。そこで本章では、初等動特性理論として、一点炉動特性の導出、一点炉動特性方程式の解析解、即発跳躍近似及び逆時間方程式の導出を行なった。

B.6 参考文献

2. Y. Ishii, A. Fushimi, S. Arita, *et al.*, “Plant Simulation System for Developing ABWR Automatic Power Regulator System,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **46**, 41-48 (2009).
3. 小林啓祐, 原子炉物理, コロナ社, (1996).

4. 島津洋一郎, “原子炉動特性方程式・その特徴と数値解析”, 第 37 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, p.61, (2005).
5. 相沢乙彦 他, 大学院実験テキスト, 京都大学原子炉研究所, (2003).
6. ジェームズ J. ドウデルスタット, ルイス J. ハミルトン 著, 成田正邦, 藤田文行 共訳, 原子炉の理論と解析(上), 現代工学社, (1981).
7. ラマーシュ 著, 武田充司, 仁科浩二郎 共訳 原子炉の初等理論(下), 吉岡書店, (1976).
8. ジョン・R・ラマーシュ, アンソニ・J・バラッタ 著, 澤田哲生 訳, 原子核工学入門(上), ピアソン・エデュケーション, (2003).

Appendix C 動特性方程式における係数行列のスペクトル半径

C.1 本章の概要

本章では、6章の Krylov 部分空間法の検証計算では、オリジナルの体系と計算結果が等しくなるように境界条件を考慮して体系を展開すると、スペクトル半径はオリジナルと等しい性質を用いた。そこで本章では、計算結果が等価になるように境界条件を展開するならば、スペクトル半径が等しいことの証明を行う。次節では、動特性方程式における係数行列のスペクトル半径について導出及び検討を行う。

C.2 スペクトル半径の導出

スペクトル半径を導出するにあたり、均質平板体系でエネルギー1群の動特性方程式について考える。動特性方程式に用いる行列 \mathbf{A} のスペクトル半径は、行列の絶対値最大の固有値で定義される。そのため、行列 \mathbf{A} に対する固有値方程式は次式になる。

$$\mathbf{A}\phi(x) = v \left(D \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} - \Sigma_a \phi(x) + v \Sigma_f \phi(x) \right) = \lambda \phi(x) \quad (\text{C.2.1})$$

ここで、

λ : 動特性行列の固有値

である。

また、(C.2.1)式は次式の境界条件を満たすとする。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \phi(L) = 0, 0 \leq x \leq L \right) \quad (\text{C.2.2})$$

(C.2.1)式を有限差分式で近似すると、次式を得る。

$$v \left(D \frac{\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}}{h^2} - \Sigma_a \phi_j + v \Sigma_f \phi_j \right) = \lambda \phi_j \quad (\text{C.2.3})$$

ここで、

h : メッシュ幅 $h = L/N$

N : メッシュ数の合計

j : メッシュ境界で定義されるメッシュのインデックス ($0 \leq j \leq N$)

である。

$N \geq 3$ の時、(C.2.3)式を各メッシュについて考えると次式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \frac{\phi_{j-2} - 2\phi_{j-1} + \phi_j}{h^2} = \tilde{\lambda}\phi_{j-1} \\ \frac{\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}}{h^2} = \tilde{\lambda}\phi_j \\ \frac{\phi_j - 2\phi_{j+1} + \phi_{j+2}}{h^2} = \tilde{\lambda}\phi_{j+1} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (\text{C.2.4})$$

ここで、

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda + v(\Sigma_a - \nu\Sigma_f)}{vD} \quad (\text{C.2.5})$$

である。

(C.2.4)式より、 ϕ_{j-1} 、 ϕ_j 、 ϕ_{j+1} に関する次式の漸化式を得ることができる。

$$\phi_{j-1} - (2 + \tilde{\lambda}h^2)\phi_j + \phi_{j+1} = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

(C.2.6)式の解を次式であるとする。

$$\phi_j = C_1 \exp(ij\theta) + C_2 \exp(-ij\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (\text{C.2.7})$$

(C.2.7)式を(C.2.6)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & (-2 - \tilde{\lambda}h^2 + \exp(i\theta) + \exp(-i\theta))C_1 \exp(ij\theta) \\ & + (-2 - \tilde{\lambda}h^2 + \exp(i\theta) + \exp(-i\theta))C_2 \exp(-ij\theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2.8})$$

$$-(2(1 - \cos\theta) + \tilde{\lambda}h^2)(C_1 \exp(ij\theta) + C_2 \exp(-ij\theta)) = 0 \quad (\text{C.2.9})$$

(C.2.9)式は $m(C_1 \exp(ij\theta) + C_2 \exp(-ij\theta)) = 0$ 又は $(2(1 - \cos\theta) + \tilde{\lambda}h^2) = 0$ のどちらかが成立しなければならない。(C.2.7)式より、 $(C_1 \exp(ij\theta) + C_2 \exp(-ij\theta)) \neq 0$ である。そのため、次式が成立することになる。

$$(2(1 - \cos\theta) + \tilde{\lambda}h^2) = 0 \quad (\text{C.2.10})$$

境界条件を考慮すると、次式の方程式が成り立つ必要がある。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{反射境界条件}) \quad (\text{C.2.11})$$

$$C_1 \exp(iN\theta) + C_2 \exp(-iN\theta) = 0 \quad (\text{ゼロ中性子束境界条件}) \quad (\text{C.2.12})$$

(C.2.11)式を考慮すると、次式が成り立つ。

$$C_1 = C_2 \quad (\text{C.2.13})$$

一方、(C.2.13)式を(C.2.12)式に代入すると、次式を導くことができる。

$$C_1 \exp(iN\theta) + C_1 \exp(-iN\theta) = 0 \quad (\text{C.2.14})$$

$$\exp(2iN\theta) = -1 \quad (\text{C.2.15})$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2N} \quad (\text{C.2.16})$$

最終的に、(C.2.16)式を(C.2.10)式に代入することで、次式の固有値の式を得ることができる。

$$\tilde{\lambda} = \frac{2}{h^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2N} - 1 \right) \quad (\text{C.2.17})$$

$$\lambda = \frac{2vD}{h^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2N} - 1 \right) - v(\Sigma_a - v\Sigma_f) \quad (\text{C.2.18})$$

スペクトル半径は、絶対値最大の固有値であるので、次式になる。

$$\rho = \max_n \left| \frac{2vD}{h^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2N} - 1 \right) - v(\Sigma_a - v\Sigma_f) \right| \quad (\text{C.2.19})$$

(C.2.19)式より、反射境界条件とゼロ中性子束境界条件を有するスペクトル半径を導出できた。

先の計算条件と同様に、次に両端ともゼロ中性子束境界条件である次式について考える。

$$v \left(D \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} - \Sigma_a \phi(x) + v\Sigma_f \phi(x) \right) = \lambda \phi(x) \quad (\text{C.2.20})$$

ここで、(C.2.20)式は次式を満たす。

$$(\phi(0) = 0, \phi(L') = 0, 0 \leq x \leq L') \quad (\text{C.2.21})$$

(C.2.20)式に先と同様の手順を行うことで、最終的に次式のスペクトル半径の式を得ることができる。

$$\rho = \max_n \left| \frac{2vD}{h^2} \left(\cos \frac{n\pi}{N'} - 1 \right) - v(\Sigma_a - v\Sigma_f) \right| \quad (\text{C.2.22})$$

ここで、メッシュ幅 h は(C.2.19)式であるとする、 $L/N = L'/N'$ となる。
(C.2.19)式と(C.2.22)式が等しくなるのは、 $N'=2N$ の時である。これは、境界条件を考慮して展開した時と一致する。そのため、境界条件を計算体系が一致するように考慮して展開すると、スペクトル半径は変化しないことになる。

C.3 本章のまとめ

本章ではスペクトル半径の導出を行い、計算体系が一致するように境界条件を展開しても、スペクトル半径は変わらないことを示した。

C.4 参考文献

- 1) W. Hackbusch, *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Large Sparse Systems of Equations*, Springer-Verlag, New York, (1994).

Appendix D その他のKrylov部分空間法の検討

D.1 本章の概要

本研究では、本文6章のKrylov部分空間法の検証計算において言及しなかったが、6章に記載した以外のことについても、様々な検討を行なった。そこで本章では、本文中で言及した以外のKrylov部分空間法の検討について述べる。

D.2 スペクトル半径の縮小のための工夫

本文(6.2.1.2)式において、Krylov部分空間法はスペクトル半径に比例して、多くの部分空間数が必要になることを示した。このことから、スペクトル半径を小さくすることによって、Krylov部分空間法の計算効率を向上できる可能性がある。そこで本節では、スペクトル半径の縮小させるための工夫についての検討を行う。

空間に関して離散化した動特性方程式は、以下のように行列とベクトルからなる常微分方程式に帰着できる。

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{\psi}(t) \quad (\text{D.2.1})$$

ここで、

$\vec{\psi}$: 中性子束と遅発先行核密度からなるベクトル

\mathbf{A} : 動特性方程式の係数行列

である。

(D.2.1)式にKrylov部分空間法を適用する際に問題となるのが、係数行列 \mathbf{A} のスペクトル半径の大きさである。動特性方程式は中性子速度が非常に大きいために、係数行列 \mathbf{A} のスペクトル半径が大きい。このため、Krylov部分空間法の部分空間を大きくしなければ精度よく計算を行うことができない。そのため、参考文献1)のように、Krylov部分空間法を燃焼方程式に適用したような、劇的な計算効率の向上は困難である可能性がある。そこで、動特性方程式でもKrylov部分空間法の利点を活かすために、動特性方程式における行列のスペクトル半径を小さくする必要がある。そのため本研究では、次式のように対角成分を小さくすることで、行列 \mathbf{A} のスペクトル半径を小さくする方法を提案する。

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = (\sigma\mathbf{I} - \sigma\mathbf{I} + \mathbf{A})\vec{\psi}(t) \quad (\text{D.2.2})$$

ここで、

\mathbf{I} : 単位行列

σ : シフト幅(スカラー量)

である。

(D.2.2)式の解析解を計算すると次式になる。

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp[\Delta t(\sigma \mathbf{I} - \sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})] \vec{\psi}(t) \quad (\text{D.2.3})$$

$$= \exp(\Delta t \sigma \mathbf{I}) \exp[\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})] \vec{\psi}(t) \quad (\text{D.2.4})$$

ここで、(D.2.3)式から(D.2.4)式の変形を行うためには $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ を満たす行列ではなければならない。しかし、 $\mathbf{A} = \Delta t \sigma \mathbf{I}$ 、 $\mathbf{B} = \Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})$ と置換することで、 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ が成り立つ事が確認できるので、(D.2.3)式から(D.2.4)式の変形を行うことが出来ることが分かる。

(D.2.4)式には指数行列が二つ含まれており、計算コストが増大することが考えられる。しかし、(D.2.4)式の後ろの部分 $\exp[\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})] \vec{\psi}(t)$ を Krylov 部分空間法で計算した解を $\vec{\psi}'(t)$ とすると、(D.2.4)式は次式に置き換えることができる。

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp(\Delta t \sigma) \vec{\psi}'(t) \quad (\text{D.2.5})$$

(D.2.4)式は二つの指数行列を有しているが、上式より、Krylov 部分空間法で解ベクトル $\vec{\psi}'(t)$ を計算したあとに、 $\vec{\psi}'(t)$ の各要素を $\exp(\Delta t \sigma)$ 倍すれば $\vec{\psi}(t + \Delta t)$ が求まることが分かる。そのため、従来法に比べても演算量をあまり増大させずに(D.2.4)式を計算できることになる。

次に(D.2.1)式及び(D.2.4)式の Krylov 部分空間法で計算する $\exp(\Delta t \mathbf{A})$ 及び $\exp[\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})]$ に注目する。Krylov 部分空間法では、スペクトル半径が減少するに伴い部分空間数を小さくすることができる。そのため、 $\Delta t \mathbf{A}$ より $\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})$ のスペクトル半径が小さければ、(D.2.1)式よりも(D.2.4)式を Krylov 部分空間法で計算する優位性がある。そこで、元の行列 $\Delta t \mathbf{A}$ を Original、 $\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})$ を Improve として Mathematica で固有値計算した結果を以下に示す。なお、この時の計算の条件として、 $\sigma = -200000$ 、 $\Delta t = 1$ とした。

```

In[18]= Eigenvalues [Original]
Out[18]= (-547829., -512416., -510298., -474339., -451423., -450575., -414135., -413942.,
-391348., -390721., -354918., -354070., -354024., -353982., -353506., -317796.,
-316249., -294881., -294133., -258929., -256639., -235538., -200635., -199169.,
-165368., -21804.7, -19680.3, -18524.2, -16487.2, -16110.2, -13732.1, -11251.1,
-10352.8, -9889.46, -9425.84, -8981.57, -8689.32, -8302.67, -8246.23, -7962.49,
-7757.28, -7463.2, -7235.64, -6709.17, -6303.43, -5704.77, -5123.14, -3435.22,
-3369.98, -57.7425, 0.182349, -0.0798097, -0.0797884, -0.0797723, -0.0797379,
-0.0797289, -0.079708, -0.0796811, -0.0796648, -0.0796483, -0.0796197, -0.0795957,
-0.0795676, -0.079558, -0.0795392, -0.0794607, -0.0794176, -0.0793401, -0.0793247,
-0.0792405, -0.0790835, -0.0789149, -0.078785, -0.0778543, -0.0772337)

In[19]= Eigenvalues [Improve]
Out[19]= (-347829., -312416., -310298., -274339., -251423., -250575., -214135., -213942.,
200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000.,
200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000.,
200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 200000., 199942., 196630.,
196565., 194877., 194295., 193697., 193291., 192764., 192537., 192243.,
192038., 191754., 191697., -191348., 191311., 191018., -190721., 190574.,
190111., 189647., 188749., 186268., 183890., 183513., 181476., 180320.,
178195., -154918., -154070., -154024., -153982., -153506., -117796., -116249.,
-94881.3, -94132.7, -58929.1, -56639.4, -35537.6, 34632.3, 830.837, -635.099)

```

図 D.2.1 $\Delta t \mathbf{A}$ 及び $\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})$ の固有値

図 D.2.1 より、元の行列 $\Delta t \mathbf{A}$ よりも $\Delta t(-\sigma \mathbf{I} + \mathbf{A})$ の方が、絶対値最大の固有値が小さくなっていることが確認できる。このことより、式変形を行なったことでスペクトル半径を小さくできたことになるので、従来の Krylov 部分空間法よりも高速に計算できる可能性がある。検証計算を行なった結果、以下に示すように、従来法の Krylov 部分空間法と計算結果が一致することを確認した。なお計算条件として、 $\Delta t \sigma = -588$ 、部分空間数 240、タイムステップ幅 $\Delta t = 0.01 \text{sec}$ とした。

表 D.2.1 従来法と改良法の結果の比較
(TWIGL ベンチマーク問題：ステップ状)

	Original	Improve
Time[s]	Relative power	
0.1	2.062	2.062
0.2	2.079	2.079
0.3	2.096	2.096
0.4	2.114	2.114
0.5	2.132	2.132

しかし、計算結果が多々発散することも確認した。以下に、計算結果が発散した原因について記述する。

(D.2.4)式で計算を行う方法は、 σ を調整することで係数行列 \mathbf{A} の対角成分を小さく

する方法である。ここで、問題となるのが σ の値である。 σ の値が大きくなると、Krylov 部分空間法で計算した後に補正する量 $\exp(\Delta t \sigma)$ の値が急激に変化する。例えば、 $\Delta t \sigma = -588$ を用いたとすると、Krylov 部分空間法の計算結果を補正する値は $\exp(\Delta t \sigma) \approx 6.0 \times 10^{-256}$ となり、限りなくゼロに近い値になる。つまり、補正する前の $\tilde{\psi}'(t)$ は限りなく大きな値ということになる。このことより、補正する前の $\tilde{\psi}'(t)$ を精度よく求めないと適切な計算が行えない。そのため、結果として、従来法よりも多くの部分空間数が必要になる場合が多々あり、従来法よりも計算効率を向上させることができなかった。

D.3 部分空間へ変換のための数値誤差

行列を Krylov 部分空間への正規直交基底に変換するために、本研究では Arnoldi 法を用いている。数学上 Arnoldi 法を用いれば正規直交変換を行えるが、数値誤差のために実際は、完全な正規直交変換を行えていない。このことより、部分空間数を増加させても最終的な計算精度が低下することが報告されている²⁾。そこで本研究でも、直交性の崩れと計算精度の関係を確認するために、数値実験を行った。直交性の崩れを定量的に評価するために、次式を用いた。

$$orth = \|\mathbf{I} - \mathbf{V}_m^T \mathbf{V}_m\|_2 \quad (D.3.1)$$

(D.3.1)式を用いて、部分空間数と直交性の崩れの相関関係を以下に示す。

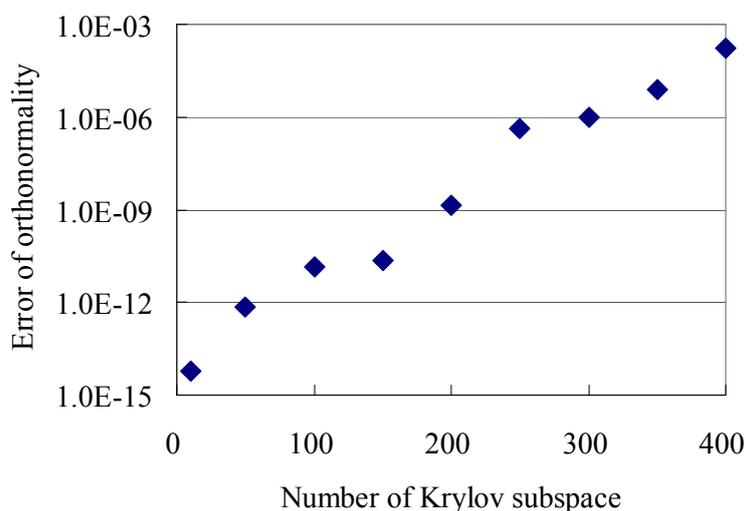


図 D.3.1 部分空間数増加に伴う直交性の崩れ

図 D.3.1 より、部分空間数が増加するに伴い、直交性の崩れが大きくなっていることが分かる。この直交性の崩れは、Arnoldi 法における Modified Gram-Schmidt 法を 2 回行う

ことで改善することが可能である²⁾。そこで、Modified Gram-Schmidt 法を 2 回行った結果を図 D.3.2 に示す。

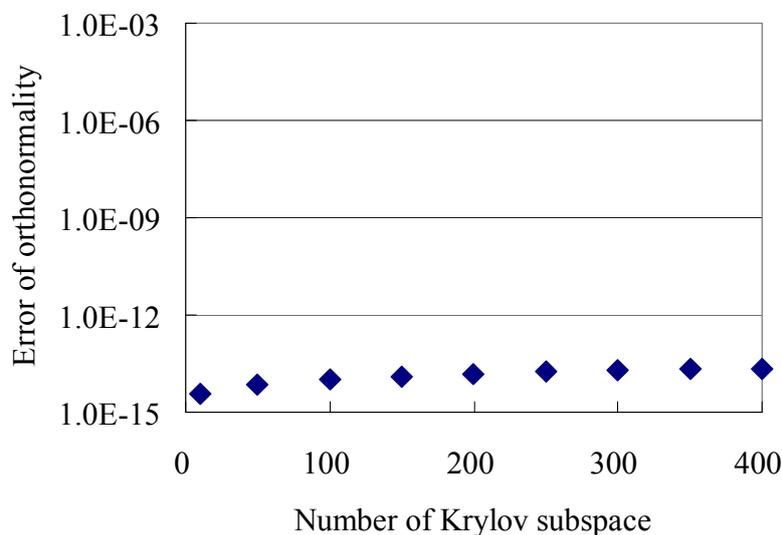


図 D.3.2 Modified Gram-Schmidt 法を 2 回行った結果

図 D.3.2 より、Modified Gram-Schmidt 法を 2 回行うことで、部分空間数増加に伴う直交性の崩れを改善することを確認した。しかし、Modified Gram-Schmidt 法を 2 回行う方法は計算コストが倍増することや、本文中の図 6.2.1.15 に示すように部分空間数を増加させても計算精度の低下は確認できなかったことから、本研究で対象としている動特性方程式に対しては、本問題はあまり影響ないと判断できる。

D.4 ランプ状における断面積の取扱い

本節では、Krylov 部分空間法で問題となった、ランプ状における断面積の取り扱い方法についての検討を行う。本研究では、Krylov 部分空間法で動特性方程式を計算するために、断面積の時間依存性を非常に簡易的にしか扱えない。そのため本文中では、タイムステップの平均の断面積をランプ状の計算で用いていた。しかし、タイムステップの平均の断面積を用いた場合でも、十分に断面積の時間依存性を考慮できていないために、タイムステップ幅を十分に小さくしなければならず、Krylov 部分空間法の有用性を確認できなかった。そこで本節では、ランプ状における断面積の取り扱い方法の高度化を試みる。

燃焼計算では炉心出力の時間依存性を考慮するために、Predictor-corrector 法(PC 法)が一般的に用いられており、計算精度が大きく向上している。そこで、Krylov 部分空間

法のランプ状の断面積の時間依存性を考慮するために、PC法を適用することを試みた。タイムステップの平均の断面積を用いた方法を従来法として、PC法との比較を行った結果を以下に示す。

表 D.4.1 従来法と PC 法の比較

Time[s]	Refrence	Conventional		PC method	
	Relative power	Relative power	diff.[%]	Relative power	diff.[%]
0.1	1.308	1.303	0.42	1.303	0.40
0.2	1.959	1.951	0.45	1.951	0.42
0.3	2.076	2.076	0.00	2.076	0.00
0.4	2.093	2.093	0.00	2.093	0.00
0.5	2.111	2.111	0.00	2.111	0.00
Average diff.[%]		0.17		0.16	
Relative CPU time[s]		1.0		2.1	

表 D.4.1 より、PC法を用いることで従来法よりも計算精度が向上しているが、僅かである。また、PC法を用いることで計算時間が従来法の2倍になっており、計算精度の向上よりも計算時間の増加による影響が大きく、計算効率が却って低下してしまった。次に、用いる断面積をタイムステップ内の平均から変更した時の感度解析について検討した結果について述べる。

現在はランプ状の計算において、タイムステップ内の平均の断面積を用いている。しかし、中性子束の時間変化は一点炉動特性方程式より、指数関数状に変化しているために、タイムステップ内の平均の断面積を用いる方法は不適切である可能性がある。そこで、用いる断面積 $\tilde{\Sigma}$ をタイムステップの平均の値以外を用いた時の感度解析を行なった。

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma(t + \tau \times \Delta t) \quad (0 < \tau \leq 1) \quad (\text{D.4.1})$$

平均相対差異を0.1、0.2、0.3、0.4、0.5secでの出力の差異を平均したものとした時、(D.4.1)の τ を変更した時の平均相対差異の計算精度の感度解析を以下に示す。

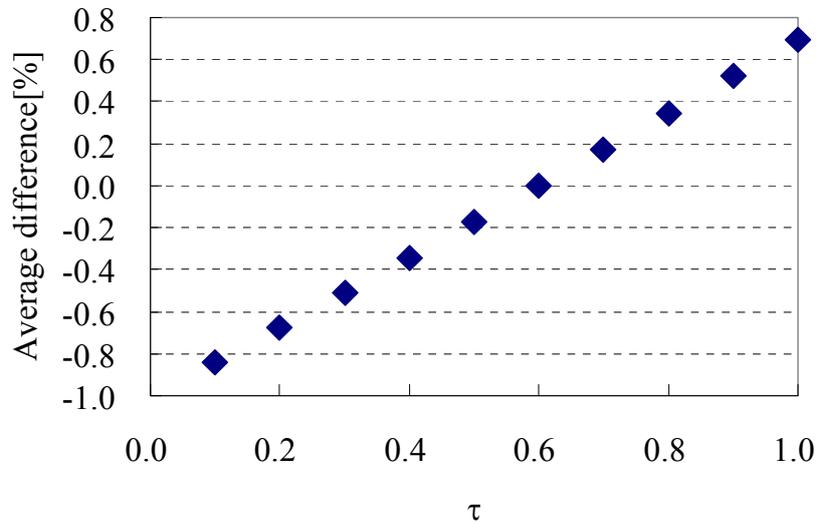


図 D.4.1 用いる断面積を変化させた時の計算精度

図 D.4.1 より、従来から用いている $\Sigma(t+0.5\Delta t)$ よりも、 $\Sigma(t+0.6\Delta t)$ を用いる方がラン
プ状の計算精度が良いことが分かる。代表値が 0.5 よりも 0.6 の方が、計算精度が優れ
ている理由として、中性子束の時間変化が指数関数状に変化していることが原因である
と考えられる。もし仮に中性子束の時間変化が線形であるならば、代表値は 0.5 である
が、実際は指数関数状に変化しているため、0.5 からずれる可能性がある。そこで、参
考文献 3) を基にして、本研究では逐次用いる断面積を変化させることで計算精度を向上
させる方法を提案する。以下では、中性子束が(D.4.2)式のように変化すると仮定したと
きについて考える。

$$\frac{d\phi_m}{dt} = w\phi_m + S \quad (D.4.2)$$

ここで、

w : 周波数

S : 中性子源

である。

(D.4.2)式の解析解である(D.4.3)式及び、(D.4.2)式を差分化した(D.4.4)式を用いることで、 ϕ_m は(D.4.5)式で表すことができる。

$$\phi(t) = \phi(0)\exp(wt) + \frac{S}{w}(\exp(wt) - 1) \quad (D.4.3)$$

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta t} = w\phi_m + S \quad (D.4.4)$$

$$\phi_m = \left(-\frac{1}{w} + \frac{e^w}{e^w - 1} \right) \phi_i + \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{e^w - 1} \right) \phi_{i+1} \quad (\text{D.4.5})$$

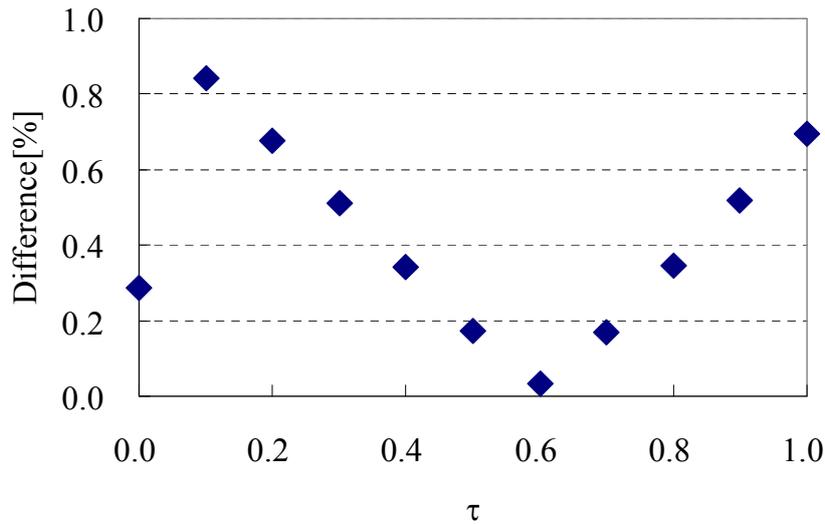
参考文献3)によれば、タイムステップ内の代表値は(D.4.5)式と恒等式になる次式である。

$$\phi_m = \tau \phi_i + (1 - \tau) \phi_{i+1} \quad (\text{D.4.6})$$

(D.4.6)式より、(D.4.2)式の代表値 τ は次式になる。

$$\tau = \frac{e^w}{e^w - 1} - \frac{1}{w} \quad (\text{D.4.7})$$

タイムステップ内の用いる断面積の時間を(D.4.7)式を用いて逐次自動変更した、Krylov部分空間法の計算結果を図D.4.2の $\tau = 0.0$ に示す。なお、図D.4.2では計算差異の打ち消しによる見かけ上の計算精度向上を回避するために、差異の絶対値を用いて図D.4.1の結果も記載している。また、用いる周波数 w は前ステップの体系全体の平均値を用いた。



図D.4.2 代表値を逐次計算した時の計算結果

図D.4.2の $\tau = 0.0$ は、(D.4.7)式を用いて逐次代表値を計算した時の計算結果であるが、従来の $\tau = 0.5$ で固定した時よりも計算結果が悪化してしまっている。この精度悪化の原因を調べるために、周波数及び代表値の時間依存性を図D.4.3に示す。

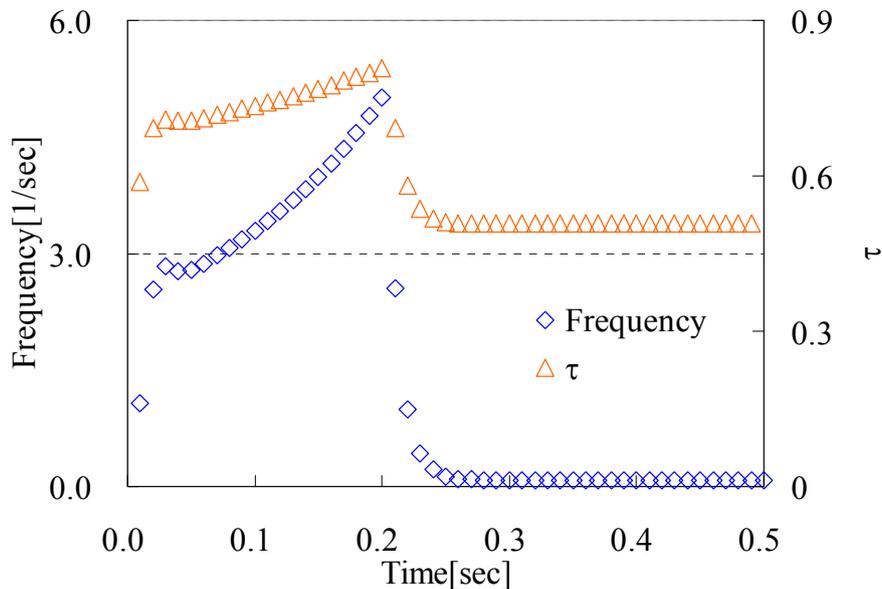


図 D.4.3 周波数及び代表値の時間依存性

図 D.4.3 より、断面積が変化している $t < 0.2 \text{sec}$ の時は、代表値が逐次変化していることが分かるが、先の感度解析で優れていた 0.6 を代表値が超えてしまっている。このように代表値を適切に決定できなかった理由としては、遅発中性子先行核密度を考慮していないこと、前ステップの周波数を用いていること、周波数の領域依存性を考慮していないことが考えられる。しかし、これら全てを考慮するためには、計算式が複雑になることや計算コストが増加する可能性があるため、本研究ではこれ以上の検討を行わなかった。

D.5 本章のまとめ

本章では、本文中で言及しなかった Krylov 部分空間法の検討として、スペクトル半径の縮小のための工夫、部分空間変換の数値誤差、ランプ状における断面積の取扱いについて言及した。

D.6 参考文献

- 1) A. Yamamoto, M. Tatsumi, N. Sugimura, “Numerical Solution of Stiff Burnup Equation with Short Half Lived Nuclides by the Krylov Subspace Method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[2], 147-154 (2007).
- 2) S. Noritake, A. Imakura, Y. Yamamoto, et al., “A Large-Grained Parallel Solver for Linear Simultaneous Ordinary Differential Equations based on Matrix Exponential and its

Evaluation,” *Transac. of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **19**[3], 293-312 (2009). [in Japanese]

- 3) R. J. J. Stammler, M. J. Abbate, *Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design*, Academic Press, London, (1983).

公刊論文リスト

1. 伴雄一郎, 山本章夫, 山根義宏, “空間依存動特性方程式への Krylov 部分空間法の適用”, 日本原子力学会 秋の大会, 東北大学, 9月16日-18日, 2009, (2009).
2. Y. Ban, A. Yamamoto, Y. Yamane, T. Endo, “Numerical Solution of Reactor Kinetics Equation with Krylov Subspace Method for Matrix Exponential,” *Proc. PHYSOR2010*, Pittsburgh, Pennsylvania, May. 9-14, 2010, (2010).
3. 伴雄一郎, 遠藤知弘, 山本章夫, “空間依存動特性方程式における周波数関数近似法の開発”, 日本原子力学会 秋の大会, 北海道大学, 9月15日-17日, 2010, (2010).
4. Y. Ban, T. Endo, A. Yamamoto, Y. Yamane, “Explicit Time Integration Scheme using Krylov Subspace Method for Reactor Kinetics Equation,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **48**[2], 243-255 (2011).
5. 伴雄一郎, 遠藤知弘, 山本章夫, “空間依存動特性方程式における Multigrid Amplitude Function method の開発 (1)計算理論”, 日本原子力学会 春の年会, 福井大学, 3月28日-30日, 2011, (2011). (to be presented)
6. 伴雄一郎, 遠藤知弘, 山本章夫, “空間依存動特性方程式における Multigrid Amplitude Function method の開発 (2)検証計算”, 日本原子力学会 春の年会, 福井大学, 3月28日-30日, 2011, (2011). (to be presented)
7. T. Endo, Y. Ban, A. Yamamoto, “A Unified Numerical Algorithm for Space-dependent Kinetic Equation,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, Hollywood, Florida, June. 26-30, 2011, (2011). (submitted)