

修士論文

ブートストラップ法を用いた
推定臨界下限増倍率評価法の開発及び適用

名古屋大学大学院

工学研究科博士前期課程

総合エネルギー工学専攻

山本研究室

林卓人

令和3年2月

目次

第1章	序論	1
1.1	背景	1
1.1.1	実効増倍率の未臨界判断基準	1
1.1.2	従来の推定臨界下限増倍率評価法の課題	1
1.1.3	卒業研究で開発した推定臨界下限増倍率評価法の課題	2
1.2	本研究の目的	2
1.3	本論文の構成	3
第2章	ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法	5
2.1	本章の概要	5
2.2	提案手法の基本的な考え方	5
2.3	提案手法で考慮する要素	7
2.3.1	臨界実験の核的な類似性	7
2.3.2	実効増倍率の不確かさ	8
2.4	ブートストラップ法	10
2.5	提案手法による推定臨界下限増倍率の計算手順	11
2.6	本章のまとめ	12
第3章	仮想数値実験による提案手法の検証	14
3.1	本章の概要	14
3.2	計算コードの作成	14
3.3	正規分布に対する検証	18
3.3.1	計算条件	18
3.3.2	結果	18
3.3.3	考察	20
3.4	歪度及び尖度がある分布に対する検証	23
3.4.1	計算条件	23
3.4.2	結果	25
3.4.3	考察	28
3.5	Gaussian Mixture Model の検証	30
3.5.1	計算条件	30
3.5.2	結果	32
3.5.3	考察	36
3.6	本章のまとめ	37
第4章	KUCA 実験による提案手法の妥当性確認	39
4.1	本章の概要	39
4.2	KUCA 実験における実験条件	39
4.3	KUCA 実験解析の計算条件	40
4.4	結果	42
4.5	考察	46

4.5.1	考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響	46
4.5.2	未臨界判定に対する推定臨界下限増倍率の有効性	48
4.5.3	KUCA における実効増倍率のバイアス	49
4.6	本章のまとめ	49
第 5 章	燃料デブリ模擬体系に対する提案手法の適用	52
5.1	本章の概要	52
5.2	燃料デブリの臨界性に関する文献調査	52
5.3	燃料デブリ模擬体系の計算条件	53
5.4	結果	57
5.5	考察	62
5.5.1	減速材及び減速材対燃料体積比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化	62
5.5.2	減速材の変化による代表性因子の変化	64
5.5.3	Upper Subcritical Limit (USL) との比較	66
5.6	本章のまとめ	71
第 6 章	結論	74
6.1	まとめ	74
6.2	今後の課題	76
	参考文献	78
Appendix. A	従来の推定臨界下限増倍率評価法	81
A.1	従来法の基本的な考え方	81
A.2	従来法による推定臨界下限増倍率の計算手順	83
Appendix. B	データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ	84
B.1	データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ評価方法	84
B.2	SDF 形式ファイルの作成方法	85
Appendix. C	Upper Subcritical Limit (USL) 評価法	88
C.1	極値理論に基づく USL 評価法	88
C.2	極値分布に基づく CM の計算手順	89
Appendix. D	提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コード	91
	公刊論文	94

第1章 序論

1.1 背景

1.1.1 実効増倍率の未臨界判断基準

核燃料物質の取扱いは原子炉を除く加工、運搬、貯蔵、その他いかなる取扱状態においても臨界に達するおそれがないように行うことが要求されている[1]。この要求に基づいて、核燃料物質を収納する機器の形状寸法の管理、核燃料物質の濃度、質量の管理や中性子吸収材の形状寸法、濃度の管理などによって臨界を防止するための措置が取られる。これらの機器や物質をモデル化した核特性の解析を実施することで、臨界安全設計は行われる。

核特性値の一つである実効増倍率は臨界安全設計を行う上で重要な指標である。実効増倍率とは、中性子の漏れのある有限な体系において単位時間当たりに消滅する中性子数に対して核分裂反応で生成される中性子数の比を意味する。外部中性子源が一切ない体系において実効増倍率が1であれば、中性子数は時間的に変化しないため核分裂連鎖反応が一定水準で持続する。一方で、実効増倍率が1を下回ると中性子数は時間とともに減少するため臨界にはならない。

実効増倍率を求める方法として、方程式を差分化するなどして数値的に解く決定論的な方法と中性子輸送を仮想的にシミュレーションして統計的に評価する確率論的方法（モンテカルロ法）がよく用いられる。実効増倍率の予測結果は、解析手法に起因する誤差や計算の入力となる幾何形状や組成、核データに起因する誤差などにより不確かさを持つ。また、モンテカルロ法を用いて実効増倍率を計算する場合は統計誤差を持つ。そこで、これらの不確かさや計算条件の保守性を考慮して、未臨界と判断する基準を設定し、実効増倍率の予測結果が基準以下であるとき、体系内は未臨界状態であると判断される[2]。未臨界判断基準の例として、推定臨界下限増倍率[2]-[4]や米国で用いられる Upper subcritical limit[5]などがある。

推定臨界下限増倍率では、以下のような手順に基づいて未臨界判断基準を評価する。まず、実効増倍率の計算に使用する解析コードと核データライブラリに起因する計算誤差は、設計する体系ごとに信頼性の高い類似体系の臨界実験に対する計算結果を利用して推定される。ここで、類似体系とは、核燃料物質の種類や減速材、反射条件が同じ、あるいは近いもので、結果として設計する体系と計算誤差が同じように現れる体系であり、使用する解析コード及び核データライブラリに依存する。推定した計算誤差を考慮して、未臨界と判断できる実効増倍率の上限値である推定臨界下限増倍率を求める。そして、推定臨界下限増倍率を求めた時に用いた臨界実験体系と評価体系との違いを考慮して、任意に定める安全裕度をさらに盛り込んで未臨界判断基準は設定される。

1.1.2 従来の推定臨界下限増倍率評価法の課題

推定臨界下限増倍率を求める方法として、従来、実験体系を解析して得られる実効増倍率の頻度分布を正規分布と仮定して統計的に評価する方法[4]が用いられている。この方法では、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を正規分布と仮定し、用いる臨界実験の数に応じて定める安全裕度を推定する。そして、実効増倍率の不偏標準偏差に安全裕度をかけた値を標本平均から引くことにより推定臨界下限増倍率は評価される。

従来法を用いる場合、実効増倍率の頻度分布を正規分布と近似することが可能かどうか調べるために、まずは実効増倍率の頻度分布が正規分布に従うか検定を行った上で推定臨界下限増倍率の評価を行う必要がある。もし、検定の結果から正規分布に従うとは言えない場合、正規分布の仮定を用いずに推定臨界下限増倍率を評価する必要がある。以上で述べた理由により、任意の実効増倍率

の頻度分布に対して適用可能な推定臨界下限増倍率評価法の開発が望まれている。

1.1.3 卒業研究で開発した推定臨界下限増倍率評価法の課題

卒業研究では、任意の実効増倍率の頻度分布に対して推定臨界下限増倍率を評価するために、「Bootstrap法を用いた推定臨界下限増倍率の算出方法」を提案した。この方法では、対象体系とよく似た過去の臨界実験体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を経験分布とみなし、この経験分布に基づいて無作為に復元抽出を行うことで、仮想的な実効増倍率のリサンプルを多数生成する。そして、得られたリサンプルの標本平均と不偏標準偏差を用いて、設定した安全裕度に基づく推定臨界下限増倍率の不確かさ分布から推定臨界下限増倍率を評価する。

実効増倍率の予測結果が対象体系と用いた臨界実験の間で強く相関していれば、対象体系の実効増倍率は、用いた臨界実験の実効増倍率の頻度分布に属するサンプルとみなすことができる。このため、推定臨界下限増倍率の評価に用いる臨界実験は、単純に過去の臨界実験データベースの中から無作為に選出した実験体系を用いるのではなく、対象体系とより実効増倍率の予測結果の相関がある実験体系を選ぶ必要がある。さらに、選出した実験体系についても、すべて同じ重みで考慮するよりも、対象体系とより実効増倍率の予測結果の相関が強い実験体系に重きを置いた形で評価した方が、より尤もらしい未臨界判断基準を推定できると考えられる。しかしながら、卒業研究で開発した評価法では対象体系の類似体系として選出した臨界実験の核的な類似性については十分考慮できていなかった。

また、モンテカルロ法を用いて実効増倍率を求める場合、実効増倍率の予測結果は統計誤差を持つ。また、計算の入力となる幾何形状や組成、核データに起因する誤差を持つ。さらに、評価に用いる臨界実験は組成や製造公差の不確かさ伝播、モデルの簡略化に伴う系統誤差等により実験誤差を持つ。これらの誤差要因により、実効増倍率の頻度分布に属するサンプルごとに不確かさを持つが、卒業研究で開発した評価法では各臨界実験の実効増倍率の不確かさを考慮した手法を開発できていなかった。

1.2 本研究の目的

本研究では、以下に示す3つの目的を設定した。

(1) 臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮した推定臨界下限増倍率評価法の開発

卒業研究で開発した評価法では考慮できていなかった臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮することで、より尤もらしい推定臨界下限増倍率を推定できると考えられる。そこで、卒業研究で開発した評価法の特徴である「任意の実効増倍率の頻度分布に対して適用可能である」点を維持した上で、臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮した推定臨界下限増倍率評価法を開発することを1つ目の目的とする。

(2) 提案手法の検証及び妥当性確認

本研究で提案する手法に基づく計算コードを作成する必要がある。そして、作成した計算コードが意図通りの挙動を示すかどうか、参照解を与えることが可能な仮想数値実験により十分検証(Verification)される必要がある。また、実際の未臨界/臨界体系に対して提案手法を用いて推定臨

界下限増倍率を評価し、評価結果の妥当性について確認 (Validation) する必要がある。そこで、仮想数値実験及び実際の未臨界/臨界体系に対して提案手法を適用し、提案手法の検証及び妥当性確認を行うことを2つ目の目的とする。

(3) 燃料デブリ模擬体系に対する提案手法の適用

燃料デブリを評価対象として、デブリ収納缶などの臨界安全設計をするためには、使用する臨界計算コードと核データライブラリに起因する不確かさを明らかにする必要がある。具体的には、国際臨界安全ベンチマーク評価プロジェクト (ICSBEP) ハンドブック[6]に収録された臨界実験データに基づいて、推定臨界下限増倍率を評価する必要がある。そこで、燃料デブリ模擬体系に対して提案手法を適用し、現時点で推定可能な尤もらしい推定臨界下限増倍率を評価することを3つ目の目的とする。

1.3 本論文の構成

本論文は本章を含め全6章で構成される。各章の概要を以下に示す。

第1章では、背景及び本研究の目的について述べた。従来推定臨界下限増倍率評価法では、実効増倍率の頻度分布を正規分布と仮定しているため、卒業研究では、任意の実効増倍率の頻度分布に対して推定臨界下限増倍率を評価できる方法を開発した。本研究では、3つの目的を設定した。まず、1つ目の目的は、卒業研究で開発した評価法では考慮されていない臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮した新たな推定臨界下限増倍率評価法を開発することである。2つ目の目的は、仮想数値実験及び実際の未臨界/臨界体系に対して開発した評価法を適用し、評価法の検証及び妥当性確認を行うことである。3つ目の目的は、燃料デブリ模擬体系に対して開発した評価法を適用し、現時点で推定可能な尤もらしい推定臨界下限増倍率を評価することである。

第2章では、上述の目的を達成するために提案されたブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法 (提案手法) について、その概要と計算理論について述べる。卒業研究と比べ改良した点として、臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさ考慮についても第2章で説明する。また、卒業研究でも扱ったブートストラップ法も改めて説明する。そして、本研究で提案する手法の計算手順について説明する。

第3章では、仮想数値実験による提案手法の検証計算を行う。まず、本研究のために作成した計算コードについて説明する。作成した計算コードの検証の一つとして、正規分布に従う実効増倍率に対して提案手法を適用する。この検証では、従来正規分布を仮定する方法による推定臨界下限増倍率の評価結果と計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果が一致するかどうか確認することで、作成した計算コードが意図通り実装できているか確認を行うことを目的とする。続いて、歪度及び尖度がある分布に従う実効増倍率に対する検証結果を示す。この検証では、歪度及び尖度による推定臨界下限増倍率に対する影響の大きさを評価することを目的としている。さらに、提案手法で用いる Gaussian Mixture Model の検証として、正規分布の重みや標準偏差を変化させた際の検証結果について示す。この検証では、実験数が無限とみなせるほど多いような場合を想定し、母集団の下側累積確率点と計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果が一致するか確認を行うことで、作成した計算コードが意図通り実装できているか確認を行うことを目的としている。

第4章では、京都大学臨界集合体実験装置 KUCA にて行った臨界近接実験に対して提案手法を適用した結果について述べる。実際の未臨界/臨界体系に対して提案手法を適用することで、卒業研

究で考慮した実際の実効増倍率の頻度分布による影響と比べて、本研究で考慮した核的な類似性及び実効増倍率の不確かさによる影響がどの程度か検討した。また、KUCAにおいて実施した臨界近接実験に対して、提案手法による推定臨界下限増倍率の値を判断基準として、未臨界判定が可能かどうか検討した結果について示す。

第5章では、燃料デブリ模擬体系に対して提案手法を適用し推定臨界下限増倍率を評価した結果について報告する。ここでは、減速材対燃料体積比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化と評価対象とする燃料デブリの組成の違いによる推定臨界下限増倍率の影響を調べることを目的としている。また、極値理論に基づく Upper Subcritical Limit (USL)との比較を実施した結果についても併せて示す。これは、米国において未臨界判断基準の一つとして用いられる USL という別の評価方法で求められた未臨界判定基準との比較を行うことで、提案手法の妥当性について確認することも目的としている。

第6章では、本研究のまとめと今後の課題について述べる。

第2章 ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法

2.1 本章の概要

本章では、「ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法」（以降、提案手法と呼ぶ）を提案し、その計算理論について述べる。提案手法は、卒業研究で開発した評価法を改良したものであり、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の任意の頻度分布形状に対して適用可能であるという特徴を引き継いでいる。

本章の目的は、提案手法について解説することである。修士研究において以下に示す2点について新たに改良した。

- 対象体系の類似体系として選ばれた各臨界実験について、臨界体系に対する実効増倍率予測結果が正規分布にそれぞれ従うとして、混合正規分布（以降、GMM分布と呼ぶ）を用いる。正規分布の標準偏差は、(1) モンテカルロ計算の統計誤差、(2) 臨界実験の実験誤差、(3) データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ、の誤差伝播則に基づいて推定された値を用いる。
- 対象体系と類似体系として選ばれた各臨界実験の核データ起因の相関を、GMM分布を構成する1つ1つの正規分布の重みとして考慮する。

2.2節では、提案手法の基本的な考え方について述べる。2.3節では、提案手法で考慮する要素として、臨界実験の核的な類似性と実効増倍率の不確かさについて述べる。2.4節では、ブートストラップ法について解説する。2.5節では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算手順について述べる。2.6節では、本章のまとめを行う。

2.2 提案手法の基本的な考え方

まず、対象体系の類似体系として選ばれた $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験に対して、(1) モンテカルロ計算の統計誤差、(2) 臨界実験の実験誤差、(3) データ同化後の核データ起因の実効増倍率の不確かさ、の3つの誤差が臨界体系に対する実効増倍率の予測結果（以降、 k_i と呼ぶ）に対して誤差伝播することを仮定し、実効増倍率に対する全体の不確かさ（以降、 u_i と呼ぶ）を推定する。そして、臨界体系に対する実効増倍率予測結果が平均値 k_i 、標準偏差 u_i とする正規分布にそれぞれ従うと仮定することで、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布をGMM分布（Gaussian Mixture Model）[7]でモデル化する（Figure 2.1を参照）。GMM分布をモデル化の際に、対象体系と類似体系として選ばれた各臨界実験の核データ起因の相関に基づいて求めた重み（以降、 w_i と呼ぶ）を、GMM分布を構成する1つ1つの正規分布の重みとして用いる。

GMM分布の確率密度関数（以降、 $f(k)$ と呼ぶ）は $i = 1 \sim N$ 個の正規分布（平均値 k_i 、標準偏差 u_i ）の確率密度関数（以降、 $f_i(k)$ と呼ぶ）の加重和により、以下の式で求めることができる。

$$f_i(k) = \frac{w_i}{\sqrt{2\pi u_i^2}} \exp\left[-\frac{(k - k_i)^2}{2u_i^2}\right] \quad (2.1)$$

$$f(k) = \frac{\sum_{i=1}^N f_i(k)}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (2.2)$$

ここで、 i は対象体系の類似体系として選ばれた臨界実験のインデックスを表し、 k_i は i 番目の臨界実験に対する実効増倍率予測結果、 u_i は i 番目の臨界実験に対する実効増倍率の不確かさ、 w_i は類似体系と i 番目の臨界実験の核データ起因の相関に基づいて求めた重みを表す。また、 N は対象体系の

類似体系として選ばれた臨界実験の数を表す。なお、 k_i 、 u_i 、 w_i の導出方法については 2.3 節で述べる。

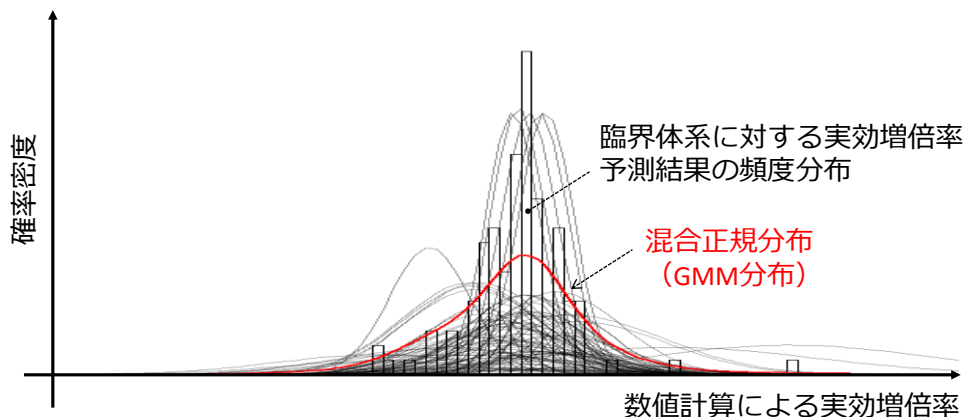


Figure 2.1 臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布と GMM 分布の確率密度

(2.1)式と(2.2)式に基づいてモデル化した GMM 分布から無作為に実効増倍率の再標本（以降、 k_j^* と呼ぶ）を復元抽出する。抽出した再標本の標本平均（以降、 \hat{k} と呼ぶ）と不偏標準偏差（以降、 \hat{s} と呼ぶ）を計算する操作を多数回（反復回数を B と呼ぶ）繰り返す。得られた \hat{k} と \hat{s} を用いて、臨界超過確率（以降、 p と呼ぶ）、信頼度（以降、 γ と呼ぶ）を満たすように設定した α における $\hat{k} - \alpha\hat{s}$ の頻度分布（以降、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布と呼ぶ）を推定する。ここで、 α を安全裕度と呼ぶ。

α を求めるために、まず GMM 分布の下側累積確率が p となる値（以降、 k_p と呼ぶ）を GMM 分布の累積分布関数から求める。GMM 分布の累積分布関数（以降、 $F(k)$ と呼ぶ）は、 $i = 1 \sim N$ 個の正規分布（平均値 k_i 、標準偏差 u_i ）の累積分布関数（以降、 $F_i(k)$ と呼ぶ）の加重和により、以下の式で求めることができる。

$$F_i(k) = \frac{w_i}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{k - k_i}{\sqrt{2u_i^2}} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$F(k) = \frac{\sum_{i=1}^N F_i(k)}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (2.4)$$

ここで、 $\operatorname{erf}(k)$ は誤差関数を意味し、以下の式で定義される。

$$\operatorname{erf}(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-t^2} dt \quad (2.5)$$

(2.3)式と(2.4)式に基づき、 k_p における累積確率が p となるように、以下の式で k_p を求める。

$$F(k_p) = p \quad (2.6)$$

次に、 $\hat{k} - \alpha\hat{s} \leq k_p$ を満たす確率が γ となるように α を決定する。

$$\frac{n(\hat{k} - \alpha\hat{s} \leq k_p)}{B} = \gamma \quad (2.7)$$

ここで、 $n(x \leq y)$ は $x \leq y$ を満たす数を意味する。Figure 2.2 に示すように、 α を大きくすることで、

推定臨界下限増倍率の不確かさ分布は実効増倍率がより小さな負側に小さくなり、 $\hat{k} - \alpha s \leq k_p$ を満たす確率は大きくなる。反対に、 α を小さくすることで、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布は実効増倍率がより大きな正側に大きくなり、 $\hat{k} - \alpha s \leq k_p$ を満たす確率は小さくなる。 α を二分法[8]により試行錯誤的に変化させることで、Figure 2.3 に示すように、 $\hat{k} - \alpha s \leq k_p$ を満たす確率が γ と一致した際の α を安全裕度として設定する。Figure 2.3 の赤の破線は $p = 2.5\%$ の条件で求めた GMM 分布の下側累積確率点 k_p に対応し、青色の領域は臨界超過確率 $p = 2.5\%$ に対応している。また、オレンジ色の領域は、信頼度 $\gamma = 97.5\%$ の条件で求めた推定臨界下限増倍率の不確かさ分布が k_p を超える確率 $1 - \gamma = 2.5\%$ に対応している。

最後に、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布の平均値を推定臨界下限増倍率（以降、 k_{sub} と呼ぶ）とする。臨界超過確率及び信頼度の詳細は Appendix. A で述べる。

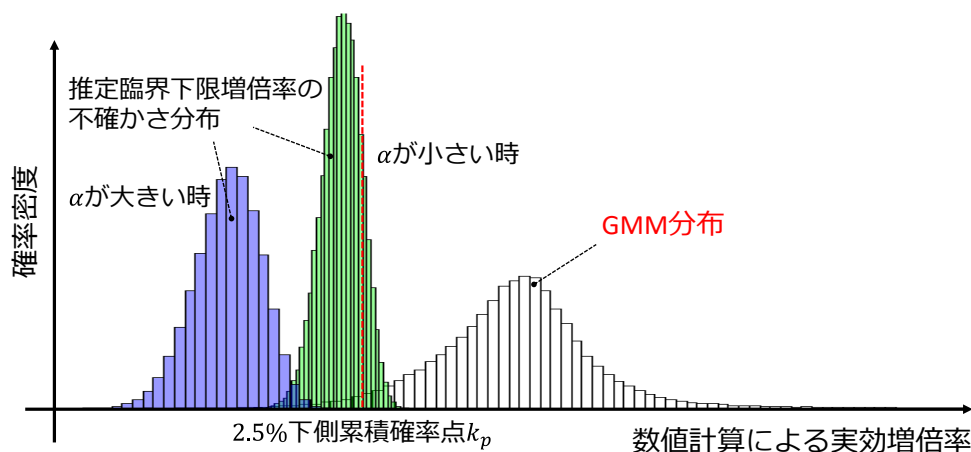


Figure 2.2 安全裕度の変化に対する推定臨界下限増倍率の不確かさ分布の変化

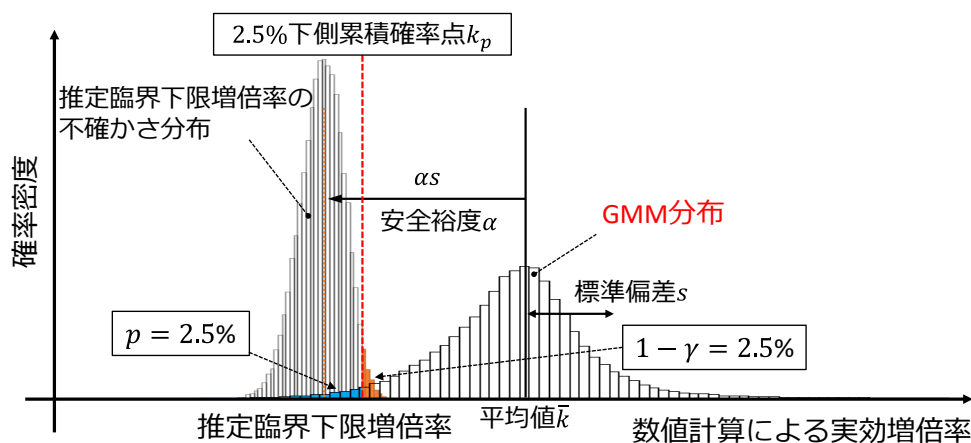


Figure 2.3 ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法の概要

2.3 提案手法で考慮する要素

2.3.1 臨界実験の核的な類似性

実効増倍率の予測結果が対象体系と用いた臨界実験の間で強く相関していれば、対象体系の実効増倍率は、用いた臨界実験の実効増倍率の頻度分布に属するサンプルと考えることができる。対象

体系と用いた臨界実験の間で、実効増倍率の核データに対する感度係数の傾向が似ていれば、実効増倍率の傾向は似ている（核的な類似性が高い）と言える。実効増倍率の核データに対する感度係数は、微視的断面積の変化量に対する実効増倍率の変化量の割合から求められる。得られた感度係数の各臨界実験と対象体系間の相関係数を評価し、核的な類似性として用いる。

対象体系の実効増倍率（以降、 k_A と呼ぶ）と選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率（以降、 $k_{\text{calc},i}$ と呼ぶ）の間の相関係数（以下、代表性因子 $c_{k,i}$ と呼ぶ）[9],[10]は、実効増倍率の感度係数行列と核データの共分散行列 Σ_σ を用いたサンドイッチ則により求められる。

$$c_{k,i} = \frac{\text{cov}(k_A, k_{\text{calc},i})}{\sqrt{\text{var}(k_A)}\sqrt{\text{var}(k_{\text{calc},i})}} \quad (2.8)$$

$$\text{var}(k_A) = \mathbf{S}_{k_A,\sigma} \Sigma_\sigma \mathbf{S}_{k_A,\sigma}^T \quad (2.9)$$

$$\text{var}(k_{\text{calc},i}) = \mathbf{S}_{k_{\text{calc},i},\sigma} \Sigma_\sigma \mathbf{S}_{k_{\text{calc},i},\sigma}^T \quad (2.10)$$

$$\text{cov}(k_A, k_{\text{calc},i}) = \mathbf{S}_{k_A,\sigma} \Sigma_\sigma \mathbf{S}_{k_{\text{calc},i},\sigma}^T \quad (2.11)$$

ここで、 $\text{var}(k_A)$ 及び $\text{var}(k_{\text{calc},i})$ は k_A 及び $k_{\text{calc},i}$ の核データ起因の分散であり、 $\text{cov}(k_A, k_{\text{calc},i})$ は k_A 及び $k_{\text{calc},i}$ 間の核データ起因の共分散であり、 $\mathbf{S}_{k_A,\sigma}$ 及び $\mathbf{S}_{k_{\text{calc},i},\sigma}$ は核データに対する k_A 及び $k_{\text{calc},i}$ の実効増倍率の感度係数行列（又は行ベクトル）である。上付き文字‘T’は転置行列を表す。代表性因子 $c_{k,i}$ の値が1に近づくにつれて、核データに対する $k_{\text{calc},i}$ の変動は、 k_A の変動と似た傾向を持つことが予想される。

評価された代表性因子 $c_{k,i}$ を用いて、選出された i 番目の臨界実験の重み w_i を以下の一次関数で評価する。なお、以降で示す重み付けの考え方は Whisper-1.1 コード[5]で採用されている方法を参考ににした。

$$w_i = \frac{c_{k,i} - c_{k,\text{acc}}}{c_{k,\text{max}} - c_{k,\text{acc}}} \quad (2.12)$$

ここで、 $c_{k,\text{max}} = \max(c_{k,i})$ は選出された臨界実験の代表性因子の最大値であり、 $c_{k,\text{acc}}$ は許容できる代表性因子のしきい値である。 $c_{k,i} > c_{k,\text{acc}}$ の場合、推定臨界下限増倍率の評価のために i 番目の臨界実験が選出される。 $c_{k,\text{acc}}$ は $c_{k,\text{max}}$ から徐々に小さくすることで、重みの総和が必要な重み（以降、 w_{req} と呼ぶ）と一致するように決定される。

$$\sum_{i=1}^N w_i = w_{\text{req}} \quad (2.13)$$

必要な重み w_{req} は以下の式で求められる。

$$w_{\text{req}} = w_{\text{min}} + w_{\text{penalty}}(1 - c_{k,\text{max}}) \quad (2.14)$$

ここで、 w_{min} は選出される臨界実験数の最小値（あるいは、選出される臨界実験の重みの総和の最小値）、 w_{penalty} は代表的な臨界実験と対象体系の相関が弱い場合の係数を意味する。Whisper-1.1 コードのデフォルト値を参考に、本研究では $w_{\text{min}} = 25$ 、 $w_{\text{penalty}} = 100$ を使用する[5]。(2.14)式は、選出された臨界実験の中に対象体系と完全に一致する臨界実験が存在する時（すなわち、 $c_{k,\text{max}} = 1$ の時）、さらに同一の臨界実験が24個必要であることを意味する。

2.3.2 実効増倍率の不確かさ

対象体系の類似体系として選ばれた i 番目の臨界実験について、実験モデルの簡略化（形状の簡

略化、不純物の無視など)や製造公差等により、実効増倍率の実験値(以降、 $k_{\text{exp},i}$ と呼ぶ)は必ずしもちょうど1ではなく、1から僅かにバイアスがある場合もある。したがって、実験値と1との間のバイアスを($k_{\text{exp},i} - 1$)により求めた上で、各*i*番目の臨界実験に対して計算で求めた実効増倍率(以降、 $k_{\text{calc},i}$ と呼ぶ)から実験値のバイアスを引いた値を k_i とした。

$$k_i = k_{\text{calc},i} - (k_{\text{exp},i} - 1) \quad (2.15)$$

ここで、 $k_{\text{calc},i}$ は実効増倍率の計算値、 $k_{\text{exp},i}$ は実効増倍率の実験値を表す。以降、 k_i を*i*番目の臨界実験の実効増倍率予測結果と呼ぶ。

モンテカルロコードで計算された実効増倍率の値は、中心極限定理に基づいて正規分布に従うと予想される。これにより、モンテカルロ計算に伴う統計誤差は、モンテカルロコードを用いた固有値計算の統計誤差で近似的に得られる。連続エネルギーのモンテカルロ計算は中性子輸送方程式を解くための厳密な数値計算手法とみなすことができ、他の解析モデル誤差は統計誤差よりも小さいと予想されるため、提案手法ではモンテカルロ法に起因した統計誤差以外の解析モデル誤差(解析手法誤差)は無視することとした。

実効増倍率の実験値は組成や製造公差の不確かさ伝播、モデルの簡略化に伴う系統誤差等により誤差を持つ。国際臨界安全ベンチマーク評価プロジェクト(ICSBEP)ハンドブック[6]に掲載された臨界実験では、実効増倍率の実験値とともに実験誤差が提供される。提案手法では、ICSBEPハンドブックに掲載された実験誤差を実験誤差として用いる。

核データを入力とする実効増倍率の計算には、核データの共分散データに起因する不確かさが存在する。核データ起因の不確かさは実験結果を用いてデータ同化により低減することができる。したがって、提案手法では、データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさを核データ起因の誤差として用いる。データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ評価方法を Appendix. B にまとめた。

対象体系の類似体系として選ばれた*i*番目の臨界実験について、(1)モンテカルロ計算に伴う統計誤差、(2)臨界実験の実験誤差、(3)データ同化後の核データ起因の不確かさ、の3つの誤差が臨界体系に対する実効増倍率予測結果 k_i に対して誤差伝搬すると仮定する。このとき、それぞれの不確かさの相関は無視する。すなわち、実効増倍率に対する全体の不確かさをそれぞれの不確かさの二乗和平方根によって求める。

$$u_i = \sqrt{u_{\text{calc},i}^2 + u_{\text{exp},i}^2 + u_{\text{XS},i}^2} \quad (2.16)$$

ここで、 $u_{\text{calc},i}$ はモンテカルロ計算に伴う統計誤差、 $u_{\text{exp},i}$ は臨界実験の実験誤差、 $u_{\text{XS},i}$ はデータ同化後の核データ起因の不確かさを表す。以降、 u_i を実効増倍率の不確かさと呼ぶ。そして、臨界体系に対する実効増倍率予測結果が平均値 k_i 、標準偏差 u_i とする正規分布にそれぞれ従うと仮定することで、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を GMM 分布でモデル化する。

対象体系の実効増倍率計算値には、以下に示す不確かさがある。

- (a) モンテカルロ計算に伴う統計誤差
- (b) 組成や製造公差、モデルの簡略化などに起因する誤差
- (c) 断面積に起因する核データ起因誤差

提案手法による推定臨界下限増倍率の場合には、以上のうち、(a)と(b)については、臨界実験に対する実効増倍率不確かさとは独立であり、対象体系の実効増倍率不確かさとして考慮する。(c)については、臨界実験と対象体系の核データ起因の誤差は相関するが、この相関分は「断面積調整後の

不確かさ」を用いることで考慮できる。断面積調整した後に残る不確かさは、臨界実験と対象体系で独立と考えてよく、したがって対象体系の実効増倍率不確かさとして考慮する。

Appendix. C で説明しているように、Whisper-1.1 で採用されている Upper Subcritical Limit (USL)[5] の場合には、(a)と(b)については、提案手法と同様に対象体系の実効増倍率不確かさとして考慮する。(c)については、実験結果を踏まえてデータ同化された断面積調整後の共分散データを用いて対象体系の実効増倍率不確かさを評価し、USL の未臨界裕度として考慮する形となっている。また、使用する計算コードにおける未検知誤差（コーディングエラーなど）に対しても USL の未臨界裕度として考慮される。

したがって、もし提案手法による推定臨界下限増倍率を用いて USL と等価な条件となるように未臨界判定したい場合には、計算で求めた対象体系の実効増倍率に対して、「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさ」と「使用する計算コードにおける未検知誤差」を追加した上で、推定臨界下限増倍率と比較して未臨界判定をする必要がある、と考えられる。

2.4 ブートストラップ法

ブートストラップ法[11], [12]は、解析により得られた標本を多数回リサンプリングすることで、正規分布の仮定を用いずに標本平均や不偏分散の不確かさ分布を推定することが可能である。リサンプリングとは、標本の頻度分布に基づく経験分布から無作為抽出を行うことにより仮想的な再標本（リサンプルと呼ぶ）を生成することである。標本の大きさを N とすると、リサンプルの大きさも N である。リサンプリングを行う際に、標本の頻度分布に対して正規分布を仮定しないため、任意の分布に対して適用することができる。

経験分布とは、 N 個の標本 $k_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の各点で確率 $1/N$ を持つ分布のことである。経験分布の確率密度関数 $f(k)$ は以下の式で定義される。

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(k_i) \quad (2.17)$$

ここで、 $\delta(k_i)$ はデルタ関数と呼ばれ、 $k = k_i$ であれば $\delta(k_i) = 1$ 、 $k \neq k_i$ であれば $\delta(k_i) = 0$ である。

ブートストラップ法では、まず解析により得られた標本に対して(2.17)式に基づいて経験分布を定義する。次に、経験分布から無作為抽出を行うことによりリサンプルを生成し、リサンプルの平均値及び不偏標準偏差を計算する。この手順を多数回繰り返すことで、標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布を得ることができる。リサンプルの値は標本の値と変わらないため、リサンプリングは復元抽出とも呼ばれる。ブートストラップ法の反復回数を B とする。

例として、サイコロを 12 回振った際の標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布を求める手順について説明する。サイコロを 12 回振って出た目は以下の通りである。

4 2 2 3 6 3 4 1 5 4 5 1

まず、先の出た目に 1 から 12 までインデックスを付ける。次に、1 から 12 までの数字が書かれたカードを用意して、外から中身が見えない袋に入れてシャッフルする。そして、袋からカードをランダムに 1 枚取り出して書かれたインデックスに対応するサイコロの目を記録する。次に、引いたカードを袋に戻して、再びランダムに 1 枚取り出して書かれたインデックスに対応するサイコロの目を記録する。この操作を計 12 回行い、1 セット 12 個のサイコロのリサンプルを得る。そして、

標本平均及び不偏標準偏差を計算する。

引いたカードを袋に戻してから次のカードを引いて標本を得る操作は復元抽出と呼ばれる。復元抽出の場合は、同じ標本が1セットの中で重複する可能性がある。反対に、引いたカードを戻さずに次のカードを引いて標本を得る操作は非復元抽出と呼ばれる。非復元抽出の場合は、毎回同じ標本が得られるため、標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布を推定することができない。

最後に、サイコロのリサンプルから標本平均及び不偏標準偏差を計算する操作を多数回行うことで標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布を得ることができる (Figure 2.4 を参照)。Figure 2.4 で示したサイコロの例の場合には、1000 回反復計算を行った。ブートストラップ法の反復回数は、偏りまたは平均二乗誤差の推定に対しては 100 から 200、信頼区間の推定に対してはおよそ 1000 が適切であることが文献[13]で報告されている。

提案手法により推定臨界下限増倍率を評価する場合、1 に近い信頼度 ($1 - \gamma$ を極めて小さく) 設定する場合には、 γ の設定値に応じて十分多くブートストラップ法の反復回数 (以降、 B と呼ぶ) を設定する必要がある。例えば $\gamma = 97.5\%$ の条件では、 B の設定値を 1000 以上とする必要がある。これは、(2.7)式に基づいて α の値を設定する際に、 $\hat{k} - \alpha \hat{s} \leq k_p$ を満たす数がちょうど 975 個のとき、設定した信頼度 $\gamma = 97.5\%$ を満たすためである。

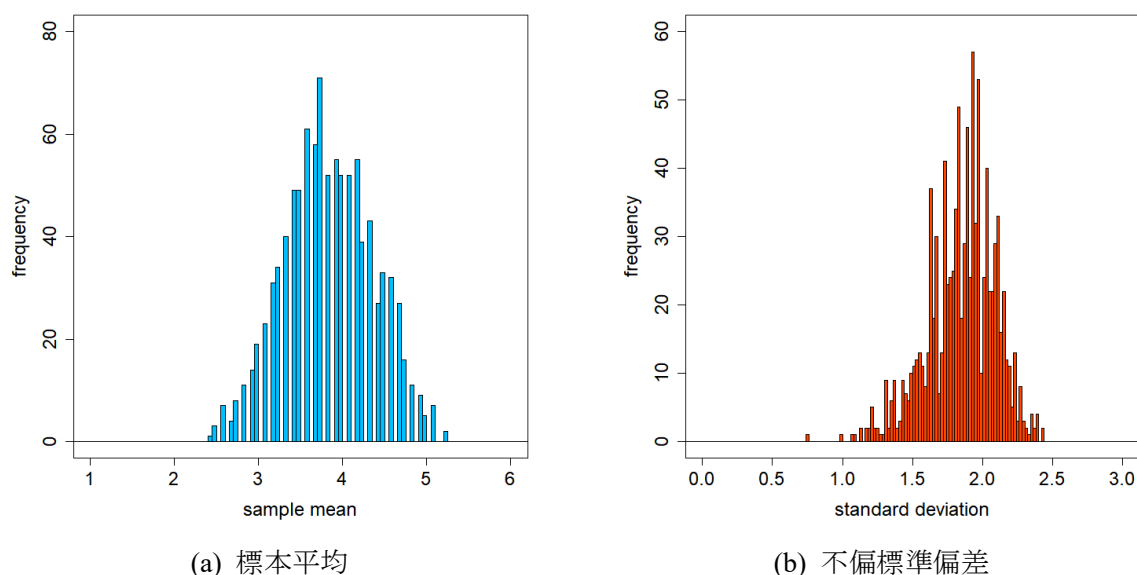


Figure 2.4 サイコロを 12 回振った際の標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布

2.5 提案手法による推定臨界下限増倍率の計算手順

提案手法による推定臨界下限増倍率の計算手順を以下にまとめる。

1. 臨界安全解析の対象となる体系を対象体系とする。
2. ICSBEP ハンドブックに掲載された実験データから対象体系と核的に類似する臨界実験を N 個選出し、代表性因子を元に(2.12)式に基づいて重み $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ を求める。下添え字は選出された臨界実験のインデックス ($1 \leq i \leq N$) を表す。
3. 選出された N 個の臨界実験について、(2.15)式と(2.16)式に基づいて実効増倍率 $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ と実効増倍率の不確かさ $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ を求める。
4. インデックス i から 1 個重複を許して復元抽出し、リサンプル j とする。このとき、選択する確率として総和が 1 になるように規格化した重みを用いる。

5. $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ と $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ の中からインデックス j に対応する k_j と u_j を選択する。
6. k_j が平均 k_j 、標準偏差 u_j の正規分布に従うとして、正規乱数により k_j^* をサンプリングする。
7. 手順4から6までを N 回繰り返し、 N 個の k_j^* をリサンプリングする。
8. N 個の k_j^* から標本平均 \hat{k} 及び不偏標準偏差 \hat{s} を求める。ここで、ハット $\hat{\cdot}$ はブートストラップ法を用いて求めた標本平均及び不偏標準偏差であることを表す。

$$\hat{k} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N k_{j_l}^* \quad (2.18)$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N (k_{j_l}^* - \hat{k})^2} \quad (2.19)$$

9. 手順7から8までを B 回繰り返し、 B 個の \hat{k} 、 \hat{s} を得る。
10. (2.6)式に基づいて臨界超過確率 p の条件における GMM 分布の下側累積確率点 k_p を二分法により求める。これは、(2.6)式を解析的に解くことが難しいためである。
11. (2.7)式に基づいて $\hat{k} - \alpha\hat{s} \leq k_p$ を満たす確率が信頼度 γ になるように α を二分法により決定する。
12. 設定した α における推定臨界下限増倍率の不確かさ分布を求める。

$$\hat{k}_{\text{sub}} = \hat{k} - \alpha\hat{s} \quad (2.20)$$

13. \hat{k}_{sub} の平均値から推定臨界下限増倍率 k_{sub} を計算する。

$$k_{\text{sub}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{k}_{\text{sub},b} \quad (2.21)$$

2.6 本章のまとめ

本章では、ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法を提案し、その計算理論について述べた。修士研究では、卒業研究で開発した評価法を元に、(1) モンテカルロ計算の統計誤差、(2) 臨界実験の実験誤差、(3) データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ、(4) 対象体系と類似体系として選ばれた臨界実験の核的な類似性、を考慮し尤もらしい推定臨界下限増倍率を評価できるように改良を行った。

2.2 節では、本研究で提案する手法の基本的な考え方について述べた。提案手法では、臨界体系に対する実効増倍率予測結果が正規分布にそれぞれ従うと仮定することで、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を混合正規分布 (GMM 分布) でモデル化した。GMM 分布を構成する 1 つ 1 つの正規分布の標準偏差は、(1) モンテカルロ計算の統計誤差、(2) 臨界実験の実験誤差、(3) データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ、の 3 つの誤差から誤差伝播則に基づいて推定される値を用いた。また、対象体系と類似体系として選ばれた各臨界実験の核データ起因の相関に基づいて求めた重みを、GMM 分布を構成する 1 つ 1 つの正規分布の重みとして用いた。GMM 分布から無作為に実効増倍率の再標本を復元抽出することで推定臨界下限増倍率の不確かさ分布を得ることができる。そして、臨界超過確率 p 、信頼度 γ を満たすように安全裕度を決定し推定臨界下限増倍率を評価した。

2.3 節では、提案手法で考慮する要素として、臨界実験の核的な類似性と実効増倍率の不確かさについて述べた。実効増倍率の核データに対する感度係数の各臨界実験と対象体系間の相関係数を評価し、核的な類似性 (代表性因子) として用いた。そして、代表性因子に基づいて対象体系と核的に類似する臨界実験を選出し、選出された臨界実験に対して重み付けを行った。モンテカルロ計

算に伴う統計誤差は、モンテカルロコードを用いた固有値計算の統計誤差で近似的に推定した。臨界実験の実験誤差は ICSBEP ハンドブックに掲載された実験データを用いた。核データ起因の実効増倍率不確かさとして、実験結果を用いてデータ同化を行うことで不確かさを低減した核データ起因の実効増倍率不確かさを用いた。

2.4 節では、ブートストラップ法について解説した。ブートストラップ法では、解析により得られた標本に基づく経験分布から多数回無作為抽出を行うことで、正規分布の仮定を用いずに標本平均や不偏分散の不確かさ分布を推定する。ブートストラップ法の例として、サイコロを 12 回振ったときの標本平均及び不偏標準偏差の不確かさ分布を示した。

2.5 節では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算手順について述べた。まず、選出した臨界実験のインデックスから無作為に復元抽出を行い、得られたインデックスに対応する実効増倍率予測結果と実効増倍率の不確かさに基づく正規乱数をサンプリングする。サンプリングした再標本の標本平均及び不偏標準偏差を計算する操作を多数回行う。そして、設定した安全裕度において、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布が p に対応する GMM 分布の下側累積確率点以下となる確率 γ を満たすように、二分法により試行錯誤的に安全裕度を決定した。最後に、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布の平均値を推定臨界下限増倍率とした。

第3章 仮想数値実験による提案手法の検証

3.1 本章の概要

本章では、仮想数値実験による提案手法の検証を行う。第2章で述べた計算理論を実装するために計算コードを作成する必要がある。また、作成した計算コードは、仮想的な数値問題により十分検証される必要がある。

本章で実施した研究では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コードを作成し、作成した計算コードの検証を行うことを目的とする。この目的を達成するために、実効増倍率の母集団が(1)正規分布に従う場合、(2) Gaussian Mixture Model (GMM)分布に従う場合、を想定し計算コードが意図通り計算できているか検証を行う。また、実効増倍率の母集団が歪度及び尖度がある分布に従う場合、歪度及び尖度が変化することで推定臨界下限増倍率がどのように変化するか調べる。

3.2節では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コードを作成する。3.3節では、実効増倍率の母集団が正規分布に従う場合の計算コードの検証を行う。3.4節では、歪度及び尖度がある分布に対して提案手法を適用したとき、歪度及び尖度の変化が推定臨界下限増倍率の評価結果に与える影響を調べる。3.5節では、実効増倍率の母集団が GMM 分布に従う場合の計算コードの検証を行う。3.6節では、本章のまとめを行う。

3.2 計算コードの作成

提案手法を実装するために、計算コードを作成した。使用したプログラミング言語は R (version 3.5.2) [14]である。R は以下の特徴を有する[15]。

- インタプリタ言語であるため、コンパイルの必要がなく、書いたプログラムをインタプリタに渡せば実行できる。
- R 言語でプログラムを書けば、R のインタプリタをインストールしたマシンなら OS を問わず実行できる。
- 様々な OS 用の R インタプリタが CRAN のサイト[14]から無料で提供されている。
- 機械学習や統計解析などのデータ解析に便利な機能が用意されている。例えば、回帰分析や正規性の検定、様々な理論分布の確率密度計算や乱数生成などである。

特に、確率密度の計算や乱数を生成する機能は計算コードを実装する上で必要不可欠な機能であるため、R を用いた。

計算コードを実装するために、Table 3.1 に示す環境を構築した。

Table 3.1 計算コードの環境

CPU	Intel Core i7-8700 3.2GHz
OS	Windows 10 Pro
メモリ	8 GB

作成した計算コードのフロー図を Figure 3.1 に示す。作成した計算コードのプログラムは Appendix. D に示した。作成した計算コードについて解説する。

- 1 入力データとして、実効増倍率の計算値と実験値、実効増倍率の統計誤差と実験誤差と核データ起因の不確かさ、臨界実験の重みを読み込む。入力データは csv 形式のデータフレームに格

納した。特定のベクトルにアクセスするには「データフレーム名\$ヘッダー名」とすればよい。

- 2 実効増倍率 (k_i)、実効増倍率の不確かさ (u_i)、規格化された重みを計算する。平方根及び総和の計算にそれぞれ `sqrt` 関数、`sum` 関数を用いた。`sqrt` 関数、`sum` 関数はそれぞれベクトルの平方根、総和を計算する関数である。
- 3 臨界超過確率 (p) 及び信頼度 (γ) の計算条件を設定する。
- 4 二分法[8]を用いて下側累積確率点 (k_p) を計算する。下側累積確率の計算に `pnorm` 関数を用いた。`pnorm` 関数は正規分布の下側累積確率を求める関数である。`pnorm` 関数の引数について Table 3.2 にまとめた。`pnorm` 関数では、各臨界実験の実効増倍率 (k_i) を平均値とし、実効増倍率の不確かさ (u_i) を標準偏差とする正規分布を用いる。また、下側累積確率の総和の計算に規格化された重みを用いる。二分法では、まず引数 q の計算区間を決め、計算区間の中点における下側累積確率の総和を計算する。下側累積確率の総和が p と一致しなかったとき、下側累積確率の総和が p に近づくように計算区間の上限値もしくは下限値を中点と入れ替える。そして、再度、計算区間の中点における下側累積確率の総和を計算する。この操作を繰り返して下側累積確率の総和が p と一致したとき、二分法の計算を終了し中点を k_p とする。

Table 3.2 下側累積確率の計算

pnorm 関数の引数	意味	入力
<code>q</code>	下側累積確率点を表す。	計算区間の中点
<code>mean</code>	正規分布の平均値を表す。	実効増倍率 (k_i)
<code>sd</code>	正規分布の標準偏差を表す。	実効増倍率の不確かさ (u_i)

- 5 平均 (\hat{k})、不偏標準偏差 (\hat{s}) を格納するベクトルを用意する。ベクトルの生成に `numeric` 関数を用いた。`numeric` 関数は `0` を多数個並べたベクトルを生成する関数である。生成する `0` の数はブートストラップ法の反復回数 (B) とする。
- 6 臨界実験のインデックス (i) のリサンプル (j) を作成する。インデックスのリサンプリングに `sample` 関数を用いた。`sample` 関数は無作為に標本を抽出する関数である。`sample` 関数の引数について Table 3.3 にまとめた。`sample` 関数では、復元抽出を行うかどうか及びデータを抽出する確率を指定できる。規格化された重みを抽出する確率とし、インデックス i から無作為に復元抽出を行う。

Table 3.3 インデックスのリサンプリング

sample 関数の引数	意味	入力
x	無作為抽出されるデータのベクトル	臨界実験のインデックス (i)
size	無作為抽出する個数	臨界実験数 (N)
replace	復元抽出を行う場合は <code>replace = TRUE</code> 、行わない場合は <code>replace = FALSE</code> とする。	<code>replace = TRUE</code>
prob	ベクトル x のデータそれぞれが抽出される確率	規格化された重み

- 7 平均 k_j 、標準偏差 u_j の正規分布に従う乱数を生成するために、標準正規乱数 (z_j) を作成する。標準正規乱数の作成に `rnorm` 関数を用いた。`rnorm` 関数は正規分布に従う乱数を生成する関数である。`rnorm` 関数の引数について Table 3.4 にまとめた。標準正規乱数を生成するため、`rnorm` 関数の平均値を 0、標準偏差を 1 とする。

Table 3.4 標準正規乱数の作成

rnorm 関数の引数	意味	入力
n	生成する乱数の個数	1
mean	正規分布の平均値	0
sd	正規分布の標準偏差	1

- 8 実効増倍率のリサンプル (k_j^*) を作成する。このとき、作成した標準正規乱数と実効増倍率及び実効増倍率の不確かさを一対一対応させるために `for` 文を用いた。リサンプル j の 1 番目から N 番目まで、リサンプル j に対応する実効増倍率 (k_i) と標準正規乱数 (z_j) 及び実効増倍率の不確かさ (u_i) を用いて、 $k_j^* = k_j + z_j u_j$ を繰り返し計算する。
- 9 k_j^* の平均 (\hat{k}) 及び不偏標準偏差 (\hat{s}) を計算する。このとき、`for` 文を用いて手順 6 から 8 までを B 回繰り返し、得られた \hat{k} 及び \hat{s} を手順 5 で用意したベクトルに格納する。平均値及び不偏標準偏差の計算にそれぞれ `mean` 関数と `sd` 関数を用いた。`mean` 関数及び `sd` 関数はそれぞれベクトルの平均値、不偏標準偏差を計算する関数である。
- 10 二分法を用いて安全裕度 (α) を計算する。信頼度の計算に `length` 関数を用いた。`length` 関数はベクトルの要素の個数を返す関数である。`length` 関数を用いてブートストラップ標本 ($\hat{k}_{\text{sub}} = \hat{k} - \alpha \hat{s}$) が k_p 以下となる数を求める。そして、 \hat{k}_{sub} が k_p 以下となる数を B で割り信頼度を求める。二分法では、まず α の計算区間を決め、計算区間の midpoint における信頼度を計算する。このとき、信頼度が γ と一致しなかったとき、信頼度が γ に近づくように計算区間の上限値もしくは下限値を midpoint と入れ替える。そして、再度、計算区間の midpoint における信頼度を計算する。この操作を繰り返して信頼度が γ と一致したとき、二分法の計算を終了し midpoint を α とする。
- 11 $\hat{k} - \alpha \hat{s}$ の平均値を計算し、推定臨界下限増倍率 (k_{sub}) とする。
- 12 計算結果を出力する。`print` 関数を用いることで、R のインタプリタ上に結果が表示される。

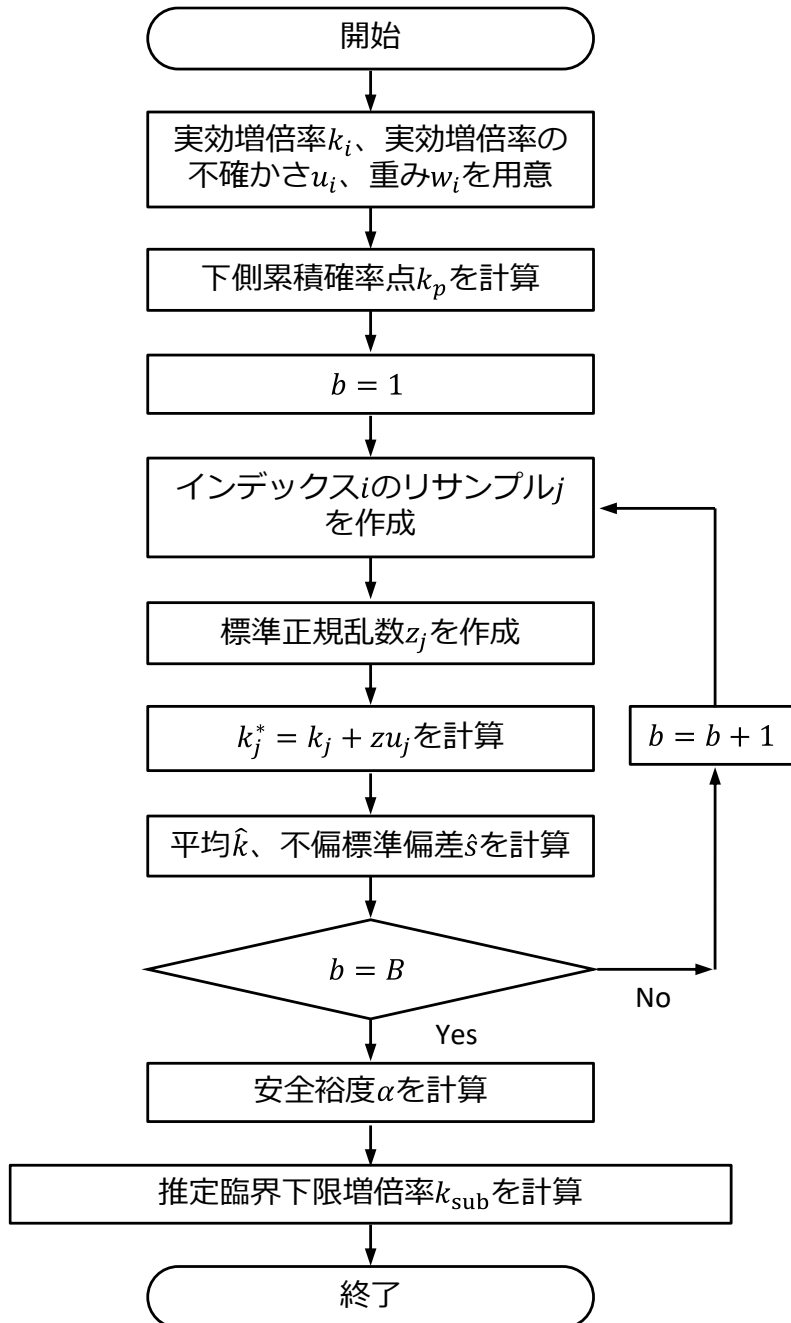


Figure 3.1 提案手法による推定臨界下限増倍率の計算フロー

3.3 正規分布に対する検証

3.3.1 計算条件

本節では、実効増倍率の母集団が正規分布に従う場合の計算コードの検証を行うことを目的とする。母集団が正規分布に従うとき、従来法を用いることで推定臨界下限増倍率を正確に評価することができるため、計算コードによる評価結果が従来法による評価結果と一致していることを確認することで計算コードが意図した通り実装できていることとした。

正規分布の母数は、母平均（以降、 μ と呼ぶ）を 1.00 とし、母標準偏差（以降、 σ と呼ぶ）を 0.01 とした。重みは $w_i = 1$ とし、実効増倍率の不確かさは $u_i = 10^{-8}$ とした。臨界超過確率及び信頼度はそれぞれ $p = 2.5\%$ 、 $\gamma = 97.5\%$ とした。ブートストラップ法の反復回数は $B = 1000$ とした。以上の条件の下、正規分布から無作為に抽出した N 個（ N ：臨界実験数）の実効増倍率に基づいて推定臨界下限増倍率を評価した。

従来法との比較による計算コードの検証と併せて、臨界超過確率及び信頼度が意図通りそれぞれ 2.5%、97.5%となっているか確かめる必要がある。そこで、以下の式に基づいて臨界超過確率及び信頼度を検算した。臨界超過確率及び信頼度の計算条件と区別するために、検算式から得られた臨界超過確率及び信頼度の評価結果を p_V 及び γ_V と呼ぶ。

$$p_V = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\sqrt{2\pi u_i^2}} \exp\left[-\frac{(k_p - k_i)^2}{2u_i^2}\right] \quad (3.1)$$

$$\gamma_V = \frac{n(\hat{k}_{\text{sub}} \leq k_p)}{B} \quad (3.2)$$

ここで、 k_p 及び \hat{k}_{sub} はそれぞれ下側累積確率点とブートストラップ標本を表し、 $n(x \leq y)$ は $x \leq y$ を満たす数を意味する。求めた p_V 及び γ_V がそれぞれ 2.5%、97.5%になっているとき、意図通りの結果が得られていることとした。

3.3.2 結果

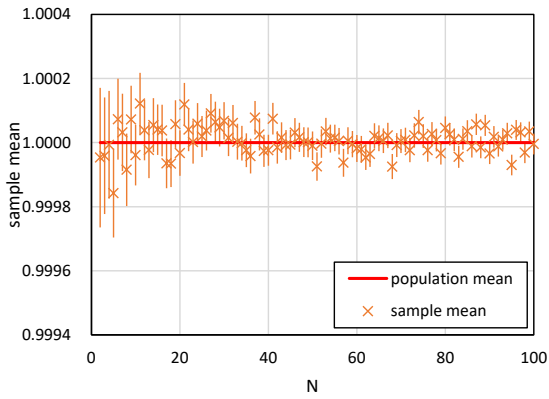
臨界実験数の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化と臨界超過確率及び信頼度の検算結果を、それぞれ Figure 3.2 と Figure 3.3 に示す。横軸は臨界実験数（ N ）を表す。縦軸は各評価値を表し、誤差バーは初期乱数を 1000 回変えた際の中心極限定理に基づいた平均値の標準偏差（ 1σ ）を表す。Figure 3.2(a)から(e)はそれぞれ標本平均、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度、推定臨界下限増倍率を表す。また、Figure 3.2(a)から(e)の実線はそれぞれ μ 、 σ と従来法による下側累積確率点、安全裕度、推定臨界下限増倍率を表す。Figure 3.3(a)と(b)はそれぞれ p_V 、 γ_V を表す。Figure 3.3(a)と(b)の実線はそれぞれ 2.5%、97.5%を表す。

計算結果から以下のことが確認できる。

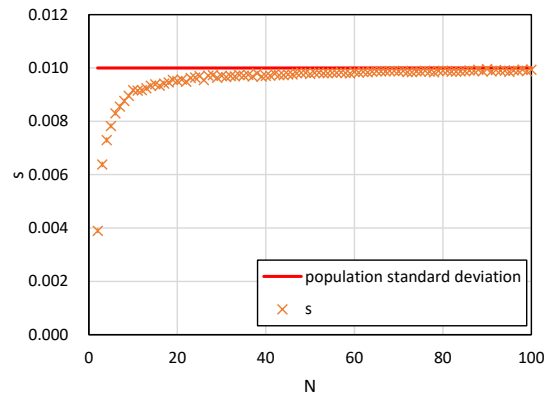
- 標本平均は不確かさの範囲内で母平均と一致した。 N が 30 より小さいとき、不偏標準偏差は母標準偏差より過小に評価されたものの、 N が 30 以上のとき、不偏標準偏差は不確かさの範囲内で母標準偏差と一致した。
- 例えば、 N が 39 から 41 に増えるとき（Figure 3.2(c)の破線で示す箇所）、下側累積確率点は階段状に増加した。下側累積確率点が階段状に増加したことで、安全裕度及び推定臨界下限増倍率も同様に増加した。
- N が大きくなるにつれて、標本平均値及び不偏標準偏差の統計誤差は小さくなった。また、 N

が大きくなるにつれて、安全裕度が小さくなり推定臨界下限増倍率は大きくなる傾向を確認した。 N が4以上のとき、安全裕度と推定臨界下限増倍率は階段状の変化を除いて従来法による評価結果と概ね一致することが確認された。

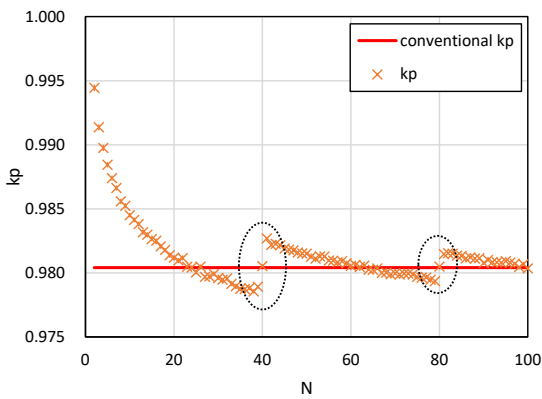
- N が3以下のとき、 γ_V は97.5%と一致しなかったものの、 N が4以上のとき、 γ_V は97.5%と一致した。



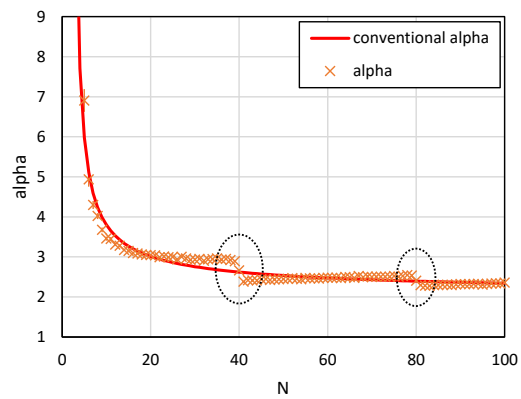
(a) 標本平均



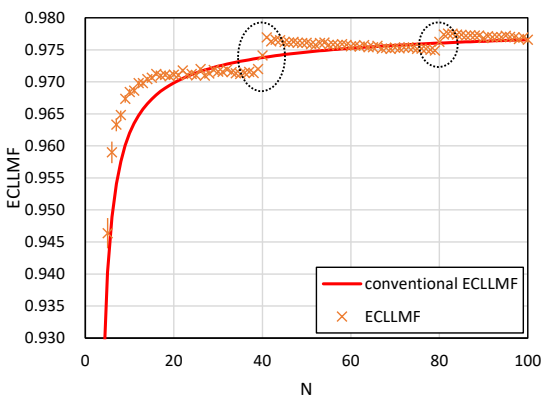
(b) 不偏標準偏差



(c) 下側累積確率点



(d) 安全裕度



(e) 推定臨界下限増倍率

Figure 3.2 臨界実験数の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化

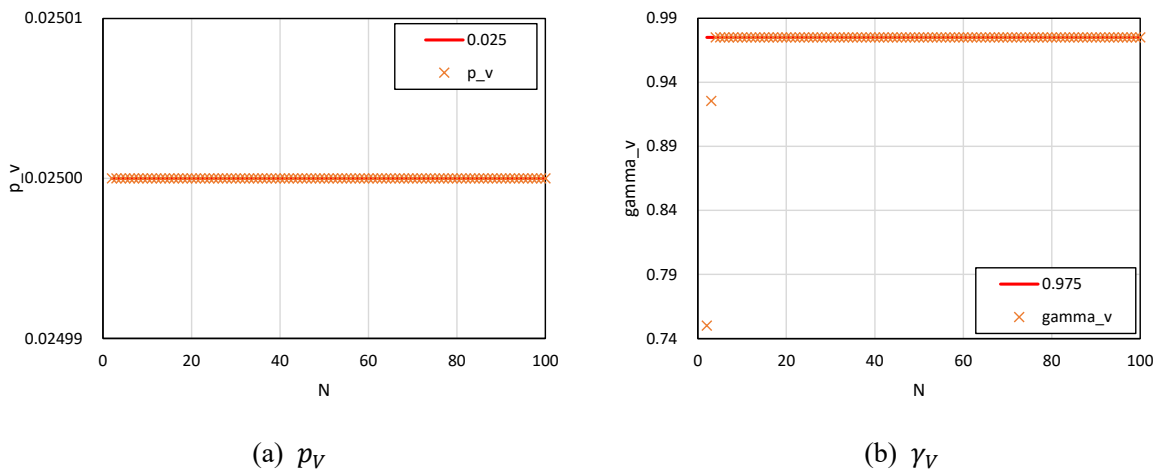


Figure 3.3 臨界超過確率及び信頼度の検算結果

3.3.3 考察

本項では、3.3.2 項で得られた結果に基づき、以下の4点について考察を行う。

- (1) 臨界実験数が比較的少ないとき、不偏標準偏差が過小評価される理由
 - (2) 下側累積確率点が階段状に増加する理由
 - (3) 臨界実験数の変化が推定臨界下限増倍率に与える影響
 - (4) 推定臨界下限増倍率の計算に必要なブートストラップ法の反復回数
- それぞれの考察を以下に示す。

- (1) 臨界実験数が比較的少ないとき、不偏標準偏差が過小評価される理由

ブートストラップ法を用いて実効増倍率の再標本を抽出する際に、再標本として選ばれる実効増倍率が重複することがある。再標本が重複すると、再標本から求めた標準偏差が母標準偏差より小さくなる影響があると考えられる。また、不偏分散は「分散の不偏推定量」であるが、 N が極端に小さいときには、不偏分散の平方根で求めた不偏標準偏差が必ずしも「標準偏差の不偏推定量」とは一致しないという影響もあると考えられる[16]。

- (2) 下側累積確率点が階段状に増加する理由

計算コードによって求めた N 個の実効増倍率頻度分布の2.5%下側累積確率点は、 N 個の実効増倍率を大きさの順に昇順に並び替えたときの0.025 N 番目 ($N/40$ 番目) に位置する実効増倍率と等しくなる。 $N = 1 \sim 40$ のとき1番目の実効増倍率が下側累積確率点となり、 $N = 41 \sim 80$ のとき2番目のデータが下側累積確率点となる (Figure 3.4 を参照)。このため、臨界実験数が39から41に増えるとき下側累積確率点として選ばれる実効増倍率の全体の中での順位が大きくなったため増加したと考えられる。

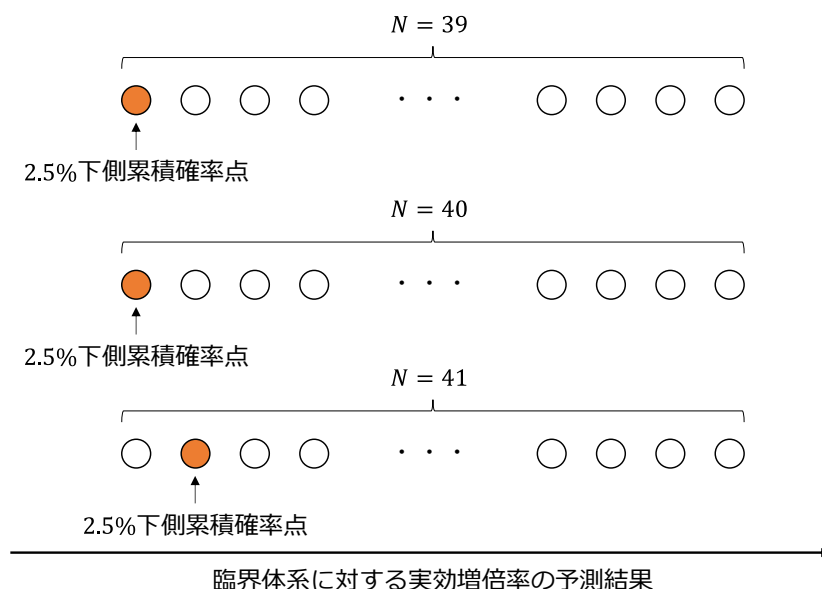


Figure 3.4 下側累積確率点が階段状に増加する理由

(3) 臨界実験数の変化が推定臨界下限増倍率に与える影響

臨界実験数が多くなるにつれて推定臨界下限増倍率は大きくなった。これは、多くの臨界実験を用いることで実効増倍率の標本平均と不偏標準偏差の統計精度が良くなるため、統計精度に関連した安全裕度が小さくなったためである。臨界実験数が無限とみなせるほど多いような $N \rightarrow \infty$ の極限では、標本平均は母平均、不偏標準偏差は母標準偏差に収束するため推定臨界下限増倍率の不確かさ分布は幅を持たないデルタ関数のような形状に収束すると考えられる (Figure 3.5 を参照)。このとき、臨界実験数が多くなるにつれて推定臨界下限増倍率は大きくなり、母集団 (正規分布) の下側累積確率点に収束すると考えられる。

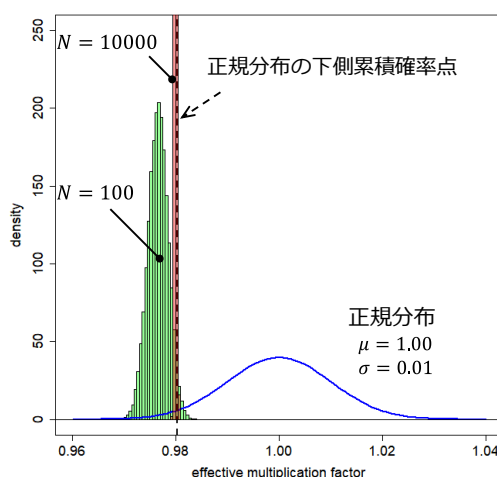


Figure 3.5 臨界実験数の変化に対する推定臨界下限増倍率の不確かさ分布の変化

(4) 推定臨界下限増倍率の計算に必要なブートストラップ法の反復回数

推定臨界下限増倍率の計算に必要なブートストラップ法の反復回数 (B) について考察するため、 B の変化に対する推定臨界下限増倍率の統計誤差の変化を調べた。計算条件は、臨界実験数を除いて 3.3.1 項で述べた条件と同じである。標本平均と不偏標準偏差の統計精度が比較的良好な条件として臨界実験数は $N = 100$ とした。 B の変化に対する推定臨界下限増倍率の統計誤差の変化を Figure 3.6 に示す。横軸はブートストラップ法の反復回数 (B) を表し、縦軸は初期乱数を 1000 回変えた際の標準偏差 (1σ) を表す。

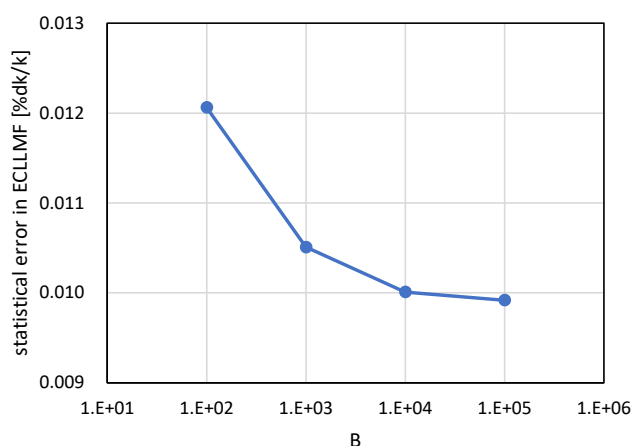


Figure 3.6 ブートストラップ法の反復回数の変化に対する推定臨界下限増倍率の統計誤差の変化

Figure 3.6 に示すように、 B が大きくなるにつれて推定臨界下限増倍率の統計誤差は小さくなった。 $B = 10^5$ のとき推定臨界下限増倍率の統計誤差は約 $9.9 \times 10^{-3} \%dk/k$ であった。第 4 章と第 5 章で行う解析では、総ヒストリー数 5000 万の条件でモンテカルロ法による実効増倍率の統計誤差は約 $10^{-2} \%dk/k$ であった。推定臨界下限増倍率の統計誤差がモンテカルロ計算に伴う実効増倍率の統計誤差以下になるように、ブートストラップ法の反復回数は 10 万回必要であると考えられる。

3.4 歪度及び尖度がある分布に対する検証

3.4.1 計算条件

本節では、歪度及び尖度がある分布に対して提案手法を適用したとき、歪度及び尖度の変化が推定臨界下限増倍率の評価結果に与える影響を調べることを目的とする。標本平均と不偏標準偏差の統計精度が比較的良好な条件として臨界実験数を $N = 100$ と設定した。検証に用いる実効増倍率の母集団として、母平均 1.00、母標準偏差 0.01 のベータ分布、一様分布、ロジスティック分布を用いた。重みは $w_i = 1$ とし、実効増倍率の不確かさは $u_i = 10^{-8}$ とした。臨界超過確率及び信頼度はそれぞれ $p = 2.5\%$ 、 $\gamma = 97.5\%$ とした。ブートストラップ法の反復回数は $B = 1000$ とした。以上の条件の下、2つのケースについて検証を行った。

- I. 歪度の絶対値が等しく、歪度の正負が異なる2つのベータ分布を用意する。このとき、歪度以外の条件を同一とするため、尖度、母平均、母標準偏差がそれぞれ同じ値になるように注意する。そこで、まず母標準偏差 0.01 となるようにベータ分布の形状パラメータ a と b を決めた。また、母平均が 1.00 となるように生成した乱数に $b/(a+b)$ を足した。ベータ分布の確率密度関数を以下に示す。

$$f_{\text{beta}}(k) = \frac{1}{\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt} k^{a-1}(1-k)^{b-1} \quad (3.3)$$

ここで、1つ目のベータ分布（以降、ベータ分布 a と呼ぶ）は、形状パラメータがそれぞれ $a = 168.1813$ 、 $b = 3$ であり、2つ目のベータ分布（以降、ベータ分布 b）は、形状パラメータがそれぞれ $a = 3$ 、 $b = 168.1813$ である。用意したベータ分布の確率密度を Figure 3.7 に示す。横軸は実効増倍率を表し、縦軸は確率密度を表す。Figure 3.7 に示すように、ベータ分布は形状パラメータを入れ替えることで左右対称な分布になる。ベータ分布 a の真の歪度（以降、 τ と表す）及び尖度（以降、 κ と表す）はそれぞれ $\tau = -1.11$ 、 $\kappa = +1.82$ である。ベータ分布 b の真の歪度及び尖度はそれぞれ $\tau = +1.11$ 、 $\kappa = +1.82$ である。

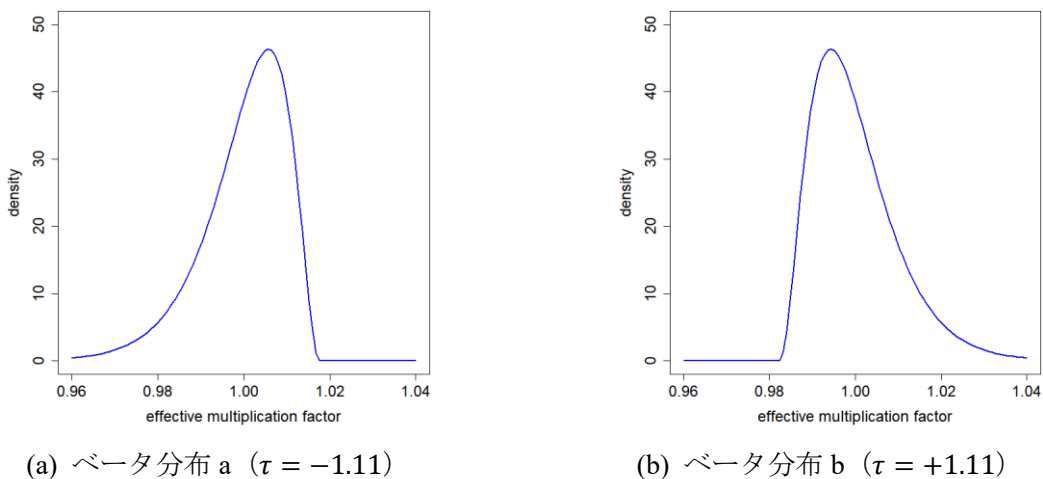


Figure 3.7 ベータ分布の確率密度

- II. 尖度の絶対値が等しく、尖度の正負が異なる2つの分布として一様分布とロジスティック分布を用意する。このとき、尖度以外の条件を同一とするため、歪度、母平均、母標準偏差がそれぞれ同じ値になるように注意する。そこで、母平均 1.00、母標準偏差 0.01 となるように、一様分布の最小値（以降、min と呼ぶ）と最大値（以降、max と呼ぶ）を決めた。また、同様に母平

均 1.00、母標準偏差 0.01 となるように、ロジスティック分布の位置（以降、 L と呼ぶ）と尺度（以降、 S と呼ぶ）を決めた。一様分布とロジスティック分布の確率密度関数を以下に示す。

$$f_{\text{uniform}}(k) = \frac{1}{\max - \min} \quad (3.4)$$

$$f_{\text{logistic}}(k) = \frac{\exp\left(-\frac{k-L}{S}\right)}{S\left[1 + \exp\left(-\frac{k-L}{S}\right)\right]^2} \quad (3.5)$$

ここで、一様分布は、最小値及び最大値がそれぞれ $\min = 0.98268$ 、 $\max = 1.01732$ であり、ロジスティック分布は、位置及び尺度がそれぞれ $L = 1.00$ 、 $S = 0.005513$ である。用意した一様分布及びロジスティック分布の確率密度を Figure 3.8 に示す。一様分布の真の歪度及び尖度はそれぞれ $\tau = 0.00$ 、 $\kappa = -1.20$ である。ロジスティック分布の真の歪度及び尖度はそれぞれ $\tau = 0.00$ 、 $\kappa = +1.20$ である。

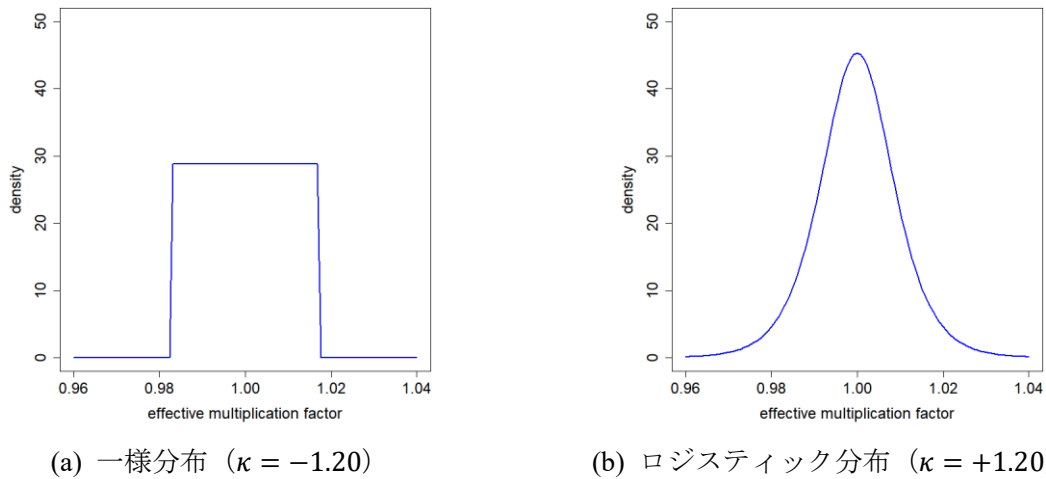


Figure 3.8 一様分布及びロジスティック分布の確率密度

N の大きさが無限とみなせるほど大きくない場合には、母集団から 100 個無作為抽出した仮想実験値 k_i の頻度分布の歪度及び尖度は真の歪度及び尖度と一致しない。理想的には不偏歪度・不偏尖度を用いて検証すべきだったが、 $N = 100$ であり N が十分大きいとみなすことで、 k_i の頻度分布の歪度 (τ) 及び尖度 (κ) を、以下の式で示すように、標本 3 次、4 次モーメントに基づいて近似的に計算することとした。

$$\tau = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^3}{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

$$\kappa = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^4}{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2\right]^2} - 3 \quad (3.7)$$

ここで、 \bar{k} は k_i の標本平均を表す。初期乱数が変わると、母集団から 100 個無作為抽出した k_i の頻度分布が変わることになり、それによって標本歪度や標本尖度の計算値が変わるので、標本歪度及び標本尖度が変化することで推定臨界下限増倍率がどのように変化するか調べた。

3.4.2 結果

ケース I の計算結果として、歪度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を Figure 3.9 に示す。Figure 3.9(a)から(e)はそれぞれ標本平均、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度、推定臨界下限増倍率を表す。横軸は歪度 (τ) を表し、縦軸は各評価値を表す。オレンジ色のバツ印はベータ分布 a を用いた結果を表し、青色のひし形はベータ分布を用いた結果を表す。図中の r は歪度と各評価値の間の相関係数を表す。Table 3.5 に歪度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化をまとめた。

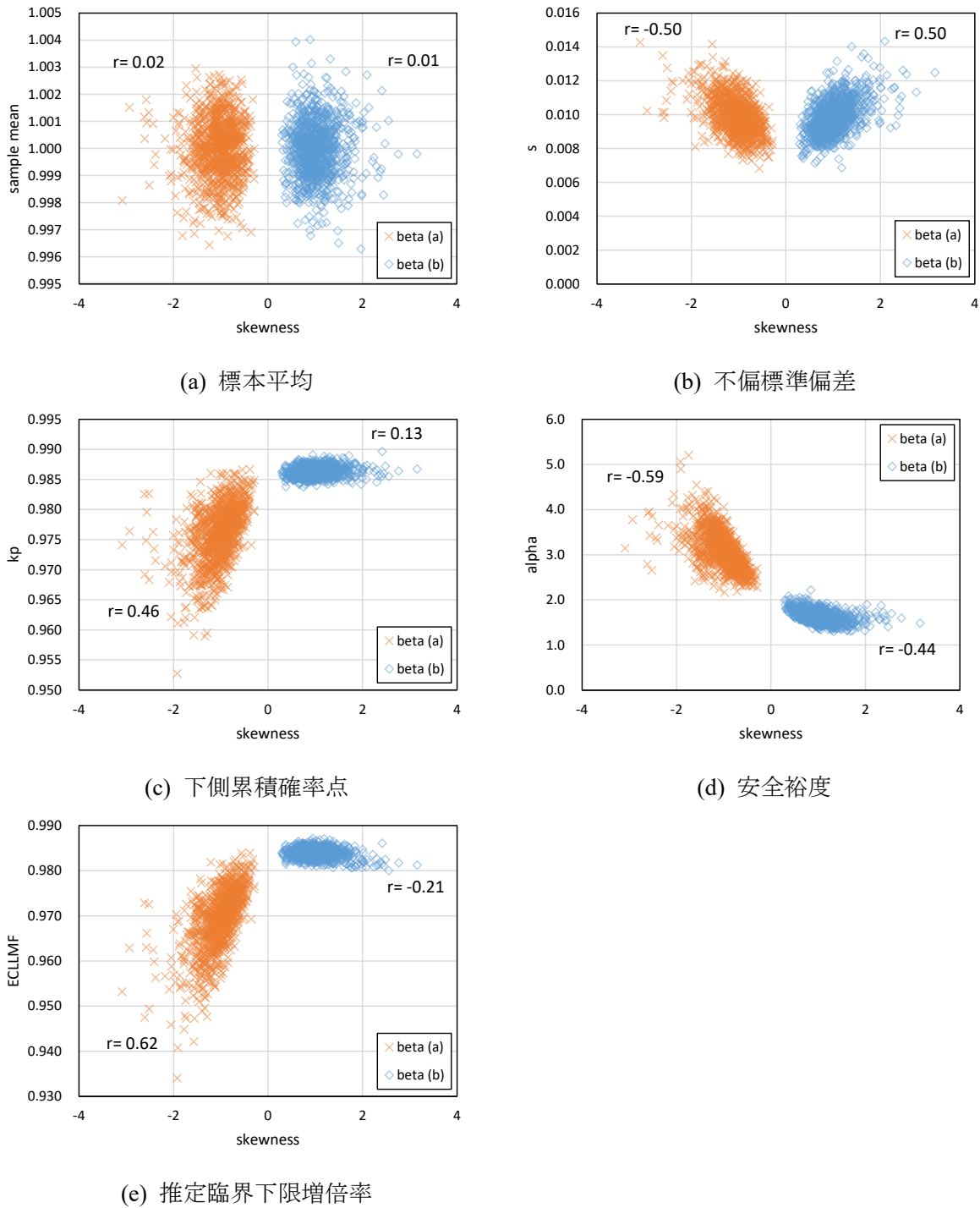


Figure 3.9 歪度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化

Table 3.5 歪度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化の評価結果

	ベータ分布 a*	正規分布†	ベータ分布 b*
	a = 168.1813 b = 3	$\mu = 1.00$ $\sigma = 0.01$	a = 3 b = 168.1813
歪度	-1.05	0.00	1.04
尖度	1.41	0.00	1.39
臨界実験数	100	100	100
標本平均	1.00002	1.00000	0.99997
不偏標準偏差	0.009912	0.010000	0.009886
下側累積確率点	0.97586	0.98040	0.98630
安全裕度	3.1164	2.3419	1.6359
推定臨界下限増倍率	0.96898	0.97658	0.98386

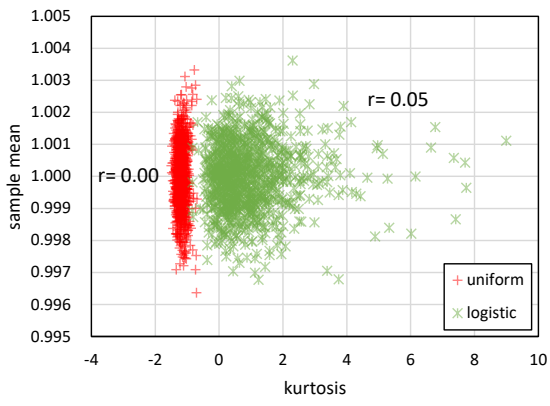
*: 初期乱数を 1000 回変えた際の平均値を記載

†: 従来法を用いて推定した結果を記載

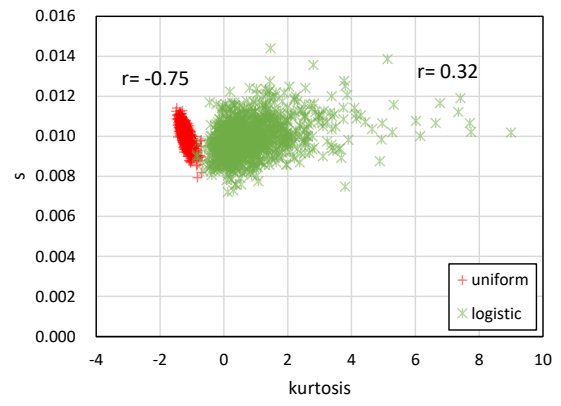
ケース I の計算結果から以下のことが確認できる。

- 歪度と標本平均の間に相関はないことが確認された。すなわち、標本平均は得られた実効増倍率の頻度分布の歪度によらないことを示唆している。
- 正の歪度と不偏標準偏差の間に正の相関があり、負の歪度と不偏標準偏差に負の相関があることが確認された。すなわち、得られた実効増倍率の頻度分布に歪度があるとき、歪度が大きくなるほど不偏標準偏差は大きくなることを示唆している。
- 負の歪度と下側累積確率点の間に正の相関があることが確認された。すなわち、得られた実効増倍率の頻度分布に負の歪度があるとき、正規分布の下側累積確率点より約0.5%dk/k小さくなった。下側累積確率点が小さくなることで、正規分布と比較して安全裕度が約33%大きくなり、結果として推定臨界下限増倍率は約0.8%dk/k小さくなった。
- 正の歪度の場合、下側累積確率点の間にわずかに正の相関があることが確認された。すなわち、得られた実効増倍率の頻度分布に正の歪度がある、負の歪度と異なり、正規分布の下側累積確率点より約0.6%dk/k大きくなった。下側累積確率点が大きくなることで、正規分布と比較して安全裕度が約30%小さくなり、結果として推定臨界下限増倍率は約0.7%dk/k大きくなった。

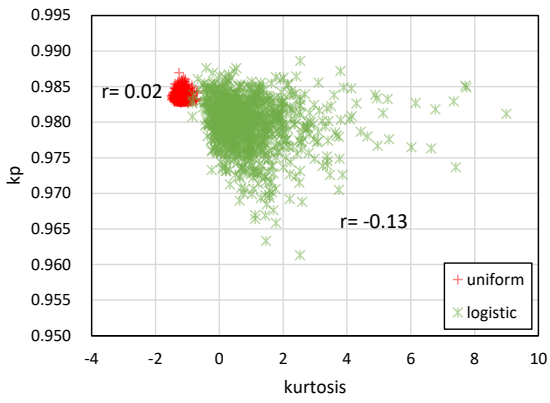
次に、ケース II の計算結果として、尖度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を Figure 3.10 に示す。Figure 3.10(a)から(e)はそれぞれ標本平均、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度、推定臨界下限増倍率を表す。横軸は尖度 (κ) を表し、縦軸は各評価値を表す。赤色の+印は一様分布を用いた結果を表し、緑色の*印はロジスティック分布を用いた結果を表す。図中の r は尖度と各評価値の間の相関係数を表す。Table 3.6 に尖度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化をまとめた。



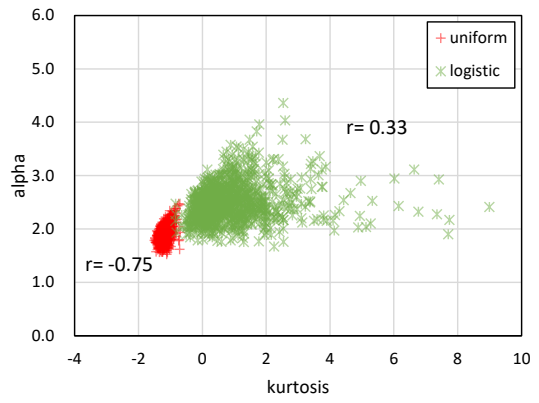
(a) 標本平均



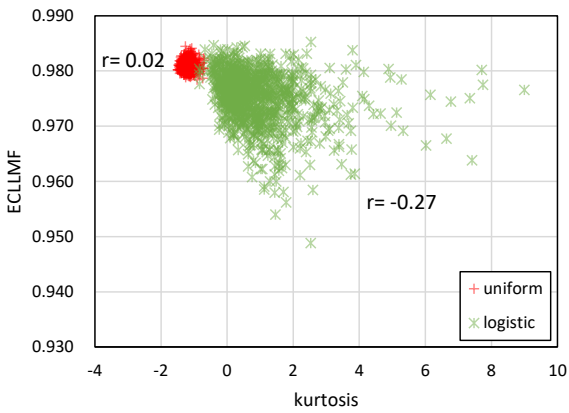
(b) 不偏標準偏差



(c) 下側累積確率点



(d) 安全裕度



(e) 推定臨界下限増倍率

Figure 3.10 尖度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化

Table 3.6 尖度の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化の評価結果

	一様分布*	正規分布†	ロジスティック分布*
	min = 0.98268 max = 1.01732	$\mu = 1.00$ $\sigma = 0.01$	$L = 1.00$ $S = 0.005513$
歪度	0.00	0.00	0.01
尖度	-1.18	0.00	0.93
臨界実験数	100	100	100
標本平均	0.99998	1.00000	0.99999
不偏標準偏差	0.009982	0.010000	0.009928
下側累積確率点	0.98368	0.98040	0.97974
安全裕度	1.9091	2.3419	2.4971
推定臨界下限増倍率	0.98096	0.97658	0.97516

*: 初期乱数を 1000 回変えた際の平均値を記載

†: 従来法を用いて推定した結果を記載

ケース II の計算結果から以下のことが確認できる。

- 歪度と同様に、尖度と標本平均の間に相関がないことが確認された。すなわち、標本平均は得られた実効増倍率の頻度分布の尖度によらないことを示唆している。
- 歪度と同様に、負の尖度と不偏標準偏差の間に負の相関があり、正の尖度と不偏標準偏差の間に正の相関があることが確認された。すなわち、得られた実効増倍率の頻度分布に尖度があるとき、尖度が大きくなるほど不偏標準偏差は大きくなることを示唆している。
- 負の尖度と下側累積確率点の間にわずかに正の相関があることが確認された。得られた実効増倍率の頻度分布に負の尖度があるとき、正規分布の下側累積確率点より約0.3%dk/k大きくなった。下側累積確率点が大きくなることで、正規分布と比較して安全裕度が約18%小さくなり、結果として推定臨界下限増倍率は約0.4%dk/k大きくなった。
- 正の尖度の場合、下側累積確率点の間に負の相関があることが確認された。得られた実効増倍率の頻度分布に正の尖度があるとき、負の尖度と異なり、正規分布の下側累積確率点より約0.07%dk/k小さくなった。下側累積確率点が小さくなることで、正規分布と比較して安全裕度が約6.6%大きくなり、結果として推定臨界下限増倍率は約0.1%dk/k小さくなった。

3.4.3 考察

本項では、3.4.2 項で得られた結果に基づき、以下の 2 点について考察を行う。

- (1) 歪度が推定臨界下限増倍率に与える影響
 - (2) 尖度が推定臨界下限増倍率に与える影響
- それぞれの考察を以下に示す。

- (1) 歪度が推定臨界下限増倍率に与える影響

負の歪度があるとき、実効増倍率の頻度分布は平均値より負側に裾を引いた形状になる。負側に裾を引いた分布のとき下側累積確率点が小さくなった原因は、正規分布と比較して負側の裾の確率密度が緩やかに減衰するためであると考えられる。一方で、正の歪度があるとき、実効増倍率の頻

度分布は平均値より正側に裾を引いた形状になる。正側に裾を引いた分布のとき下側累積確率点が大きくなった原因は、正規分布の下側累積確率点における確率密度が急激に減少したためであると考えられる。負の歪度があるとき推定臨界下限増倍率が小さくなった原因は、下側累積確率点 k_p が小さくなることで、以下の式において信頼度 $\gamma = 97.5\%$ を満たすために安全裕度 α が大きくなったためであると考えられる。正の歪度があるとき推定臨界下限増倍率が大きくなった原因も、同様に下側累積確率点が大きくなることで安全裕度が大きくなったためであると考えられる。

$$\frac{n(\hat{k} - \alpha \hat{s} \leq k_p)}{B} = \gamma \quad (2.7) \text{ 再掲}$$

(2) 尖度が推定臨界下限増倍率に与える影響

負の尖度があるとき、実効増倍率の頻度分布は正規分布と比べて両側の裾が狭い形状になる。両側の裾が狭い形状のとき下側累積確率点が大きくなった原因は、正規分布の下側累積確率点における確率密度がほぼゼロであるためと考察した。一方で、正の尖度があるとき、実効増倍率の頻度分布は正規分布と比べて両側の裾の確率密度が緩やかに減衰し、裾が広がった形状になる。両側に裾を引いた形状のとき下側累積確率点が小さくなった原因は、正規分布の下側累積確率点より小さい実効増倍率の確率密度が大きくなったためであると考えられる。尖度の変化によって推定臨界下限増倍率が変化した原因は、歪度と同様に、下側累積確率点に変化することで信頼度 $\gamma = 97.5\%$ を満たすために安全裕度に変化したためであると考えられる。

本項で議論した歪度と尖度が推定臨界下限増倍率に与える影響の大きさを Table 3.7 にまとめた。尖度より歪度の方が推定臨界下限増倍率に与える影響が大きいことが分かった。また、負の歪度・正の尖度がある実効増倍率の頻度分布に対して提案手法を適用することで、従来法より推定臨界下限増倍率が小さくなることが分かった。反対に、正の歪度・負の尖度がある場合、従来法より推定臨界下限増倍率は大きくなることが分かった。

Table 3.7 歪度及び尖度が推定臨界下限増倍率に与える影響

歪度・尖度	実効増倍率の頻度分布の形状	推定臨界下限増倍率に与える影響 [%dk/k]
負の歪度 ($\tau = -1.05$)	平均値より負側に裾を引いた形状	-0.78
正の歪度 ($\tau = +1.04$)	平均値より正側に裾を引いた形状	0.75
負の尖度 ($\kappa = -1.18$)	両側の裾が狭い形状	0.45
正の尖度 ($\kappa = +0.93$)	両側に裾を引いた形状	-0.15

3.5 Gaussian Mixture Model の検証

3.5.1 計算条件

本節では、実効増倍率の母集団が Gaussian Mixture Model (GMM) 分布に従う場合の計算コードの検証を行うことを目的とする。母集団が正規分布ではないとき、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布が自由度 $(N - 1)$ の非心 t 分布に従わないため、3.3 節のように N の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を正確に評価することは困難である。正規分布に限らず N の大きさが無限とみなせるほど大きい場合、標本平均は母平均、不偏標準偏差は母標準偏差に収束するため推定臨界下限増倍率の不確かさ分布は幅を持たないデルタ関数のような形状になり、母集団の下側累積確率点で推定臨界下限増倍率が決まる。このため、 $N \rightarrow \infty$ のときに推定臨界下限増倍率が GMM 分布の下側累積確率点と一致していることを確認することで計算コードが意図した通り実装できていることとした。臨界超過確率及び信頼度はそれぞれ $p = 2.5\%$ 、 $\gamma = 97.5\%$ とした。ブートストラップ法の反復回数は $B = 1000$ とした。

本節で扱う GMM 分布として、2 個の正規分布から成る GMM 分布を考えることとする。ここで、2 個の正規分布を比較して平均値が小さい分布を正規分布 1 と呼び、平均値が大きい分布を正規分布 2 と呼ぶことにする。正規分布 1 の平均値を k_1 、標準偏差を u_1 とする。また、正規分布 2 の平均値を k_2 、標準偏差を u_2 とする。正規分布 1 と正規分布 2 に対する重みをそれぞれ w_1 、 w_2 とする。様々な形状の GMM 分布に対して推定臨界下限増倍率を評価し計算コードの検証を行うために、以下の 4 つのケースを設定した。

- A. 2 個の正規分布の標準偏差と重みが同じ GMM 分布
- B. 正規分布 1 の重み w_1 が正規分布 2 の 0.5 倍の GMM 分布
- C. 正規分布 1 の標準偏差 u_1 が正規分布 2 の 0.5 倍の GMM 分布
- D. 正規分布 1 の重み w_1 と標準偏差 u_1 が正規分布 2 の 0.5 倍の GMM 分布

なお、ケース A から D について、正規分布 1 の平均値 k_1 と正規分布 2 の平均値 k_2 、標準偏差 u_2 、重み w_2 は固定値とする。

ケース A から D の GMM 分布のパラメータを Table 3.8 にまとめた。ケース A と比較して値が異なるパラメータのみ赤字で示した。ケース A から D の GMM 分布の確率密度を Figure 3.11 に示す。横軸は実効増倍率を表し、縦軸は確率密度を表す。Figure 3.11 に示すようにケース A から D について、GMM 分布の形状がそれぞれ異なる。

GMM 分布の下側累積確率点は、2 個の正規分布（平均値 k_i 、標準偏差 u_i ）の累積分布関数の加重和が 2.5% になる値を二分法により評価した。

$$F_i(k) = \frac{w_i}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{k - k_i}{\sqrt{2u_i^2}} \right) \right] \quad (3.8)$$

$$F(k) = \frac{\sum_{i=1}^2 F_i(k)}{\sum_{i=1}^2 w_i} \quad (3.9)$$

ここで、 $\operatorname{erf}(k)$ は誤差関数を意味する。

また、計算コードで求めた GMM 分布の標本平均と不偏標準偏差の検証のために、GMM 分布の母平均 μ と母標準偏差 σ を以下の式で評価した。

$$\omega_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^2 w_i} \quad (3.10)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^2 \omega_i k_i \quad (3.11)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \omega_i u_i^2 + \sum_{i=1}^2 \omega_i k_i^2 - \left(\sum_{i=1}^2 \omega_i k_i\right)^2} \quad (3.12)$$

ここで、 ω_i は w_i の総和が1となるように規格化した重みを表す。母平均の母標準偏差の検証に加えて、安全裕度の検証のために、 N の大きさが無限とみなせるほど大きいような $N \rightarrow \infty$ の極限における安全裕度の収束値（以降、 α_∞ と呼ぶ）を以下の式で評価した。

$$\alpha_\infty = \frac{\mu - k_p}{\sigma} \quad (3.13)$$

以上の条件の下、GMM 分布から無作為に抽出した N 個の実効増倍率に基づいて推定臨界下限増倍率を評価した。そして、 N の大きさが無限とみなせるほど大きい場合、推定臨界下限増倍率がGMM 分布の下側累積確率点と一致することを確認することで、意図通りの結果が得られていることとした。

Table 3.8 GMM 分布のパラメータ

			ケース A	ケース B	ケース C	ケース D
正規分布 1	平均値	k_1	0.99	0.99	0.99	0.99
	標準偏差	u_1	0.005	0.005	0.0025	0.0025
	重み	w_1	1.0	0.5	1.0	0.5
正規分布 2	平均値	k_2	1.01	1.01	1.01	1.01
	標準偏差	u_2	0.005	0.005	0.005	0.005
	重み	w_2	1.0	1.0	1.0	1.0
GMM 分布	母平均	μ	1.00000	1.00333	1.00000	1.00333
	母標準偏差	σ	0.01118	0.01067	0.01075	0.01037

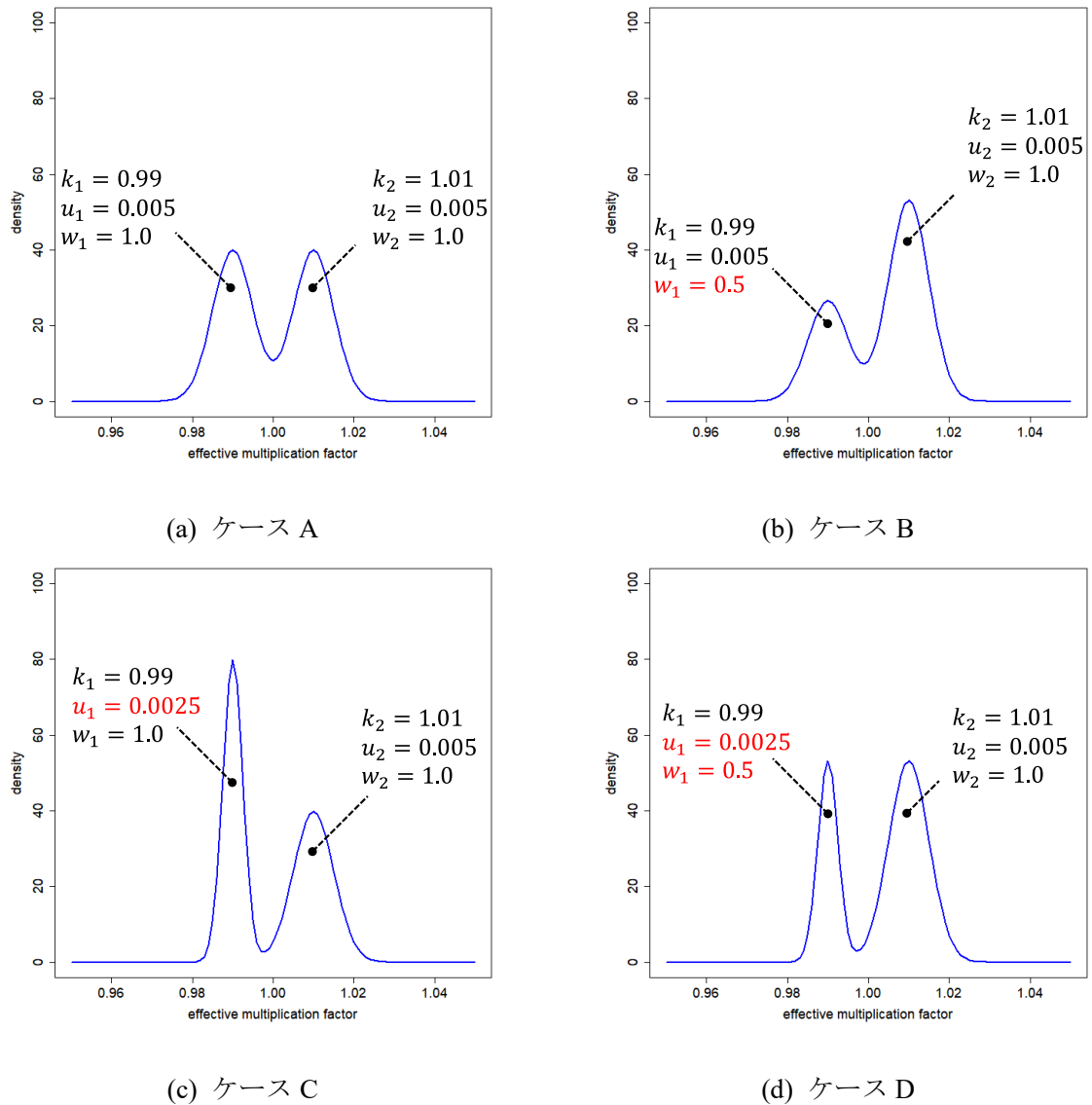


Figure 3.11 GMM 分布の確率密度

3.5.2 結果

ケース A から D の GMM 分布の母平均、母標準偏差、安全裕度の収束値、GMM 分布の下側累積確率点を Figure 3.12 に示す。Figure 3.12(a)は GMM 分布の母平均を表し、Figure 3.12(b)は GMM 分布の母標準偏差を表し、Figure 3.12(c)は安全裕度の収束値 α_∞ を表し、Figure 3.12(d)は GMM 分布の下側累積確率点を表す。横軸はケース名を表し、縦軸は各評価値を表す。正規分布 1 と正規分布 2 の重みが異なるケースは斜線の棒グラフで表し、正規分布 1 と正規分布 2 の標準偏差が同じケースは青色、異なるケースはオレンジ色の棒グラフで表した。

ケース A とケース B を比較すると、正規分布 1 の重み w_1 が 0.5 倍小さくなることで、GMM 分布の母平均は約0.33%dk/k大きくなった。ケース A とケース C を比較すると、GMM 分布の母平均は同じ値であり、正規分布 1 の標準偏差 u_1 が 0.5 倍小さくなることで、GMM 分布の下側累積確率点は約0.42%dk/k大きくなった。ケース A から D の中で、ケース D の GMM 分布の下側累積確率点 が最も大きく、ケース D の母標準偏差が最も小さかった。

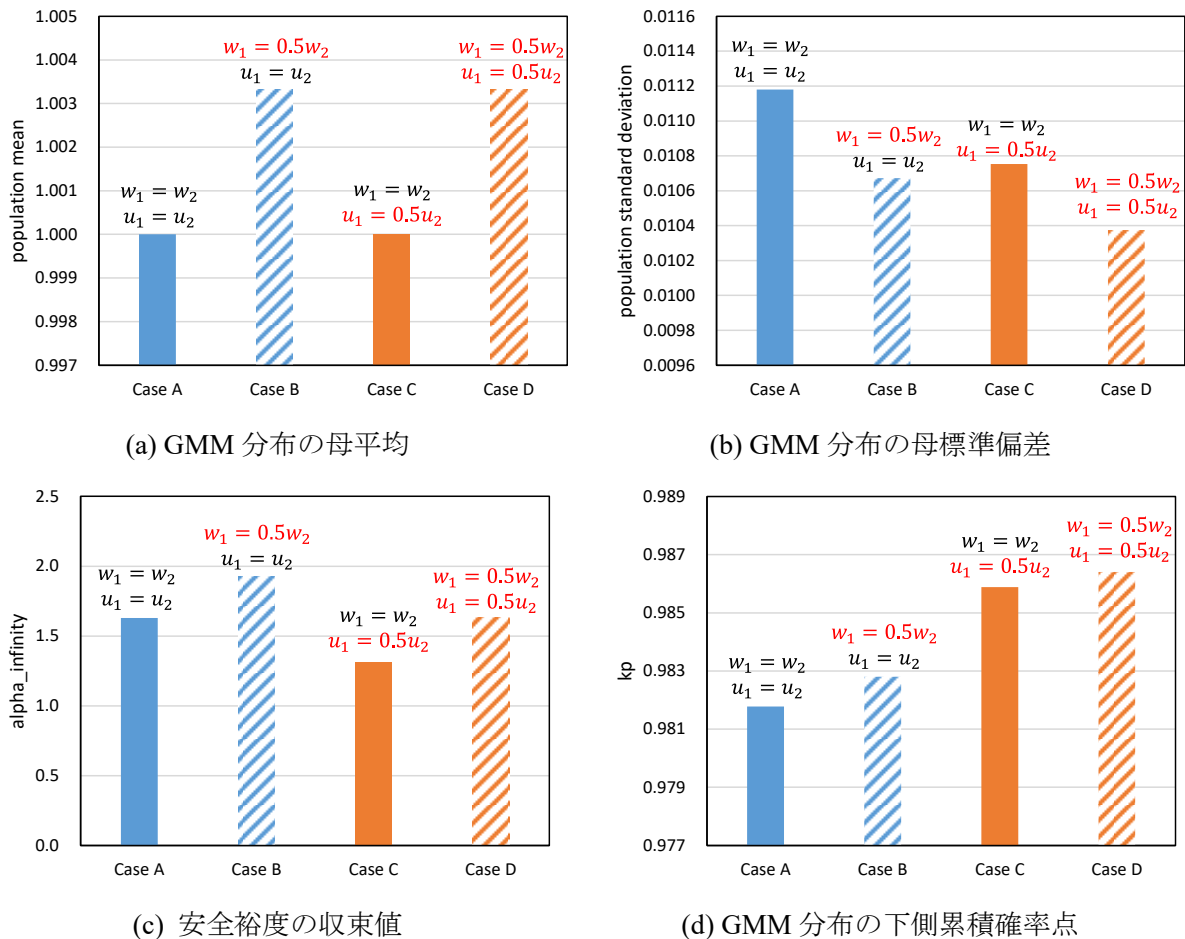
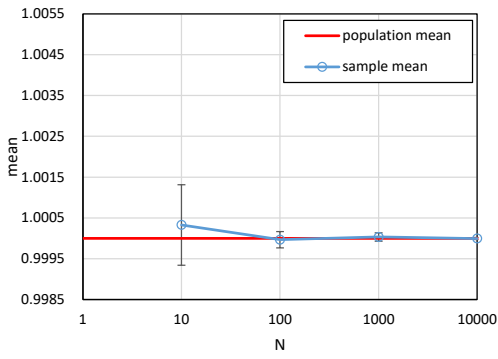


Figure 3.12 GMM 分布の母平均、母標準偏差、安全裕度の収束値、下側累積確率点

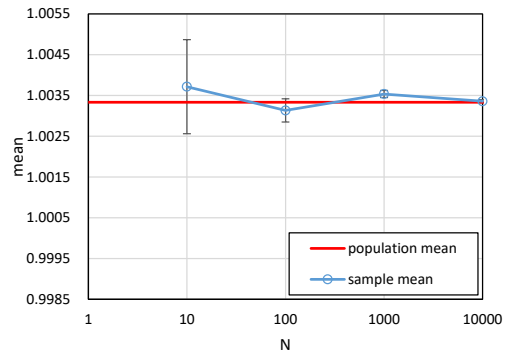
ケース A から D について、臨界実験数の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を Figure 3.13 ~ Figure 3.16 に示す。各図の(a)から(d)は標本平均、不偏標準偏差、安全裕度、推定臨界下限増倍率を表す。横軸は臨界実験数 (N) を表す。縦軸は各評価値を表し、誤差バーは初期乱数を 10 回変えた際の中心極限定理に基づいた平均値の標準偏差 (1σ) を表す。各図(a)の実線は GMM 分布の母平均を表し、各図(c)と(d)について、緑色の×印は提案手法による評価結果を表し、オレンジ色の四角は従来法による評価結果を表す。各図(d)の実線は GMM 分布の下側累積確率点を表す。

ケース A から D の計算結果から以下のことが確認できる。

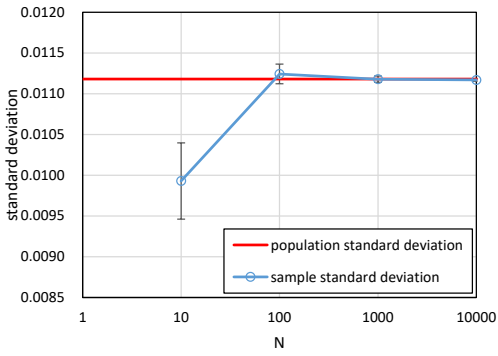
- 不確かさの範囲内で標本平均が GMM 分布の母平均と一致し、不偏標準偏差が GMM 分布の母標準偏差と一致することを確認した。また、 N が大きくなるにつれて、標本平均と不偏標準偏差の統計誤差が小さくなる傾向を確認した。
- N が大きくなるにつれて、安全裕度が小さくなる傾向を確認した。 N の大きさが無限とみなせるほど大きい場合、従来法による安全裕度は正規分布の2.5%下側累積確率点に基づいた 1.96 に収束した。提案手法による安全裕度は、 α_∞ の値に収束した。
- N が大きくなるほど安全裕度が小さくなることで、従来法と提案手法による推定臨界下限増倍率が大きくなる傾向を確認した。
- N の大きさが無限とみなせるほど大きい場合、従来法による推定臨界下限増倍率は GMM 分布の下側累積確率点より約0.07%dk/kから2.77%dk/k過小に評価された。一方で、提案手法による推定臨界下限増倍率は GMM 分布の下側累積確率点と一致することを確認した。



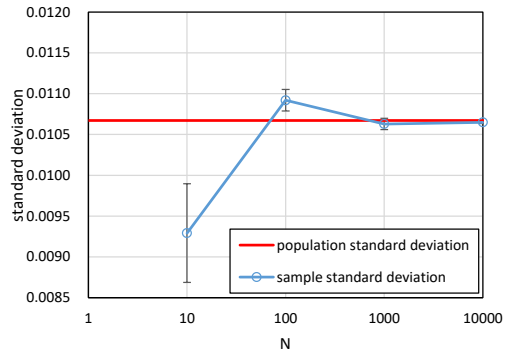
(a) 標本平均



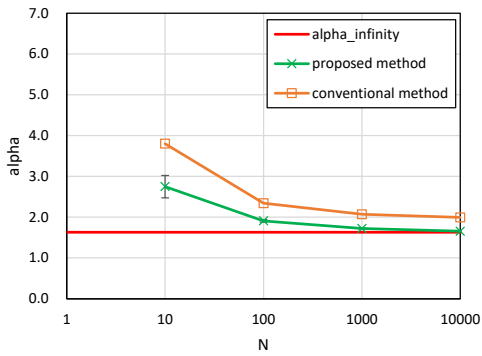
(a) 標本平均



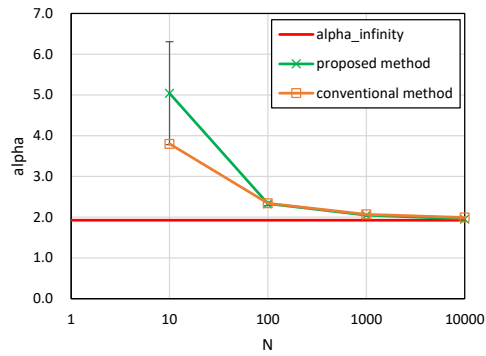
(b) 不偏標準偏差



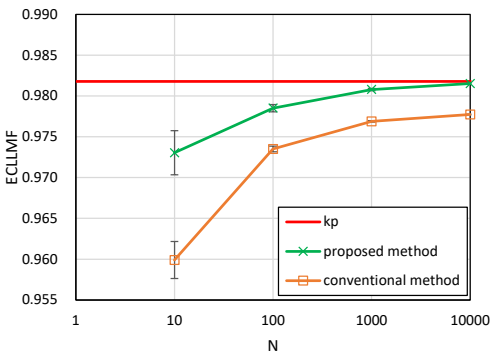
(b) 不偏標準偏差



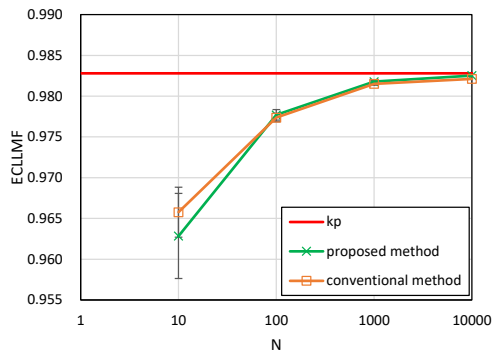
(c) 安全裕度



(c) 安全裕度



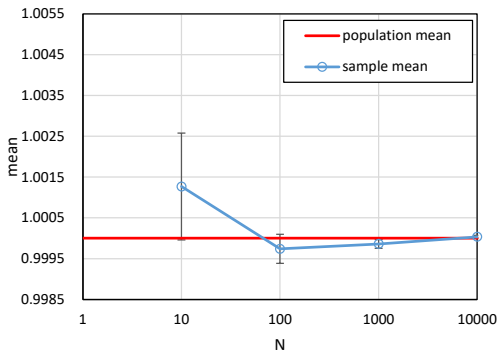
(d) 推定臨界下限増倍率



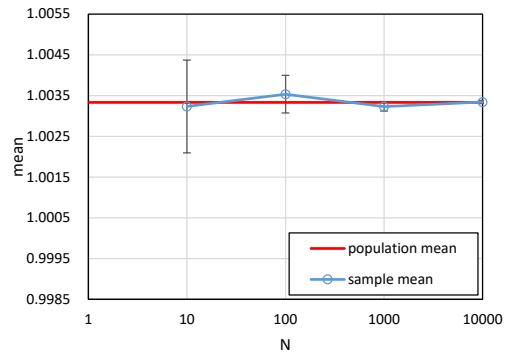
(d) 推定臨界下限増倍率

Figure 3.13 ケース A の推定臨界下限増倍率の計算結果

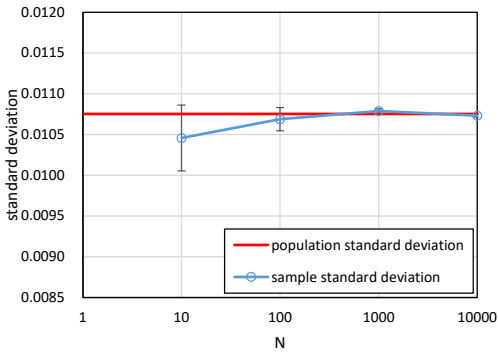
Figure 3.14 ケース B の推定臨界下限増倍率の計算結果



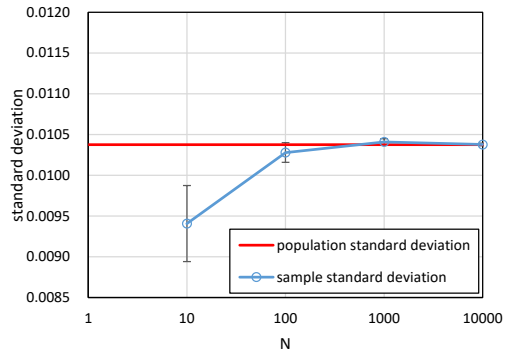
(a) 標本平均



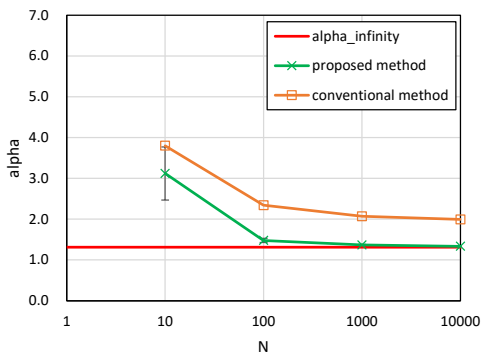
(a) 標本平均



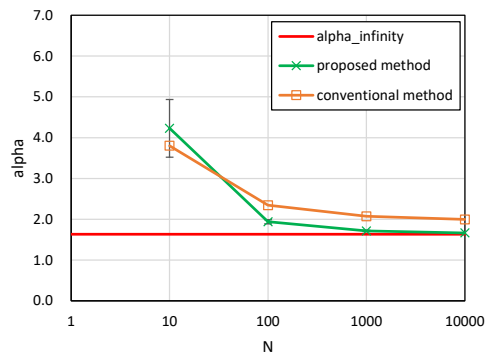
(b) 不偏標準偏差



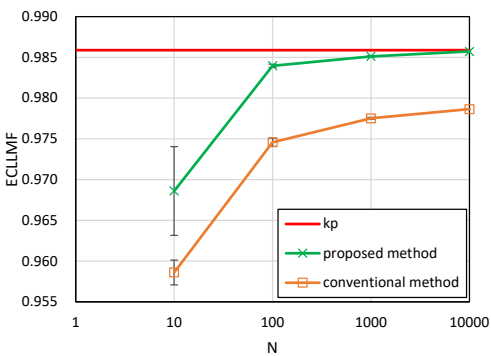
(b) 不偏標準偏差



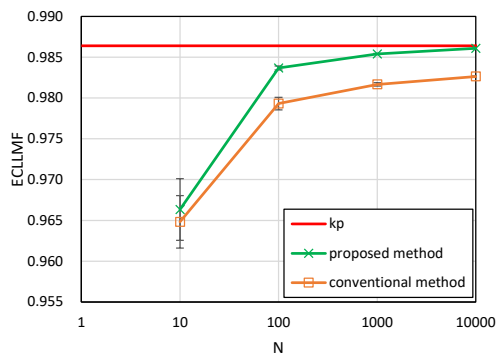
(c) 安全裕度



(c) 安全裕度



(d) 推定臨界下限増倍率



(d) 推定臨界下限増倍率

Figure 3.15 ケース C の推定臨界下限増倍率の計算結果

Figure 3.16 ケース D の推定臨界下限増倍率の計算結果

3.5.3 考察

本項では、3.5.2 項で得られた結果に基づき、正規分布の重み及び標準偏差の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化について考察を行う。

ケース A とケース B の GMM 分布を比較すると、正規分布 1 の重み w_1 が 0.5 倍小さくなることで、GMM 分布は左右対称な ($\tau = 0.00$: 歪度がない) 形状から負側に裾を引いた ($\tau = -0.50$: 負の歪度がある) 形状に変化した。これは、重みの総和に対する w_1 の割合に応じて正規分布 1 の確率密度が 1/3 倍になったためである。正規分布 1 の重みがほぼゼロとみなせるような $w_1 \rightarrow 0$ の極限では、GMM 分布は単一の正規分布 2 に収束すると考えられる (Figure 3.17 を参照)。このとき、正規分布 1 の重みが小さくなるにつれて GMM 分布の母平均は大きくなり、 k_2 に収束すると考えられる。

GMM 分布の下側累積確率点は、正規分布 1 の重み w_1 が 0.5 倍小さくなることで、約 0.10% dk/k 大きくなった。これは、GMM 分布の母平均が大きくなったためであると考えられる。2 個の正規分布のうち平均値が小さい分布の重みが小さくなり、GMM 分布の下側累積確率点が大きくなり安全裕度が小さくなることで、結果として推定臨界下限増倍率は大きくなると考えられる。以上から、選ばれた臨界実験の実効増倍率が平均値から負側に小さくなるほど代表性因子が小さくなるような条件では、代表性因子がすべて等しい (選ばれた臨界実験がすべて同一の臨界実験である) 条件と比べて推定臨界下限増倍率は大きくなる、と考えられる。

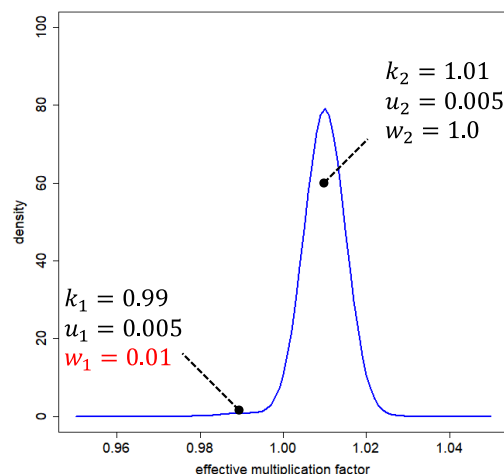


Figure 3.17 正規分布 1 の重みがゼロとみなせる場合における GMM 分布

ケース A とケース C の GMM 分布を比較すると、正規分布 1 の標準偏差 u_1 が 0.5 倍小さくなることで、GMM 分布は左右対称な ($\tau = 0.00$: 歪度がない) 形状から正側に裾を引いた ($\tau = +0.22$: 正の歪度がある) 形状に変化した。これは、 u_1 が小さくなると、相対的に k_2 付近における確率密度分布の広がり強調される形となったためであると考えられる。正規分布 1 と正規分布 2 の標準偏差がほぼゼロとみなせるような $u_i \rightarrow 0$ の極限では、GMM 分布は k_i におけるデルタ関数のような形状になると考えられる (Figure 3.18 を参照)。このとき、2 個の正規分布の標準偏差が小さくなるにつれて GMM 分布の母標準偏差は小さくなり、 k_1 と k_2 の標本標準偏差に収束すると考えられる。

GMM 分布の下側累積確率点は、正規分布 1 の標準偏差 u_1 が 0.5 倍小さくなることで、約 0.42% dk/k 大きくなった。これは、GMM 分布の母標準偏差が小さくなった効果と GMM 分布が正側に裾を引

いた形状になった効果によると考えられる。2個の正規分布のうち平均値が小さい分布の標準偏差が小さくなり、GMM分布の下側累積確率点が大きくなり安全裕度が小さくなることで、結果として推定臨界下限増倍率は大きくなると考えられる。以上から、選ばれた臨界実験の実効増倍率が平均値から負側に小さくなるほど実効増倍率の不確かさが小さくなるような条件では、実効増倍率の不確かさがすべて等しい条件と比べて推定臨界下限増倍率は大きくなる、と考えられる。

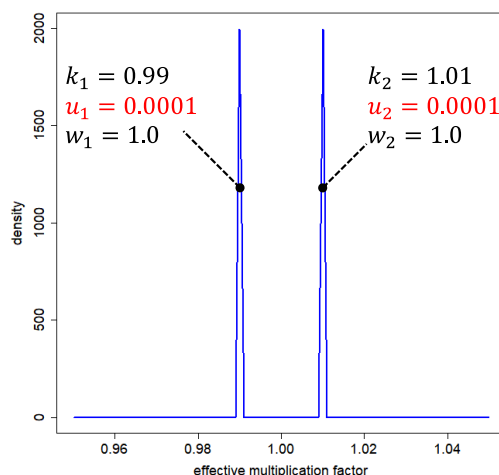


Figure 3.18 正規分布の標準偏差がゼロとみなせる場合における GMM 分布

ケース C とケース D の GMM 分布を比較すると、正規分布 1 の重み w_1 が 0.5 倍小さくなることで、正規分布 1 の確率密度が 1/3 倍になり正側に裾を引いた ($\tau = +0.22$: 正の歪度がある) 形状から負側に裾を引いた ($\tau = -0.29$: 負の歪度がある) 形状に変化した。ケース D の GMM 分布では、の下側累積確率点が最も大きかった。これは、ケース A 及び C と比べて GMM 分布の母平均がより大きく、ケース D の GMM 分布の母標準偏差が最も小さいためであると考えられる。以上から、選ばれた臨界実験の実効増倍率が平均値から負側に小さくなるほど代表性因子が小さくなり、実効増倍率の不確かさが小さくなるような条件は、推定臨界下限増倍率が大きくなる条件である、と考えられる。

3.6 本章のまとめ

本章では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コードを作成し、作成した計算コードの検証を行うことを目的とした。この目的を達成するために、実効増倍率の母集団が (1) 正規分布に従う場合、(2) Gaussian Mixture Model (GMM) 分布に従う場合、を想定し計算コードが意図通り実装できているか検証を行った。また、実効増倍率の母集団が歪度及び尖度がある分布に従う場合、歪度及び尖度が変化することで推定臨界下限増倍率がどのように変化するか調べた。

3.2 節では、提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コードを作成した。計算コードに R を用いた。作成した計算コードの概略的な流れとして、まず、選ばれた臨界体系に対する実効増倍率と実効増倍率の不確かさ、重みを用いて GMM 分布をモデル化し、臨界超過確率に基づいて GMM 分布の下側累積確率点を計算する。次に、GMM 分布から実効増倍率を平均値、実効増倍率の不確かさを標準偏差とする正規分布から、重みを確率として無作為に実効増倍率の再標本を抽出する。抽出した標本の平均値と不偏標準偏差を計算する操作を多数回繰り返すことで推定臨界下限増倍

率の不確かさ分布を得る。最後に、信頼度に基づいて安全裕度を決定し、推定臨界下限増倍率を計算する。

3.3 節では、実効増倍率の母集団が正規分布に従う場合について、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果が従来法による推定臨界下限増倍率と一致するか確認を行った。本節で得られた結果から、臨界実験数が多くなるにつれて、標本平均及び不偏標準偏差の統計誤差が小さくなることで安全裕度が小さくなり推定臨界下限増倍率が大きくなる傾向を確認した。また、臨界実験数が4以上のとき、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果が従来法による推定臨界下限増倍率と概ね一致することを確認したので、計算コードが意図通り実装できていることを確認した。本節では、検証計算で得られた結果から以下の4つの内容について考察した。まず1つ目の考察として、臨界実験数が無限とみなせるほど多いような場合には、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布は幅を持たないデルタ関数のような形状になり、母集団の下側累積確率点に収束すると考察した。2つ目の考察として、臨界実験数が比較的少ないとき不偏標準偏差が過小評価になる原因は、ブートストラップ法を用いて復元抽出された再標本が重複することで、再標本から求めた標準偏差が母標準偏差より小さくなる効果と、不偏分散の平方根で求めた不偏標準偏差が必ずしも標準偏差の不偏推定量と一致しない効果があると考察した。3つ目の考察として、下側累積確率点が階段状に増加する原因は、下側累積確率点として選ばれる実効増倍率の全体の中での順位が大きくなったためであると考察した。4つ目の考察として、推定臨界下限増倍率の統計誤差がモンテカルロ計算に伴う実効増倍率の統計誤差以下になるように、ブートストラップ法の反復回数は10万回必要であると考察した。

3.4 節では、歪度及び尖度がある分布に対して提案手法を適用したとき、歪度及び尖度の変化が推定臨界下限増倍率の評価結果に与える影響を調べた。本節で得られた結果から、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布が平均値より実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状であるとき、下側累積確率点が小さくなることで安全裕度が大きくなり、結果として推定臨界下限増倍率は従来法の推定臨界下限増倍率より小さくなることが分かった。また、歪度が推定臨界下限増倍率に与える影響が最も大きく、次いで負の尖度が与える影響が大きく、正の尖度が与える影響は最も小さいと考察した。

3.5 節では、実効増倍率の母集団がGMM分布に従う場合について、臨界実験数が無限とみなせるほど多いとき、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果がGMM分布の下側累積確率点と一致するか確認を行った。本節で得られた結果から、臨界実験数が無限とみなせるほど多い場合、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果がGMM分布の下側累積確率点と一致することが確認でき、計算コードが意図通り実装できていることが検証できた。本節では、検証計算で得られた結果から、推定臨界下限増倍率が大きくなるような条件としては、以下のようなケースが該当すると考察した。

- GMM分布を構成する各正規分布の重み（代表性因子）が、GMM分布の平均値から負側に小さくなるほど小さくなるような条件
- GMM分布を構成する各正規分布の標準偏差（実効増倍率の不確かさ）が、GMM分布の平均値から負側に小さくなるほど小さくなるような条件

以上で述べた条件と逆の場合、反対に推定臨界下限増倍率は小さくなると考えられる。

第4章 KUCA 実験による提案手法の妥当性確認

4.1 本章の概要

本章では、京都大学臨界集合体実験装置 (KUCA: Kyoto University Critical Assembly) [17], [18] の実験データを利用して、提案手法の妥当性確認を行う。第3章では、仮想的な数値問題に対する提案手法の有効性を示した。しかしながら、実際の未臨界/臨界体系に対する提案手法の妥当性について確認する必要がある。また、実際の実効増倍率の値や核的な類似性及び実効増倍率の不確かさの値を用いて、考慮する不確かさによる推定臨界下限増倍率の影響についても検討する必要がある。

KUCA は、核燃料を用いた実験、特に臨界近接実験(未臨界から臨界状態となるまで燃料板の数を増やす実験)を実施可能な施設であり、同様の実験ができる施設は国内で非常に限られる。したがって、KUCA 実験を活用して提案手法の妥当性を確認することは意義がある。また、未知の体系の実験を行う際に、臨界近接実験が必要であり、その最初のステップは確実に未臨界であることを確認する必要があるが、実験を効率的に行うには過度に深い未臨界にすることを避けたい。したがって、未臨界/臨界体系に対して推定臨界下限増倍率を評価することは意義がある。

本章で実施した研究では、実際の未臨界/臨界体系に対する提案手法の妥当性を確認することを目的とする。この目的を達成するために、2つの小目的を設定し、その小目的を達成することで本研究の目的を達成することができるとする。1つ目は、国際臨界安全ベンチマーク評価プロジェクト (ICSBEP) ハンドブック[6]に掲載された実験データから KUCA 実験と核的に類似する臨界実験を選出し、実際の実効増倍率の値や核的な類似性及び実効増倍率の不確かさの値を用いて、考慮する不確かさによる推定臨界下限増倍率の影響について調べることである。2つ目は、KUCA における臨界近接実験に対して推定臨界下限増倍率による未臨界判定ができるか確認を行うことである。

4.2 節では、KUCA において実施した臨界近接実験の実験条件を述べる。4.3 節では、KUCA 実験に対して、種々の計算コードを用いて実施した数値解析の計算条件について述べる。4.4 節では、KUCA 実験を対象体系とした提案手法による推定臨界下限増倍率の評価結果を示す。4.5 節では、考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響、未臨界判定に対する推定臨界下限増倍率の有効性、KUCA 実験における実効増倍率のバイアスについて考察を行う。4.6 節では、本章のまとめを行う。

4.2 KUCA 実験における実験条件

2019年7月9日に KUCA-C 架台[17], [18]の C35G0 (4列) 集合体を用いて臨界近接実験を行った。KUCA-C 架台の炉心構成及び検出器位置の平面図を Figure 4.1 に示す。KUCA-C 架台は、軽水を減速・反射体とする炉心である。C 架台で使用される燃料は U-Al 合金 (厚さ 0.5 mm) のプレート型燃料 (^{235}U 濃縮度 93 wt%) であり、燃料板は薄いアルミニウム層 (厚さ 0.5 mm) で被覆されている。燃料板の長さ、幅、厚さはそれぞれ 600 mm、62 mm、1.5 mm である。ウラン (U-Al 合金) を含む領域は、燃料ミート部と呼ばれ、その長さ、幅、厚さはそれぞれ 570 mm、52.8 mm、0.5 mm である。それぞれの燃料板には 8.89 g の ^{235}U が含まれる。燃料要素はアルミニウム製の燃料フレーム (C35G0) に燃料板を装荷して構成されている。C35G0 に装荷できる燃料板は最大 40 枚で、燃料ピッチは 3.49 mm である。燃料要素は炉心タンク (深さ 2 m、直径 2 m) に装荷される。炉心タンクに中性子に対する減速・反射体として軽水が注水される。制御棒 (C1、C2、C3)、安全棒 (S4、S5、S6)、Am-Be 中性子源 (N)、核分裂電離箱 (1、2、3)、BF₃ 検出器 (1、3)、³He 検出器 (2) が炉心の周りに配置されている。安全棒は実験中完全に引き抜かれている。実験時の水の温度は

24.4 °Cであった。

臨界近接実験は、未臨界状態であることを確実にするために、燃料板の数が臨界質量よりも十分に少ない基準炉心（以下、ステップ0と呼ぶ）から開始した。臨界燃料板数は、逆増倍法[17],[18]を用いて段階的に予測した。本研究では、各燃料装荷パターンをステップ1、2、3、4と表記した。ステップ0から4までの各燃料フレームに装荷された燃料板の数と制御棒位置をTable 4.1に示す。最後に、起動用中性子源を使用せずにステップ4で臨界を達成した。なお炉心をちょうど臨界状態とするため、炉心の余剰反応度（123 pcm）については、C3制御棒を183.16 mmだけ挿入することで補償した。

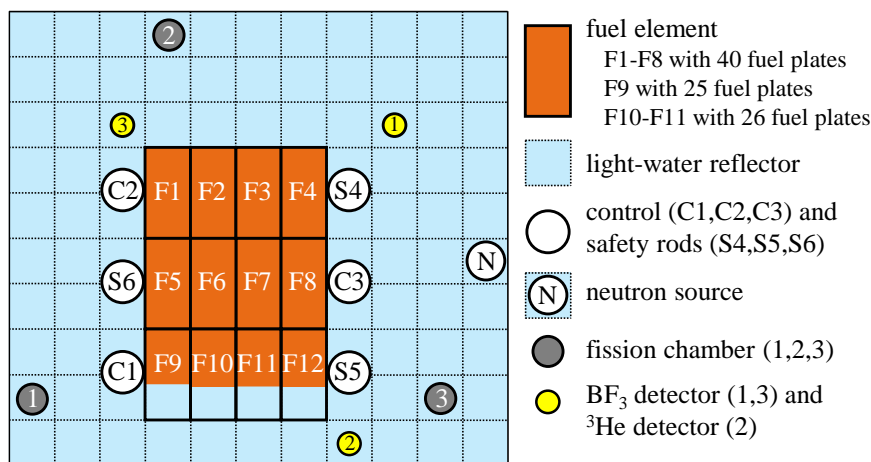


Figure 4.1 KUCA-C 架台の炉心構成及び検出器位置の平面図

Table 4.1 KUCA 臨界近接実験における燃料装荷パターン及び制御棒位置

ステップ	各燃料フレームの燃料板数			燃料板の総数	制御棒位置	
	F1-F8	F9	F10-12		C1,C2	C3
0	40	13	13	372	U.L.	U.L.
1	40	18	18	392	U.L.	U.L.
2	40	22	22	408	U.L.	U.L.
3	40	24	24	416	U.L.	U.L.
4	40	25	26	423	U.L.	466.84 mm

U.L.: Upper limit (全引き抜き)、650.00 mm.

4.3 KUCA 実験解析の計算条件

連続エネルギーモンテカルロコード MCNP6.2[19]と評価済み核データライブラリ ENDF/B-VII.1[20]を用いて、KUCA 実験の実効増倍率解析を行った。計算時の入力として与えた KUCA 幾何形状や核種組成など、MCNP 計算で必要となる入力情報は文献[17],[18]を参考にしたが、詳細な情報が得られない部分があるため、簡略化したモデルを用いた。文献[21]で報告された温度と水密度の相関式に基づいて、水密度は、実験時の水温 297.55 K を基に推定した。モンテカルロ計算における計算条件は、1 サイクルあたり 10 万ヒストリー、全サイクル数 600 とし、このうち初期の 100 サイクルは統計量の計算から除外した。KUCA 炉心と核的に類似する臨界実験については、ICSBEP

ハンドブック[6]に収録されている臨界実験のうち、Whisper-1.1 コード[5]のデータベースとして収録されている全 1101 ケースの中から選出した。ただし、選出した*i*番目の臨界実験について、実験モデルの簡略化（形状の簡略化、不純物の無視など）や製造公差等により、実効増倍率のベンチマーク実験値は必ずしもちょうど 1 ではなく、1 から僅かにバイアスがある場合もある。そこで、実効増倍率の実験値が 1 になるように実験値のバイアスを $(k_{\text{exp},i} - 1)$ により求めた上で、各*i*番目の臨界実験に対して計算で求めた実効増倍率から実験値のバイアスを引いた値を k_i とした。

$$k_i = k_{\text{calc},i} - (k_{\text{exp},i} - 1) \quad (2.15) \text{ 再掲}$$

対象体系（ステップ 4）の $c_{k,\text{acc}}$ の値は Whisper1.1 コードで採用されているデフォルト値を用いて、それぞれ 0.8212 と設定した。

核データ起因の実効増倍率不確かさ評価は、SCALE6.2.3/TSURFER モジュール[22]を用いた。実効増倍率の核データに対する感度係数(SDF 形式ファイル)は MCNP6.2 の Iterated Fission Probability (IFP)[23]を用いて評価した。そして、MCNP6.2 の出力ファイルから SDF 形式ファイルに変換した。SDF 形式ファイルの作成方法は Appendix B.2 にまとめた。核データの共分散データとして、SCALE6.2 に収録されている 56 群の共分散データ[22]を使用した。

推定臨界下限増倍率の計算は、第 3 章で作成した計算コードを用いて行った。臨界超過確率 p 及び信頼度 γ は、それぞれ 2.5%、97.5%とした[2], [3]。ブートストラップ法のリサンプリング回数 B は推定臨界下限増倍率の統計誤差がモンテカルロ法による実効増倍率の統計誤差(ヒストリー数 5000 万で統計誤差は約 10^{-4})以下になるように 10 万回とした。ステップ 0 から 4 までは燃料組成と H/U 比が一定であったため、ステップ 4 での燃料装荷パターンを代表的な対象体系として利用した。考慮する不確かさによる推定臨界下限増倍率の影響を考察するために、以下の 5 つのケースを評価した。

- I. 従来の推定臨界下限増倍率評価法に基づいて推定臨界下限増倍率を評価した。従来法では、実効増倍率 k_i の頻度分布を正規分布で近似し、安全裕度を非心 t 分布の統計的性質を用いて解析的に評価した[4], [24]。なお、従来の推定臨界下限増倍率評価法の計算手順については Appendix. A.2 にまとめた。
- II. 核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを無視して、ブートストラップ法を用いて推定臨界下限増倍率を評価した。ここで、重みを等確率とするために $w_i = 1$ とした。また、実効増倍率の不確かさは、ゼロと見なせるほど十分小さい値として $u_i = 10^{-8}$ と設定した。
- III. 核的な類似性を考慮し、実効増倍率の不確かさを無視して、ブートストラップ法を用いて推定臨界下限増倍率を評価した。重みは 2.3.1 項で述べた手順に従って評価した。実効増倍率の不確かさは $u_i = 10^{-8}$ とした。
- IV. 核的な類似性を無視し、実効増倍率の不確かさを考慮して、ブートストラップ法を用いて推定臨界下限増倍率を評価した。重みは $w_i = 1$ とした。実効増倍率の不確かさは 2.3.2 項で述べた手順に従って評価した。
- V. 核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮して、ブートストラップ法を用いて推定臨界下限増倍率を評価した。重み及び実効増倍率の不確かさはそれぞれ 2.3.1 項及び 2.3.2 項で述べた手順に従って評価した。

ケース V で評価された推定臨界下限増倍率と対象体系の実効増倍率の解析結果を比較することで、ステップ 0 から 4 までの未臨界判定を行った。各ステップにおける $k_A + 3u_A$ の解析結果が推定

臨界下限増倍率よりも小さければ、その燃料装荷パターンが未臨界状態であると判定した。ここで、 k_A 及び u_A はそれぞれ各ステップにおける実効増倍率の解析結果とモンテカルロ計算に伴う統計誤差 (1σ) である。これは、対象体系の解析に起因する不確かさを考慮するためである[2]。

4.4 結果

KUCA 実験と核的に類似する臨界実験の代表性因子を Figure 4.2 に示す。横軸は選出された*i*番目の臨界実験の実効増倍率 (k_i) を表し、縦軸は代表性因子 ($c_{k,i}$) を表す。各凡例は ICSBEP ハンドブックの登録番号を表し、順に (核分裂性物質の種類) - (物理的形態) - (中性子束のエネルギースペクトル) - (番号) で構成される。ICSBEP ハンドブックの登録番号の意味を Table 4.2 に示す。選出された核的に類似する臨界実験の数は 97 であった。Table 4.2 の表記法に基づくと KUCA-C 架台は heu-met-therm であり、選出された臨界実験は KUCA とは異なる物理的形態の炉心も多かった。Figure 4.2 中の赤丸で示すように、KUCA に最も類似する臨界実験は heu-comp-therm-002 の臨界実験であり、代表性因子の最大値は $c_{k,max} = 0.9011$ であった。heu-comp-therm-002 の臨界実験は、原子力推進ロケット研究 (Project Rover) の一環で行われた実験で、六角柱形状の黒鉛減速高濃縮ウラン体系である[6]。Figure 4.2 から分かるように、代表性の高い heu-comp-therm-002 の臨界実験の場合、実効増倍率の計算結果に比較的大きな正のバイアス (約 1000~1700 pcm) があつた。

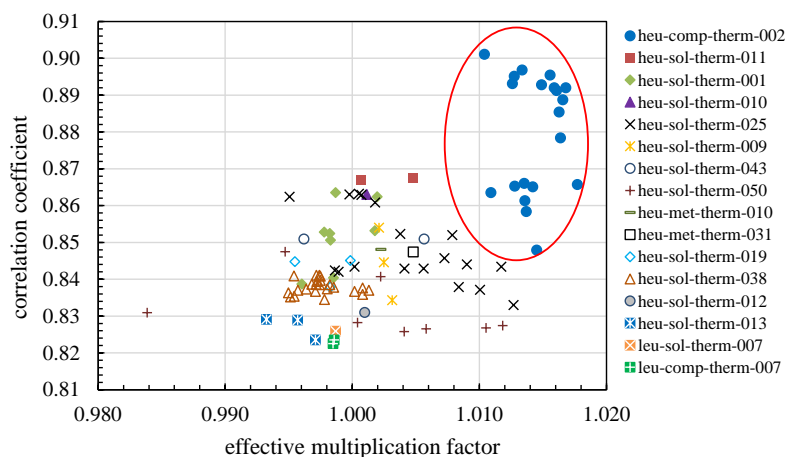


Figure 4.2 KUCA 実験と核的に類似する臨界実験の代表性因子

Table 4.2 ICSBEP ハンドブックの登録番号の意味

核分裂性物質の種類		物理的形態		中性子束のエネルギースペクトル	
leu	low enriched uranium ($^{235}\text{U} \leq 10 \text{ wt}\%$)	met	metal	fast	fast spectrum
ieu	intermediate enriched uranium ($10 \text{ wt}\% < ^{235}\text{U} < 60 \text{ wt}\%$)	comp	compound	inter	intermediate spectrum
heu	high enriched uranium ($60 \text{ wt}\% \leq ^{235}\text{U}$)	sol	solution	therm	thermal spectrum
pu	^{239}Pu	mis	miscellaneous	mixed	mixed spectrum
u233	^{233}U				
mix	^{239}Pu - ^{235}U mixed				

KUCA 実験と核的に類似する臨界実験の実効増倍率の不確かさを Figure 4.3 に示す。横軸は選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率 (k_i) を表し、縦軸は実効増倍率の不確かさを表す。赤色の+印は実効増倍率の不確かさ (u_i)、青色の丸は実効増倍率の実験誤差 ($u_{\text{exp},i}$)、オレンジ色の四角はモンテカルロ計算に伴う統計誤差 ($u_{\text{calc},i}$)、灰色の三角はデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ ($u_{\text{XS},i}$) を表す。モンテカルロ計算に伴う統計誤差は実効増倍率の実験誤差より約 100 分の 1 程度だけ小さかった。この理由は、モンテカルロ計算に伴う統計誤差を低減するために十分なサイクル数(総ヒストリー数 5000 万)を用いたためである。また、データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさは実効増倍率の実験誤差より約 10 分の 1 程度だけ小さかった。この理由は、核データ起因の実効増倍率不確かさを低減するためにデータ同化を行ったためである。以上の結果として、実効増倍率の不確かさの寄与は、実効増倍率の実験誤差が支配的であることが確認された。

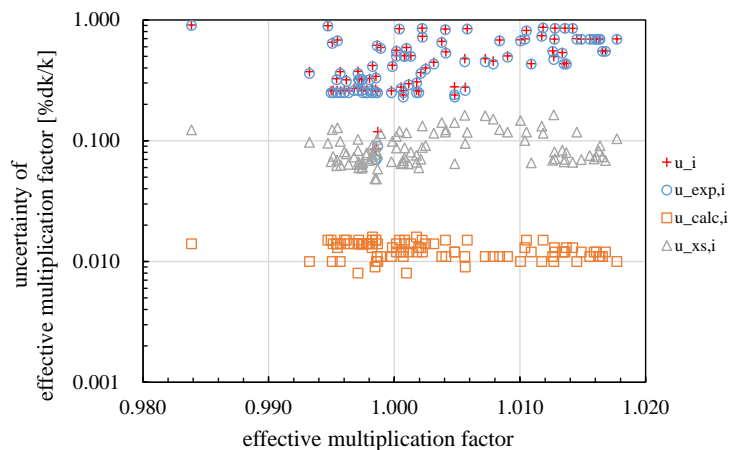


Figure 4.3 KUCA 実験と核的に類似する臨界実験の実効増倍率の不確かさ

KUCA 実験と類似する臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布 (ケース I) を Figure 4.4 に示す。横軸は選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率 (k_i) を表し、縦軸は頻度を表す。頻度分布の歪度及び尖度はそれぞれおよそ +0.44 と -0.67 であった。

KUCA 臨界体系における推定臨界下限増倍率の不確かさ分布及び Gaussian Mixture Model (GMM) 分布を Figure 4.5 に示す。Figure 4.5(a)、(b)、(c)、(d)はそれぞれケース II、III、IV、V を示す。横軸は実効増倍率を表し、縦軸は確率密度を表す。Figure 4.5 のそれぞれについて、2つの分布が示されており、左側の分布は推定臨界下限増倍率の不確かさ分布を表し、右側の分布は臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布に対してモデル化した GMM 分布の確率密度分布を表す。実線は GMM 分布の標本平均 (\bar{k})、破線はブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率を表す。ケース II の GMM 分布は重みを等確率とし、実効増倍率の不確かさをゼロと見なせるほど十分小さくしたため、Figure 4.4 に示した実効増倍率の頻度分布とほぼ同じ頻度分布とみなすことができる。ケース II の GMM 分布の歪度及び尖度はそれぞれおよそ+0.44と-0.67であり、ケース III の GMM 分布の歪度及び尖度はそれぞれおよそ-0.05と-1.40であった。ケース III の GMM 分布は、Figure 4.2 に示した代表性因子から求めた重みを考慮したことで、結果として歪度がゼロに近づき、ケース II の GMM 分布より尖度が大きくなった。ケース IV の GMM 分布の歪度及び尖度はそれぞれおよそ+0.53と+0.53であった。ケース IV の GMM 分布は、それぞれの実効増倍率(k_i)に対して Figure 4.3 に示した実効増倍率の不確かさ (u_i) を考慮したことで、ケース II の GMM 分布より平均値付近に集中し裾野が広い分布となり、正の歪度を持つ分布になった。ケース V の GMM 分布の歪度及び尖度はそれぞれおよそ+0.28と-0.30であった。ケース V の GMM 分布は、ケース III の GMM 分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮したことで、ケース III の GMM 分布と比較して正の歪度を持つ分布になり、尖度が小さくなった。

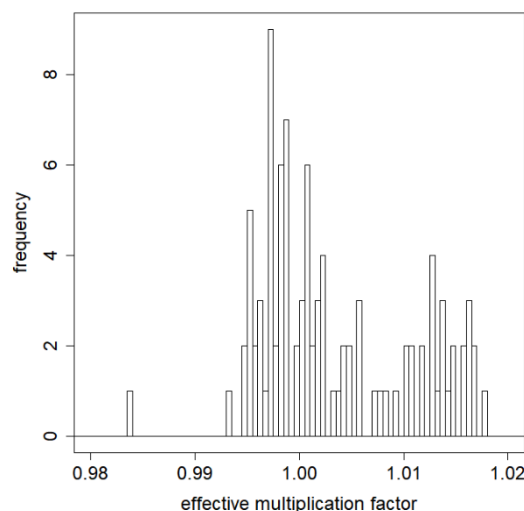


Figure 4.4 KUCA 実験と類似する臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布 (ケース I)

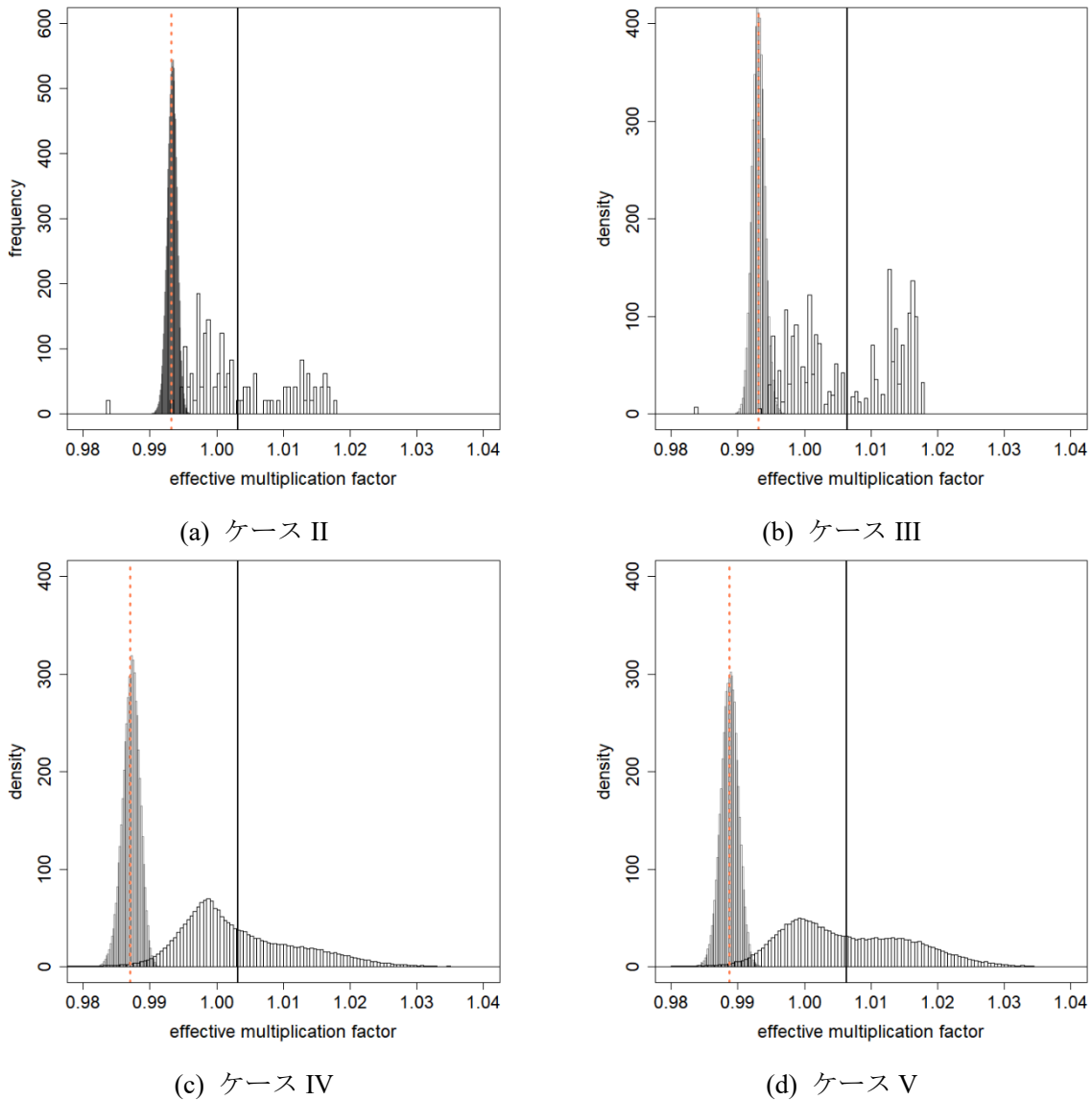


Figure 4.5 KUCA 臨界体系における推定臨界下限増倍率の不確かさ分布及び GMM 分布

各ケース I~V に対して、KUCA 臨界実験体系の推定臨界下限増倍率評価結果と、考察のために歪度、尖度、平均値、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度も併せて Table 4.3 に示す。提案手法による推定臨界下限増倍率は約 0.987 から 0.993 であった。従来法（ケース I）と比較すると、核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮した推定臨界下限増倍率（ケース V）の方が約 0.25%dk/k大きかった。

KUCA 実験の実効増倍率と未臨界判定結果を Table 3.1 に示す。ステップが進み、炉心に装荷された燃料板枚数が増加するにつれて実効増倍率 (k_A) の値は大きくなった。ケース V の推定臨界下限増倍率 (0.98868) の値を判断基準として各ステップの $k_A + 3u_A$ が 0.98868 未満のとき未臨界であると判定すると、ステップ 1 から 3 は未臨界と判定できなかったものの、ステップ 0 は未臨界と判定できた。未臨界判定に対する推定臨界下限増倍率の有効性については、4.5.2 項で考察を行う。臨界状態（ステップ 4）での実効増倍率の C/E 値（計算値/実験値）は約 1.008 であり、本研究で得られた実効増倍率評価結果は、実際の実験結果と比較して約 800 pcm だけ過大評価となった。この過大評価結果についての考察は 4.5.3 項において説明する。

Table 4.3 KUCA 実験に対する推定臨界下限増倍率の評価結果

	ケース I	ケース II	ケース III	ケース IV	ケース V
歪度	0.44	0.44	-0.05	0.53	0.28
尖度	-0.67	-0.67	-1.40	0.53	-0.30
標本平均	1.00323	1.00323	1.00639	1.00323	1.00637
不偏標準偏差 (s)	0.007252	0.007252	0.007717	0.008916	0.009463
下側累積確率点	0.98901	0.99473	0.99507	0.98956	0.99129
安全裕度 (α)	2.3486	1.3760	1.7185	1.8122	1.8692
αs	0.01703	0.00998	0.01326	0.01616	0.01769
推定臨界下限増倍率	0.98620	0.99325	0.99313	0.98707	0.98868

ケース I：従来の実効増倍率頻度分布を正規分布で近似する方法

ケース II：実効増倍率頻度分布を正規分布で近似しない方法

ケース III：実効増倍率頻度分布に対して核的な類似性を考慮する方法

ケース IV：実効増倍率頻度分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮する方法

ケース V：核的な類似性が考慮された GMM 分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮する方法

Table 4.4 KUCA 実験の実効増倍率と未臨界判定結果

ステップ	実効増倍率 (k_A)	統計誤差 (u_A)	$k_A + 3u_A$	未臨界判定
0	0.98011	0.00012	0.98047	未臨界と判定できた
1	0.99241	0.00012	0.99277	未臨界と判定できなかった
2	1.00154	0.00012	1.00190	未臨界と判定できなかった
3	1.00562	0.00013	1.00601	未臨界と判定できなかった
4	1.00829	0.00012	1.00865	臨界

未臨界： $k_A + 3u_A < 0.98868$

4.5 考察

4.5.1 考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響

本項では、4.4 節で得られた結果に基づき、以下の 4 点について考察を行う。

- 実際の実効増倍率の頻度分布考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響
- 核的な類似性考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響
- 実効増倍率の不確かさ考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響
- 核的な類似性が考慮された GMM 分布に実効増倍率の不確かさを考慮することで推定臨界下限増倍率に与える影響

それぞれの考察を以下に示す。

(1) 実際の実効増倍率の頻度分布考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響

ケース I と II を比較すると、実際の実効増倍率の頻度分布を考慮する（正規分布で近似しない）ことによって、推定臨界下限増倍率に対して約+0.71%dk/kの影響があった。3.4.3 項で述べた通り、正の歪度及び負の尖度を持つとき、従来法と比較して安全裕度は小さくなり、推定臨界下限増倍率

は1に近づく効果がある。ケースIIのGMM分布の結果は、歪度及び尖度がそれぞれ+0.44と-0.67であったため安全裕度は約41%小さくなった。ケースIIのGMM分布は重みを等確率とし、実効増倍率の不確かさをゼロと見なせるほど十分小さくしたため、ケースIとIIにおいて標本平均及び不偏標準偏差は同一である。このため、実際の実効増倍率の頻度分布考慮による安全裕度の低下に起因して推定臨界下限増倍率は大きくなったと考えられる。

(2) 核的な類似性考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響

ケースIIとIIIを比較すると、実際の実効増倍率の頻度分布に対して核的な類似性を考慮することで、推定臨界下限増倍率に対して約-0.01%dk/kの影響があった。Whisper-1.1に基づいて対象体系とよく似た臨界実験データを選出した上で、さらに選ばれた臨界実験の類似度に応じて重み付けしたとしても、推定臨界下限増倍率に対してほとんど影響を与えなかったと言える。ケースIIIにおいて、KUCA臨界炉心との代表性因子が高い臨界実験（例えば、heu-comp-therm-002）が比較的大きな正のバイアスがあることでGMM分布はより実効増倍率が大きな正側にピークを持った形状になるため、標本平均はケースIIと比べて約0.32%dk/k大きくなった。安全裕度は、ケースIIと比べて約25%大きくなった。安全裕度が大きくなった原因は、歪度が正(+0.44)から負(-0.05)に変化したためであると考えられる。不偏標準偏差は、ケースIIと比べて約6.4%大きくなった。不偏標準偏差が大きくなった原因は、標本平均が大きくなった原因と同様に、KUCA臨界炉心との代表性因子が高い臨界実験が比較的大きな正のバイアスがあることでGMM分布が2つのピークを持った形状になったためであると考えられる。結果として、標本平均の増加分より αs の増加分がわずかに大きいため、核的な類似性考慮によって推定臨界下限増倍率は小さくなったと考えられる。

(3) 実効増倍率の不確かさ考慮が推定臨界下限増倍率に与える影響

ケースIIとIVを比較すると、実際の実効増倍率の頻度分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮することで、推定臨界下限増倍率に対して約-0.62%dk/kの影響があった。実際の実効増倍率の頻度分布を考慮する影響と比較すると、影響の大きさは同程度であると言える。安全裕度は、ケースIIと比べて約32%大きくなった。安全裕度が大きくなった原因は、実効増倍率の不確かさを考慮したことでGMM分布がより実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になり下側累積確率点が小さくなったためであると考えられる。不偏標準偏差は、GMM分布の裾野が広がったため、ケースIIと比べて約23%大きくなった。ケースIIとIVのGMM分布は重みを等確率としたため、ケースIIとIVにおいて標本平均は同一である。以上により、推定臨界下限増倍率が小さくなった原因は、実効増倍率の頻度分布に実効増倍率の不確かさを考慮することで、安全裕度と不偏標準偏差が大きくなったためであると考えられる。

(4) 核的な類似性が考慮されたGMM分布に実効増倍率の不確かさを考慮することで推定臨界下限増倍率に与える影響

ケースIIIとVを比較すると、核的な類似性が考慮されたGMM分布に実効増倍率の不確かさを考慮することで、推定臨界下限増倍率に対して約-0.45%dk/kの影響があった。実際の実効増倍率の頻度分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮する影響と比較すると、核的な類似性が考慮されたGMM分布に実効増倍率の不確かさを考慮する影響の大きさはわずかに小さいと言える。ケースIIIとVで用いる重みは同じであるため、GMM分布の標本平均はほとんど変化がなかったが、安全

裕度はケース III と比べて約8.8%大きくなった。安全裕度が大きくなった原因は、考察 (3) と同様の理由により下側累積確率点が小さくなったためであると考えられる。不偏標準偏差は、GMM 分布の裾野が広がったため、ケース III と比べて約22.6%大きくなった。以上により、推定臨界下限増倍率が小さくなった原因は、核的な類似性が考慮された GMM 分布に実効増倍率の不確かさを考慮することで、安全裕度と不偏標準偏差が大きくなったためであると考えられる。

本項で議論した 4 点が推定臨界下限増倍率に与える影響の大きさを Table 4.5 にまとめた。実際の実効増倍率の頻度分布を正規分布で近似しないことが推定臨界下限増倍率の評価結果に対して最も影響が大きいことが分かった。次いで、実効増倍率の不確かさを考慮することで推定臨界下限増倍率に与える影響が大きく、よく似た臨界実験を選出した上でさらに核的な類似性を考慮して重み付けする影響はわずかであることが分かった。実効増倍率の不確かさを考慮することで、推定臨界下限増倍率は常に保守的な（小さくなる）影響があるが、実際の実効増倍率の頻度分布及び核的な類似性考慮は推定臨界下限増倍率に対して保守的あるいは非保守的な影響があるとは言えず、条件に応じて影響が変化する点に注意が必要である。

Table 4.5 考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響

比較対象	考慮する要素	推定臨界下限増倍率に与える影響 [%dk/k]
ケース I→ケース II	実際の実効増倍率の頻度分布を考慮	0.71
ケース II→ケース III	核的な類似性を考慮する	-0.01
ケース II→ケース IV	実効増倍率の不確かさを考慮する	-0.62
ケース III→ケース V	核的な類似性が考慮された GMM 分布に実効増倍率の不確かさを考慮する	-0.45

4.5.2 未臨界判定に対する推定臨界下限増倍率の有効性

推定臨界下限増倍率を用いて臨界か未臨界か判定を行う際、臨界である（陽性）と判定した場合には、以下に示す 2 種類の結果がある。

- A. 真実は臨界であり、臨界であると正しく判定される（真陽性）
- B. 真実は未臨界であるが、臨界であると誤判定される（偽陽性）

また、未臨界である（陰性）と判定した場合には、以下に示す 2 種類の結果がある。

- C. 真実は臨界であるが、未臨界であると誤判定される（偽陰性）
- D. 真実は未臨界であり、未臨界であると正しく判定される（真陰性）

臨界/未臨界判定の陽性と陰性の対応関係について Table 4.6 にまとめた。

Table 4.6 臨界/未臨界判定の陽性と陰性の対応関係

判定\真実	臨界	未臨界
臨界	真陽性	偽陽性
未臨界	偽陰性	真陰性

臨界安全の観点から、未臨界である体系を臨界と誤判定する偽陽性は許容できるが、臨界である体系を未臨界と誤判定する偽陰性は許容できない。ただし、偽陽性を犯す確率が高すぎると、未臨界判定手法としての妥当性を失う。KUCA 臨界近接実験のステップ 1 から 3 は、実際には未臨界であるが、本手法により設定した安全裕度のため、未臨界と判定できなかった。この未臨界の誤判定は偽陰性ではなく、偽陽性であるため許容できると考えられる。

KUCA 臨界近接実験のステップ 0 は実際に未臨界である炉心を正しく未臨界と判定できた。以上の結果から、KUCA 実験体系そのものに関する情報を用いずとも(燃料や炉心が異なっても)、核的に類似した過去の臨界実験データに基づくことで、未臨界判定が可能であることが分かった。

4.5.3 KUCA における実効増倍率のバイアス

KUCA における臨界状態(ステップ 4)での実効増倍率の C/E 値(計算値/実験値)は約 1.008 であり、今回の結果は、実際の実験結果と比較して約 800 pcm 過大評価されることが分かった。このような C/E 値のバイアスは、実効増倍率計算時の入力として与えた幾何形状や燃料組成の不確かさに起因していると考えられる。例えば、計算に使用する核データライブラリを JENDL-4[25]から ENDF-B/VII.1[20]に変えることで、実効増倍率計算結果が約 100 pcm 増加することが文献[26]において報告されている。したがって、要因の一つとして、計算に使用した核データライブラリの系統誤差(バイアス)が考えられる。また、H-1 の化学形態による散乱則 $S(\alpha, \beta)$ データが実効増倍率計算結果に影響を与えることも知られている。近年の核データライブラリ(ENDF-B/VIII.0)では、分子動力学計算に基づき軽水の H-1 散乱則データが改訂され、 $S(\alpha, \beta)$ の評価温度点数も増えている[27]。上述した軽水の H-1 散乱則データの入力値についても、実効増倍率の過大評価原因となり得るか、今後の課題として検討する必要がある。

4.6 本章のまとめ

本章では、KUCA を利用して、提案手法の妥当性の確認を行った。KUCA の軽水減速架台と核的に類似する ICSBEP 臨界実験を選出し、実際の実効増倍率の値と核的な類似性及び実効増倍率の不確かさの値を用いて、考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響について調べた。また、KUCA における臨界近接実験に対して推定臨界下限増倍率による未臨界判定ができるか確認を行った。

4.2 節では、KUCA で行った臨界近接実験の実験条件について述べた。実験に用いた炉心は、軽水を減速・反射体とする C 架台であり、U-Al 合金 (^{235}U 濃縮度 93 wt%) のプレート型燃料が用いられる。燃料板が最大 40 枚装荷できる燃料フレーム(C35G0)に 372 枚装荷して十分に深い未臨界状態の炉心から実験を開始した。実験時の水温は 24.4 °C であった。逆増倍法に基づき燃料板を徐々に装荷することで炉心を臨界に近づけた。最終的に、燃料板 423 枚のとき C3 制御棒のみを 183.16 mm だけ挿入することにより臨界を達成した。

4.3 節では、KUCA 実験に対する計算条件について述べた。MCNP6.2 と ENDF/B-VII.1 を用いて KUCA 炉心の実効増倍率を解析した。計算に使用した水密度は実験時の水温に基づいて推定した KUCA 臨界実験体系を対象体系として、Whisper-1.1 を用いて核的に類似する ICSBEP 臨界実験を選出した。選出された各臨界実験について核データ起因の実効増倍率不確かさを SCALE6.2.3/TSURFER により評価した。解析によって得られた実効増倍率及び実効増倍率の不確かさ、核的な類似性に基づいて、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を GMM 分布でモデル化し推定臨界下限増倍率を評価した。提案手法で考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響について調べるために、以下の 5 つのケースについて推定臨界下限増倍率を評価した。

- ケース I：従来の実効増倍率頻度分布を正規分布で近似する方法
- ケース II：実効増倍率頻度分布を正規分布で近似しない方法
- ケース III：実効増倍率頻度分布に対して核的な類似性を考慮する方法
- ケース IV：実効増倍率頻度分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮する方法
- ケース V：核的な類似性が考慮された GMM 分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮する方法

4.4 節では、選出された ICSBEP 臨界実験の代表性因子と臨界体系に対する実効増倍率予測結果の不確かさを示し、5 つのケースによる推定臨界下限増倍率の評価結果を示した。KUCA に似た臨界実験は 97 個あったが、KUCA とは異なる物理的形態の臨界実験も多かった。KUCA に最も類似する臨界実験（六角柱形状の黒鉛減速高濃縮ウラン体系）は、実効増倍率の計算結果に比較的大きな正のバイアス（約 1000～1700 pcm）があることが分かった。選出された各臨界実験の実効増倍率の不確かさは、実験誤差が最も支配的な要因であり、データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさとモンテカルロ計算に伴う統計誤差は実験誤差の約 10 分の 1 から 100 分の 1 の大きさであることが分かった。ケース II～V の提案手法による推定臨界下限増倍率は約 0.987 から 0.993 であった。従来法（ケース I）と比較すると、核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮した推定臨界下限増倍率（ケース V）は約 0.25%dk/k 大きかった。ケース V における推定臨界下限増倍率の値を判断基準として KUCA 実験の各ステップの未臨界判定を実施した結果、ステップ 1 から 3 は未臨界と判定できなかったものの、実験開始時（ステップ 0）の炉心を未臨界と判定することができた。

4.5 節では、各ケースで得られた推定臨界下限増倍率の計算結果から、提案手法で考慮している各要素が推定臨界下限増倍率に与える影響について考察し、従来法と比較して推定臨界下限増倍率が大きくなった 3 つの要因について述べた。1 つ目は、正の歪度及び負の尖度がある実効増倍率の頻度分布を正規分布で近似せずブートストラップ法を用いて推定することによって、安全裕度が小さくなったことである。2 つ目は、実効増倍率の頻度分布に対して実効増倍率の不確かさを考慮することによって、GMM 分布の裾野が広がり不偏標準偏差が大きくなったことである。3 つ目は、KUCA 臨界炉心との代表性因子が高い臨界実験が比較的大きな正のバイアスがあることで GMM 分布はより実効増倍率が大きな正側にピークを持った形状になるため、標本平均が大きくなったことである。それぞれの考慮する要素が推定臨界下限増倍率に与える影響の大きさは、実際の実効増倍率の頻度分布考慮が最も大きく、次いで実効増倍率の不確かさ考慮が大きく、（よく似た臨界実験を選出した上でさらに）核的な類似性を考慮する影響はわずかであると考察した。提案手法による推定臨界下限増倍率の値を判断基準として未臨界判定を実施した結果、臨界近接実験の最初のステップを未臨界と判定することができたことから、KUCA 実験体系そのものに関する情報を用いずとも、

核的に類似した過去の臨界実験データに基づくことで、未臨界判定が可能であることが分かった。KUCAにおける実効増倍率が過大評価となる点については、実効増倍率計算時の入力として与えた幾何形状や計算に使用した核データライブラリの系統誤差、H-1の化学形態による散乱則データなどが、実効増倍率の過大評価原因となり得るか、今後の課題として検討する必要がある。

第5章 燃料デブリ模擬体系に対する提案手法の適用

5.1 本章の概要

本章では、提案手法の適用例として、燃料デブリ模擬体系に対する推定臨界下限増倍率の評価を行う。現在、福島第一原子力発電所（1F）における燃料デブリがとり得る幅広い性状を想定して臨界計算コードと核データライブラリを用いて無限増倍率や臨界量を系統的に解析し、未臨界か否かを判断するためのデータベース「臨界リスク基礎データベース」[28]の整備作業が進められている。また、簡易に燃料デブリの臨界性を解析することができる HAND[29]が開発された。燃料デブリを評価対象として、デブリ収納缶などの臨界安全設計をするためには、解析結果の信頼性、すなわち用いた解析コード及び核データに起因する不確かさを明らかにしておく必要がある。そこで、国際臨界安全ベンチマーク評価プロジェクト（ICSBEP）ハンドブック[6]に掲載された実験データについて、推定臨界下限増倍率を評価する必要がある。

本研究では、燃料デブリ模擬体系の推定臨界下限増倍率の評価を行い、減速材対燃料体積比（ V_m/V_f 比）の変化に対する影響と評価対象とする燃料デブリの減速材及び燃焼による影響を明らかにすることを目的とする。また、Upper Subcritical Limit (USL)[5]との比較を行い、ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率の評価結果が妥当か確認することを目的とする。

5.2 節では、推定臨界下限増倍率の評価に先立って行った燃料デブリの臨界性に関する文献調査の結果を示す。5.3 節では、文献調査で得られた知見をもとに設定した燃料デブリ模擬体系の計算条件について述べる。そして、5.4 節では、燃料デブリ模擬体系を対象体系とした提案手法による推定臨界下限増倍率の評価結果を示す。5.5 節では、減速材及び V_m/V_f 比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化と減速材の変化による代表性因子の変化に関する考察を行った後、USL との比較を行う。最後に 5.6 節では、本章のまとめを行う。

5.2 燃料デブリの臨界性に関する文献調査

燃料デブリ模擬体系の計算条件を検討するためには、まず対象とする燃料デブリについて、臨界性に影響の大きい特性に係る情報を得る必要がある。本研究では、燃料デブリの臨界性に関する先行研究の文献を調査し、臨界性に影響の大きいパラメータとして燃料デブリの形状・サイズ、組成について調査し、燃料デブリ模擬体系の計算条件を検討するにあたって参考となる知見を抽出した。得られた知見を以下に示す。

(1) 燃料デブリの形状・サイズ

文献[30]に 1F 燃料デブリの概況がよくまとめられている。1F 事故では、事故機の燃料が損傷・溶融し、その大部分が燃料集合体の形状を保っていないことが確実な状況にある。原子炉圧力容器（RPV）内の炉心部では、燃料棒の一部が切り株状に残留、そこに崩落したルースデブリ（燃料ペレットや酸化した被覆管の混合物でポーラス形状を維持しているもの）が付着している可能性がある。RPV 内の下部プレナムでは、炉心から崩落したルースデブリ、溶融・凝固して形成される酸化物デブリ、ルースデブリの冷却水との反応で形成したと推定される粒子状デブリ、さらに金属系デブリ（合金あるいは化合物）の溶融・凝固物が残留している可能性がある。格納容器（PCV）内のペDESTALでは、RPV から崩落してきた炉心物質が鋼材系の構造物を巻き込むようにペDESTAL コンクリート面に堆積している。堆積高さは 1 m から 3 m 以上に及んでいる。また、溶融した炉心物質とコンクリートとの反応（MCCI: Molten Core Concrete Interaction）[31]が十分に進んだシナ

リオでは、ペDESTAL底部のコンクリート内に燃料デブリが大きく広がったと予想される。

2012年に報告された文献[32]では、燃料とコンクリートの混合物を球形状の二領域非均質体系としてモデル化し、減速材対燃料体積比 (V_m/V_f) を変化させて臨界となる球半径及び臨界質量が報告されている。新燃料-コンクリート体系において、 $V_m/V_f=7$ 、燃料の半径1 cm のとき無限増倍率は最大となった。また、別の文献[33]でも同じ計算モデルを用いて、燃料とコンクリートの体積割合を変化させて臨界となる減速材厚さ及び V_m/V_f 比が報告されている。

燃料デブリは減速材となる冷却水中に水没しており、また1F事故ではMCCIが起きたことを考えるとルースデブリがコンクリート中に分散している可能性もある。このような場合、燃料デブリの形状・サイズにより減速材対燃料体積比や体系の非均質性は大きく異なることが考えられる。これらを踏まえ、幅広い減速条件でかつ非均質体系を考慮に入れる必要がある。

(2) 燃料デブリの組成

破損燃料と混合して燃料デブリとなる物質はコンクリート、ステンレス鋼、ジルカロイ等が考えられる。コンクリート中には臨界安全の観点から重要な二酸化ケイ素や水素などの軽元素が含まれるため、コンクリートが中性子の減速材として働くことが指摘されている[34]。文献[35]では、ステンレス鋼が燃料デブリに均質に混入した場合、負の反応度効果（実効増倍率を下げる効果）があることが報告されている。ジルカロイの混入効果について調べた文献は見つからなかった。これらを踏まえ、様々な組成から成る燃料デブリを考慮に入れる必要がある。

(3) 炉心平均燃焼度と燃料デブリに含まれる可燃性毒物

2011年3月11日の事故時点において、1F1~3号機の炉心平均燃焼度は約22 GWd/tHMから26 GWd/tHMの範囲であり、約860日から1290日程度燃焼が進んでいた[36]。燃焼が進んだ燃料（核分裂性核種数が減り無限増倍率が低下した燃料）を含む燃料デブリに対して、全ての燃料を新燃料であると仮定することで保守的な評価になるため、より現実的な臨界性評価のために燃焼度を考慮する必要がある。評価対象とする燃料デブリの燃焼度を考慮するにあたり、どの程度の燃焼度の燃料で代表するのか、デブリ中のFPはどこまで考慮するのか、について検討する必要がある。

2019年の文献[37]では、1サイクル目の照射途中燃料（燃焼度5.2 GWd/t）に含まれる可燃性毒物 (Gd_2O_3) が燃料デブリの臨界性に大きく寄与する（負の反応度効果がある）ことが報告されている。燃料デブリに含まれる可燃性毒物を考慮するにあたり、どの程度の $^{155,157}Gd/^{235}U$ 比 ($^{155,157}Gd=^{155}Gd+^{157}Gd$) で代表するのかについても検討を行う必要がある。

5.3 燃料デブリ模擬体系の計算条件

本節では、文献調査で得られた知見をもとに設定した燃料デブリ模擬体系の計算条件について述べる。調査結果(1)で示した代表的な燃料デブリ臨界解析の幾何形状として、燃料と減速材から成る二領域非均質球体系を用いることとした。球形状において外部境界条件を白色境界条件[19]とすることで中性子の漏洩がない無限体系の条件を模擬した。Figure 5.1に燃料デブリ模擬体系の幾何形状を示す。燃料の半径は、調査結果(1)で示した無限増倍率が最大となる条件として、1 cm で一定とした。そして、文献[32]と同様に、減速材の半径 R を変化させ減速材対燃料体積比 (V_m/V_f 比) に対する推定臨界下限増倍率の効果を調べた。調査結果(2)で述べた燃料領域に、構造材などが混入した条件での検討については、今後の課題である。

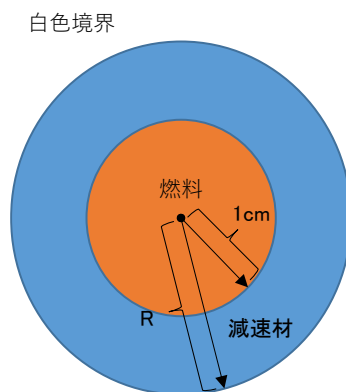


Figure 5.1 燃料デブリ模擬体系の幾何形状

調査結果(2)で示した燃料デブリの混合物として考えられる物質のうち、中性子の減速材として働くコンクリートと水を減速材として用いた。また、調査結果(3)で示した核分裂生成物 (FP) の中性子吸収効果を含む燃焼による効果を調べるため、新燃料、FP を含まない使用済み燃料、FP を含む使用済み燃料の 3 種類の燃料を用いた。新燃料の ^{235}U 濃縮度は保守的に 5 wt% とし、可燃性毒物 (Gd) は含まないものとした。使用済み燃料は、8×8 Step 2 BWR 燃料集合体[38]を 25.6 MW/t の比出力で 12 GWd/t の燃焼度まで照射させた照射燃料組成とした。燃焼度 12 GWd/t は BWR 燃料集合体中の可燃性毒物 (Gd_2O_3) が燃え尽き、反応度が最も高くなる燃焼度とした。照射後、代表的な冷却期間として 5 年間冷却させた燃料を対象とした[32]。ただし、FP として考慮する核種は反応度に対して寄与の低い核種と揮発性核種を除外した[32]。調査結果(3)で示した可燃性毒物の効果についての検討は今後の課題である。

計算に使用した燃料組成と減速材組成をそれぞれ Table 5.1、Table 5.2 に示す。コンクリートの組成は文献[39]に示された普通コンクリートの組成を用い、水の組成は文献[32]を参考にした。なお、Table 5.2 で示した FP を含む使用済み燃料 (spent fuel with FPs) の組成における ^{155}Gd は、BWR 燃料集合体に含まれる可燃性毒物 Gd_2O_3 に由来するものではなく、FP として生成された ^{155}Gd である。燃料と減速材の温度は 20 °C とした。

Table 5.1 燃料デブリ模擬体系の燃料組成

fresh fuel		spent fuel without FPs		spent fuel with FPs	
nuclide	atomic number density (atoms/barn/cm)	nuclide	atomic number density (atoms/barn/cm)	nuclide	atomic number density (atoms/barn/cm)
²³⁵ U	1.17570000000000E-3	²³⁴ U	6.98250000000000E-6	²³⁴ U	6.98250000000000E-6
²³⁸ U	2.20570000000000E-2	²³⁵ U	6.21680000000000E-4	²³⁵ U	6.21680000000000E-4
¹⁶ O	4.64473070294103E-2	²³⁸ U	2.23930000000000E-2	²³⁸ U	2.23930000000000E-2
¹⁷ O	1.76929705897089E-5	¹⁶ O	4.69651097850594E-2	¹⁶ O	4.69651097850594E-2
		¹⁷ O	1.78902149406283E-5	¹⁷ O	1.78902149406283E-5
		²³⁸ Pu	2.89500000000000E-7	²³⁸ Pu	2.89500000000000E-7
		²³⁹ Pu	9.16380000000000E-5	²³⁹ Pu	9.16380000000000E-5
		²⁴⁰ Pu	1.57550000000000E-5	²⁴⁰ Pu	1.57550000000000E-5
		²⁴¹ Pu	5.24530000000000E-6	²⁴¹ Pu	5.24530000000000E-6
		²⁴² Pu	6.74310000000000E-7	²⁴² Pu	6.74310000000000E-7
		²⁴¹ Am	1.53220000000000E-6	²⁴¹ Am	1.53220000000000E-6
				⁹⁵ Mo	1.78140000000000E-5
				⁹⁹ Tc	1.77750000000000E-5
				¹⁰³ Rh	1.02330000000000E-5
				¹³³ Cs	1.95030000000000E-5
				¹⁴³ Nd	1.50320000000000E-5
				¹⁴⁵ Nd	1.06760000000000E-5
				¹⁴⁷ Sm	4.15880000000000E-6
				¹⁴⁹ Sm	1.17290000000000E-7
				¹⁵⁰ Sm	3.45260000000000E-6
				¹⁵² Sm	1.67670000000000E-6
				¹⁵³ Eu	9.96860000000000E-7
				¹⁵⁵ Gd	9.85860000000000E-7

Table 5.2 燃料デブリ模擬体系の減速材組成

water		concrete	
nuclide	atomic number density (atoms/barn/cm)	nuclide	atomic number density (atoms/barn/cm)
¹ H	6.66503343300000E-2	¹ H	1.37402231589919E-2
² H	7.66567000000000E-6	² H	1.58030739863491E-6
¹⁶ O	3.33163089633749E-2	¹² C	1.15321536196891E-4
¹⁷ O	1.26910366250814E-5	¹⁶ O	4.59148343723883E-2
		¹⁷ O	1.74901380970835E-5
		²³ Na	9.63971309367615E-4
		²⁴ Mg	9.78580309292985E-5
		²⁵ Mg	1.23886607075957E-5
		²⁶ Mg	1.36399154390629E-5
		²⁷ Al	1.74091991797311E-3
		²⁸ Si	1.53253256128761E-2
		²⁹ Si	7.78538439394995E-4
		³⁰ Si	5.13818752317892E-4
		³⁹ K	4.29487737956076E-4
		⁴⁰ K	5.38827890991355E-8
		⁴¹ K	3.09950382217950E-5
		⁴⁰ Ca	1.45663960164027E-3
		⁴² Ca	9.72184960193578E-6
		⁴³ Ca	2.02851575929108E-6
		⁴⁴ Ca	3.13443249917126E-5
		⁴⁶ Ca	6.01041706456617E-8
		⁴⁸ Ca	2.80986997768468E-6
		⁵⁴ Fe	2.01697250255174E-5
		⁵⁶ Fe	3.16621548330423E-4
		⁵⁷ Fe	7.31217234030305E-6
		⁵⁸ Fe	9.73115903711873E-7

本章の検討で使用した計算コード及び核データライブラリは、連続エネルギーモンテカルロコード MCNP6.2[19]と核データライブラリ ENDF/B-VII.1[20]の組合せである。モンテカルロ計算における計算条件は、1 サイクルあたり 10 万ヒストリー、サイクル数 600 とし、このうち初期の 100 サイクルは統計量の計算から除外した。

燃料デブリ模擬体系と核的に類似する臨界実験は、Whisper-1.1 コード[5]を用いて ICSBEP ハンドブック[6]に掲載された臨界実験から選出した。Whisper-1.1 コードにおける計算条件は、 $w_{\min} = 25$ 、 $w_{\text{penalty}} = 100$ とし、臨界実験の各重み w_i の総和が必要な重み(w_{req})以上になるようにした[5]。また、提案手法の妥当性について考察するために、Whisper-1.1 コードを用いて Upper Subcritical Limit

(USL)、計算裕度 (CM)、核データ起因の不確かさ裕度 (MOS_{data}) を評価した。

核データ起因の実効増倍率不確かさ評価は、SCALE6.2.3/TSURFER モジュール[22]を用いた。この評価で必要となる、実効増倍率の核データに対する感度係数 (SDF 形式ファイル) については、MCNP6.2 の Iterated Fission Probability (IFP)[23]法に基づいて評価した。そして、自作の Python ツールを用いることで MCNP6.2 の出力ファイルから SDF 形式ファイルに変換した。SDF 形式ファイルの作成方法は Appendix B.2 にまとめた。核データの共分散データとして、SCALE6.2 に収録された 56 群の共分散データ[22]を使用した。また、5.5.2 項において核データ起因の実効増倍率不確かさとして寄与が大きい核種-反応の組合せを評価するために、SCALE6.2.3/TSUNAMI-1D モジュール[22]を用いた。

推定臨界下限増倍率の計算は、第 3 章で作成した計算コードを用いて行った。臨界超過確率 p 及び信頼度 γ は、それぞれ 2.5%、97.5%とした[2],[3]。ブートストラップ法のリサンプリング回数 B は推定臨界下限増倍率の統計誤差がモンテカルロ法による実効増倍率の統計誤差(ヒストリー数 5000 万で統計誤差は約 10^{-4}) 以下になるように 10 万回とした。また、5.5.3 項において USL 評価法との共通点と相違点について考察するために、臨界超過確率 p と信頼度 γ を変化させて、USL と一致する臨界超過確率及び信頼度の条件を調査した。

5.4 結果

新燃料体系の V_m/V_f 比の変化に対する無限増倍率の変化を Figure 5.2 に示す。横軸は V_m/V_f 比を表し、縦軸は無限増倍率を表す。青色の丸は新燃料-水体系を表し、オレンジ色の四角は新燃料-コンクリート体系を表す。水体系では、 V_m/V_f 比がゼロから約 2.4 まで大きくなるにつれて無限増倍率は大きくなり、以降小さくなった。コンクリート体系においても同様の傾向が見られたが、無限増倍率が最大となる V_m/V_f 比はコンクリート体系の方が約 3.5 倍大きかった。無限増倍率の最大値を比較すると、水体系の方がコンクリート体系より約 11% dk/k 大きかった。無限増倍率が最も大きい V_m/V_f 比の条件を、中性子の減速が最適な状態であるとして、以下、最適減速条件と呼ぶ。

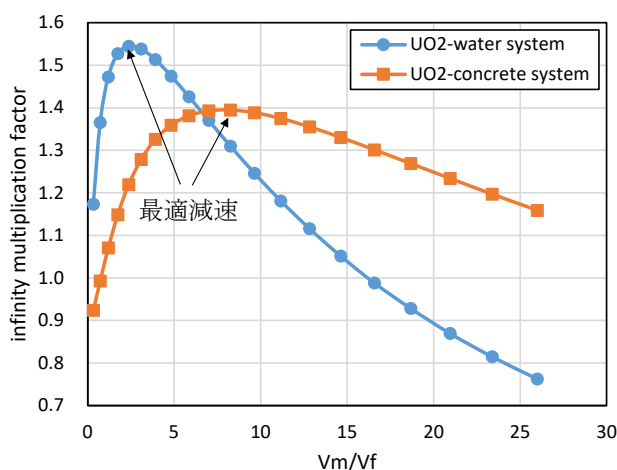
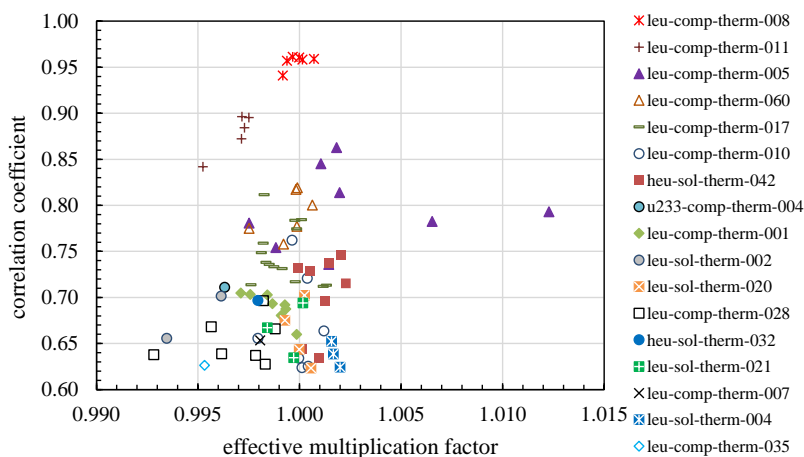


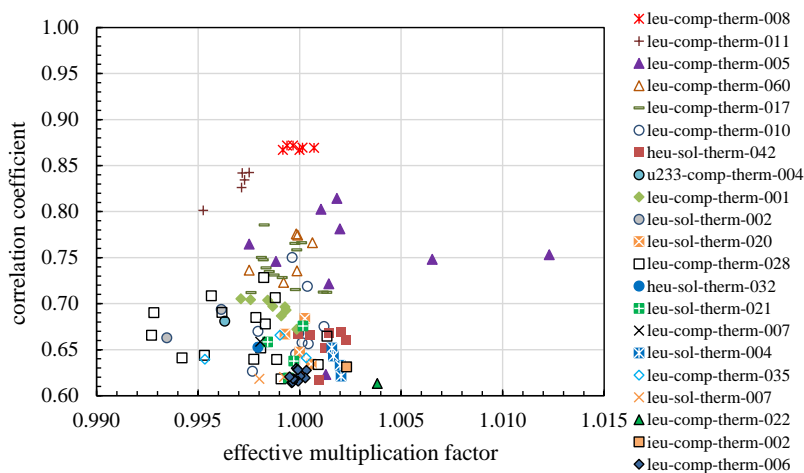
Figure 5.2 新燃料体系の V_m/V_f 比の変化に対する無限増倍率の変化

最適減速条件における新燃料体系と核的に類似する臨界実験の代表性因子を Figure 5.3 に示す。Figure 5.3(a)、(b)はそれぞれ新燃料-水体系、新燃料-コンクリート体系を表す。横軸は選出された

i 番目の臨界実験の実効増倍率 (k_i) を表し、縦軸は代表性因子 ($c_{k,i}$) を表す。代表性因子の最大値は、新燃料-コンクリート体系の方が新燃料-水体系より約9.3%小さかった。水体系の類似体系として選ばれた 85 個の臨界実験はコンクリート体系の類似体系としても選ばれた。コンクリート体系では、代表性因子の最大値が水体系より低いため、追加で 32 個の臨界実験が選ばれた。追加で選ばれた臨界実験の実効増倍率は約 0.993 から 1.004 の範囲であり、代表性因子は約 0.61 から 0.67 の範囲であった。



(a) 新燃料-水体系 (最適減速条件)

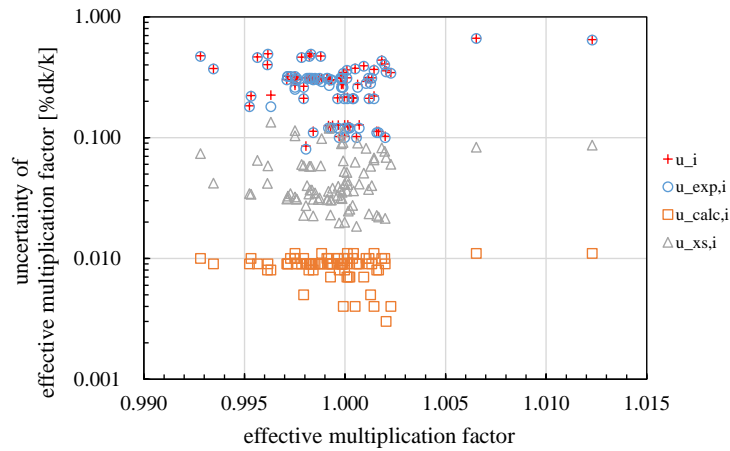


(b) 新燃料-コンクリート体系 (最適減速条件)

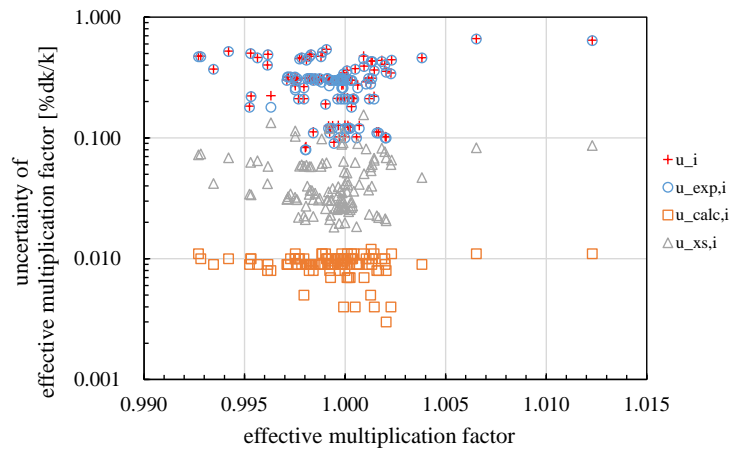
Figure 5.3 最適減速条件における新燃料体系と核的に類似する臨界実験の代表性因子

最適減速条件における新燃料体系と核的に類似する臨界実験の実効増倍率の不確かさを Figure 5.4 に示す。横軸は選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率 (k_i) を表し、縦軸は実効増倍率の不確かさを表す。赤色の+印は実効増倍率の不確かさ (u_i)、青色の丸は実効増倍率の実験誤差 ($u_{\text{exp},i}$)、オレンジ色の四角はモンテカルロ計算に伴う統計誤差 ($u_{\text{calc},i}$)、灰色の三角はデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ ($u_{\text{XS},i}$) を表す。モンテカルロ計算に伴う統計誤差は実効増倍率の実験誤差より約 100 分の 1 程度だけ小さく、データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさは実効増倍率の実験誤差より約 10 分の 1 程度だけ小さかった。以上の結果として、4.4 節で示した

KUCA 実験解析と同様に、実効増倍率の不確かさの寄与は、実効増倍率の実験誤差が支配的であることが確認された。



(a) 新燃料－水体系（最適減速条件）



(b) 新燃料－コンクリート体系（最適減速条件）

Figure 5.4 最適減速条件における新燃料体系と核的に類似する臨界実験の実効増倍率の不確かさ

最適減速条件における新燃料体系に対する提案手法の適用結果を Figure 5.5 に示す。Figure 5.5(a) は新燃料－水体系に対する適用結果を表し、Figure 5.5(b)は新燃料－コンクリート体系に対する適用結果を表す。Figure 5.5 のそれぞれについて、3つの分布が示されている。青色の分布は、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を表し、赤色の分布は、代表性因子及び実効増倍率の不確かさに基づいてモデル化した GMM 分布を表し、左側の分布は、GMM 分布に基づいて推定した推定臨界下限増倍率の不確かさ分布を表す。実線は GMM 分布の標本平均(\bar{k})を表し、破線は GMM 分布の下側累積確率点(k_p)を表し、赤色の点線は推定臨界下限増倍率(k_{sub})を表す。水体系における GMM 分布の歪度及び尖度は、それぞれおよそ+1.15と+5.49であり、コンクリート体系における GMM 分布の歪度及び尖度は、それぞれおよそ+0.74と+4.77であった。

最適減速条件における新燃料体系に対する推定臨界下限増倍率の計算結果と、考察のために歪度、尖度、平均値、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度も併せて Table 5.3 に示す。提案手法によ

る推定臨界下限増倍率は、約 0.990 であった。水体系とコンクリート体系を比較すると、推定臨界下限増倍率はコンクリート体系の方が水体系より約0.08%dk/k小さかった。

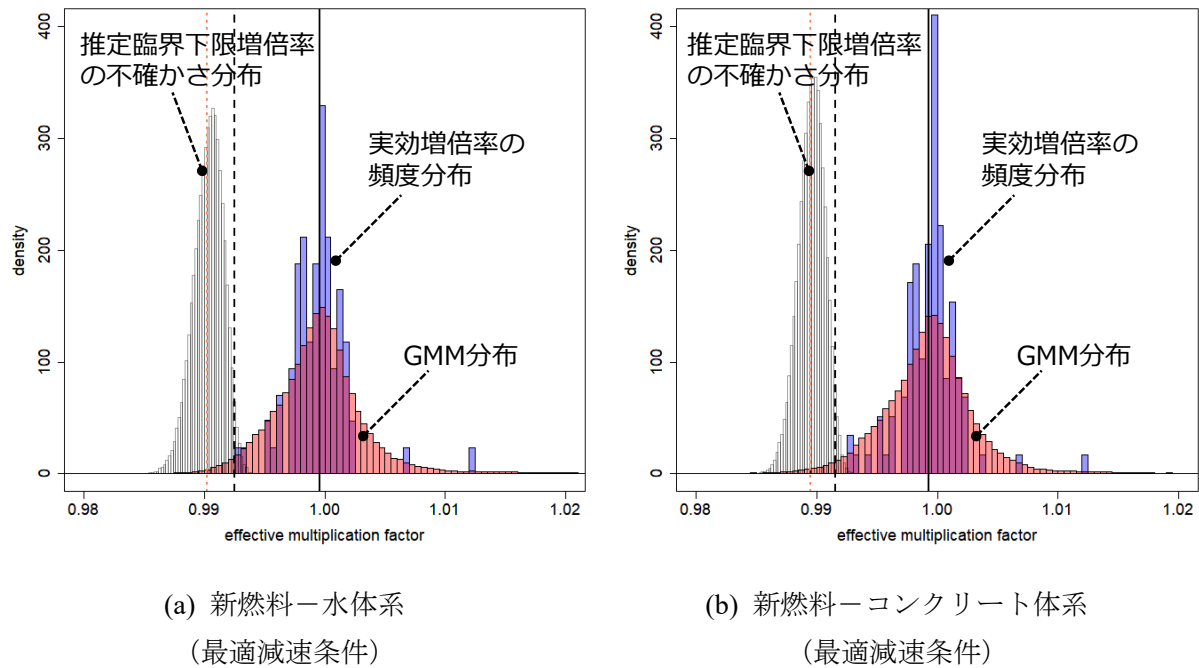
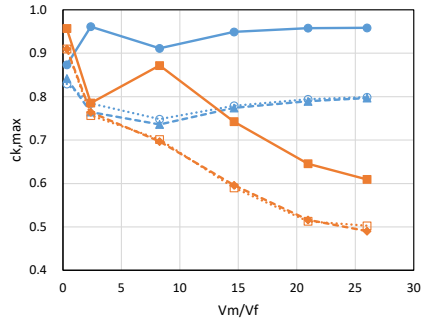


Figure 5.5 最適減速条件における新燃料体系と核的に類似する臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布、及び推定臨界下限増倍率の不確かさ分布と GMM 分布

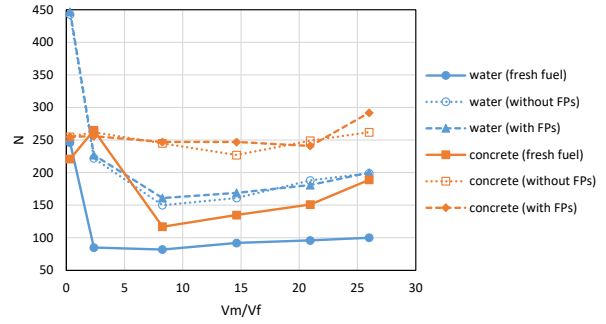
Table 5.3 最適減速条件における推定臨界下限増倍率の計算結果

	新燃料－水体系	新燃料－コンクリート体系	相対差異
歪度	1.15	0.74	
尖度	5.49	4.77	
臨界実験数	85	117	
標本平均	0.99959	0.99933	-0.03%
不偏標準偏差	0.003916	0.004032	+3.0%
下側累積確率点	0.99252	0.99159	
安全裕度	2.381	2.438	+2.4%
推定臨界下限増倍率	0.99026	0.98950	-0.08%

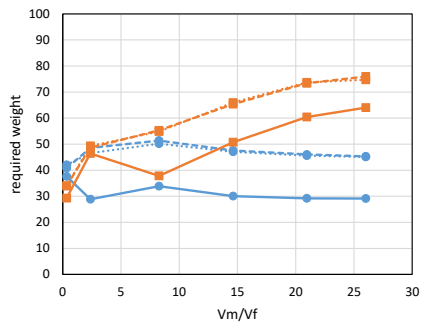
V_m/V_f 比の変化に対する類似の臨界実験選出時に使用したパラメータの変化を Figure 5.6 に示す。Figure 5.6(a)、(b)、(c)、(d)はそれぞれ代表性因子の最大値、選出された臨界実験数、必要な重みの総和、選出された臨界実験の重みの総和を示す。横軸は V_m/V_f 比を表し、縦軸は各パラメータの値を表す。実線は新燃料、点線は FP を含まない使用済み燃料、破線は FP を含む使用済み燃料を表す。青色は水体系を表し、オレンジ色はコンクリート体系を表す。Figure 5.6(c)と(d)を比較した結果、すべての体系において、選出された臨界実験の重みの総和は必要な重みの総和以上であった。2.3.1 項の(2.13)式で述べた条件を満足するように、Whisper-1.1 により ICSBEP 臨界実験が選出されていることを確認した。



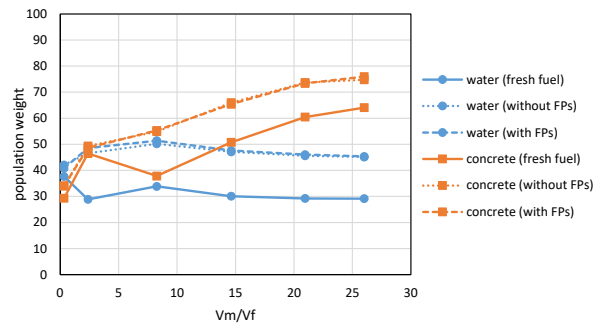
(a) 代表性因子の最大値



(b) 選出された臨界実験数



(c) 必要な重みの総和



(d) 選出された臨界実験の重みの総和

Figure 5.6 Vm/Vf 比の変化に対する類似の臨界実験選出時に使用したパラメータの変化

Vm/Vf 比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を Figure 5.7 に示す。Figure 5.7(a)、(b)、(c)、(d) はそれぞれ標本平均、不偏標準偏差、下側累積確率点、安全裕度、推定臨界下限増倍率を示す。推定臨界下限増倍率は約 0.988 から 0.992 の範囲であり、Vm/Vf 比が大きいくほど推定臨界下限増倍率が小さくなる傾向を確認した。また、Figure 5.7(d) に示すように、安全裕度は約 1.9 から 2.6 の範囲であり、Vm/Vf 比が大きくなるにつれて安全裕度は大きくなった。新燃料と使用済み燃料を比較すると、推定臨界下限増倍率は使用済み燃料の方が新燃料より約 0.1%dk/k 大きかった。また、FP 考慮の有無による推定臨界下限増倍率に有意な差がないことが確認された。

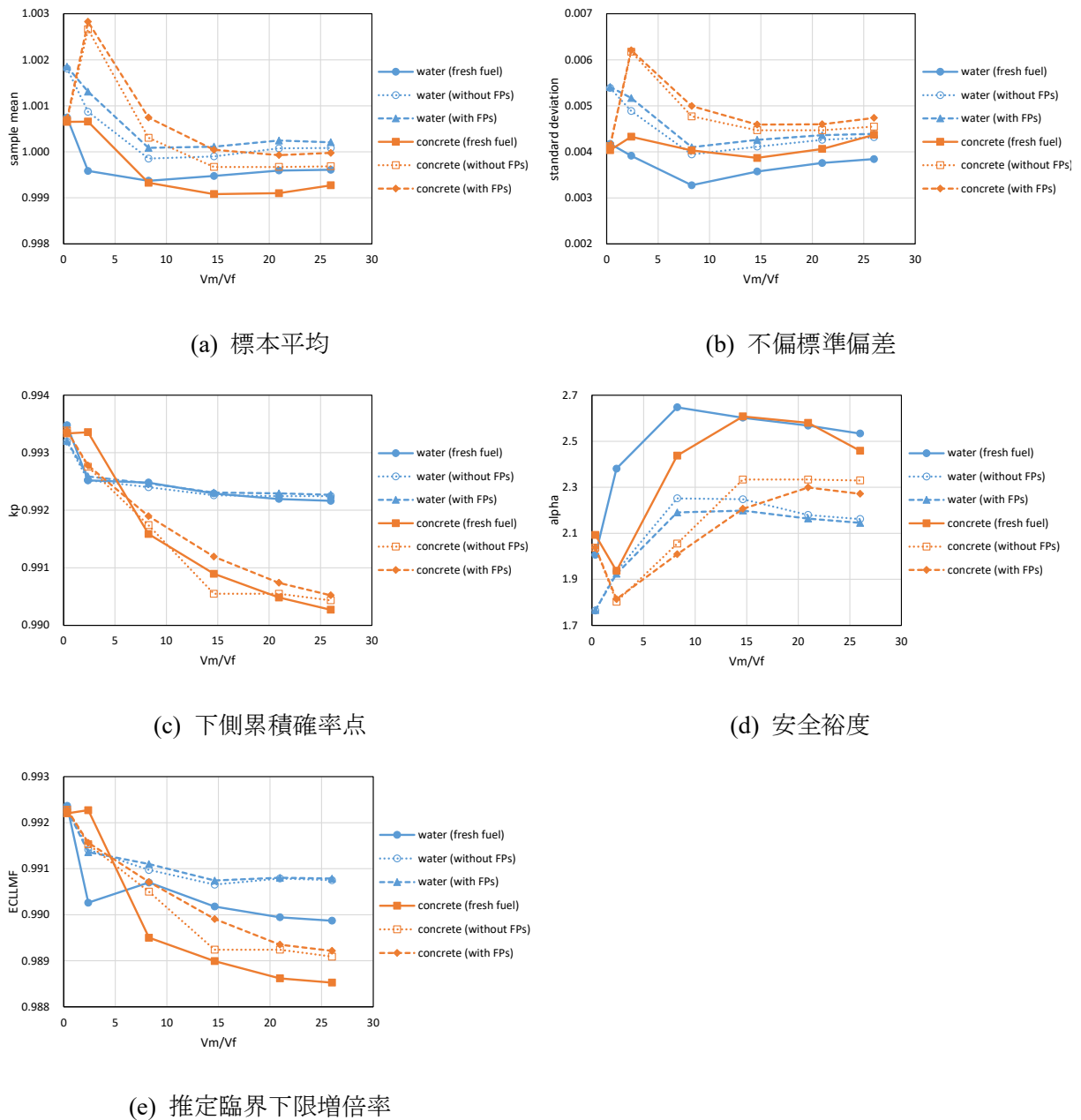


Figure 5.7 Vm/Vf 比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化

5.5 考察

5.5.1 減速材及び減速材対燃料体積比の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化

本項では、5.4 節で得られた結果に基づき、以下の 2 点について考察を行う。

- (1) 減速材を水からコンクリートに変えたことで推定臨界下限増倍率が小さくなった原因
- (2) Vm/Vf 比が大きくなるにつれて安全裕度が大きくなった原因

それぞれの考察を以下に示す。

- (1) 減速材を水からコンクリートに変えたことで推定臨界下限増倍率が小さくなった原因

最適減速条件において新燃料-水体系より新燃料-コンクリート体系の推定臨界下限増倍率は小さくなった。この原因は、Table 5.3 で示すように、標本平均が下がった効果（約 $-0.03\%dk/k$ ）より不偏標準偏差と安全裕度が大きくなった効果（約 $-0.05\%dk/k$ ）が大きいと考えられる。不偏

標準偏差が大きくなった原因は、追加で選ばれた代表性の低い臨界実験の実効増倍率（例えば、leu-comp-therm-028）が平均値より小さく、GMM 分布の広がりが増えたと考えられる。安全裕度が大きくなった原因は、平均値より小さい実効増倍率が増えた結果、GMM 分布の歪度がやや減少したためであると考えられる。すなわち、GMM 分布が、より実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になることで、下側累積確率点が下がるため安全裕度が大きくなったと考えられる。

(2) V_m/V_f 比が大きくなるにつれて安全裕度が大きくなった原因

新燃料-水体系における安全裕度及び臨界実験数と GMM 分布の歪度及び尖度の変化を Figure 5.8 に示す。考察のために従来法による安全裕度も併せて示す。Figure 5.8(a)は安全裕度及び臨界実験数を表し、Figure 5.8(b)は GMM 分布の歪度及び尖度を表す。従来法による安全裕度は、臨界実験数が多くなるにつれて小さくなった。これは、多くの臨界実験を選ぶことで実効増倍率の標本平均と不偏標準偏差の統計精度が良くなるため、統計精度に関連した安全裕度が小さくなったためである。提案手法による安全裕度も、従来法と同様に、臨界実験数が多くなるにつれて小さくなった。提案手法と従来法を比較すると、安全裕度は提案手法の方が従来法より約10%大きかった。また、歪度と尖度を比較すると、尖度は歪度の約 4 倍から 9 倍であり GMM 分布は強い正の尖度を持つことが分かった。安全裕度が大きくなった原因は、GMM 分布がより実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になることで、下側累積確率点が下がったためであると考えられる。

新燃料-コンクリート体系における安全裕度及び臨界実験数と歪度及び尖度の変化を Figure 5.9 に示す。水体系と同様に、 V_m/V_f 比が大きくなり多くの臨界実験を選ぶことで、実効増倍率の標本平均と不偏標準偏差の統計精度が良くなるため、統計精度に関連した安全裕度が小さくなったと考えられる。提案手法と従来法を比較すると、安全裕度は提案手法の方が従来法より約14%大きかった。また、歪度と尖度を比較すると、尖度は歪度の約 4 倍から 9 倍であった。水体系と同様に、 V_m/V_f 比が大きくなり強い正の尖度を持つことで GMM 分布が、より実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になることで、下側累積確率点が下がったため安全裕度が大きくなったと考えられる。

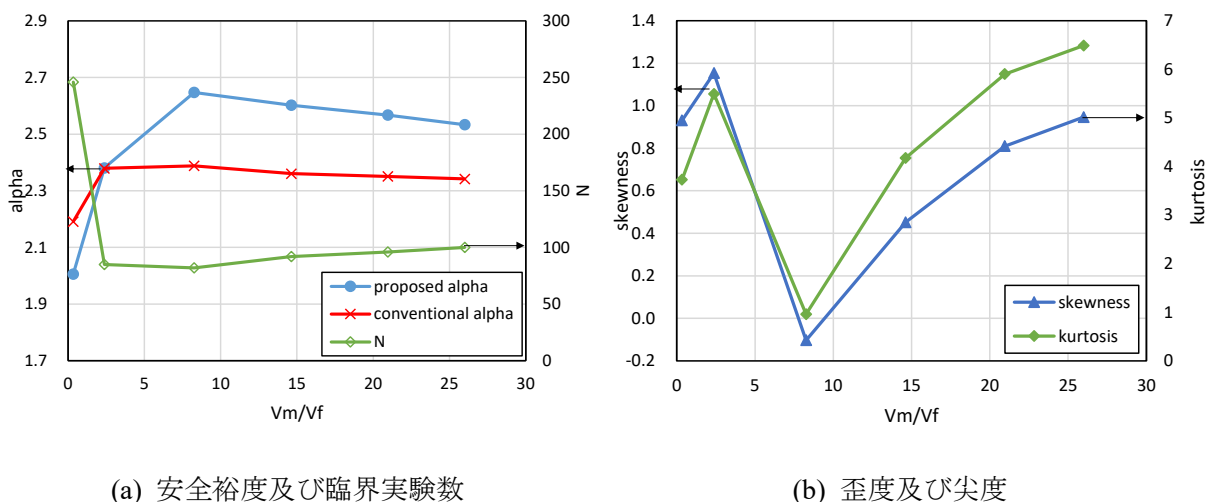


Figure 5.8 新燃料-水体系における安全裕度及び臨界実験数と歪度及び尖度の変化

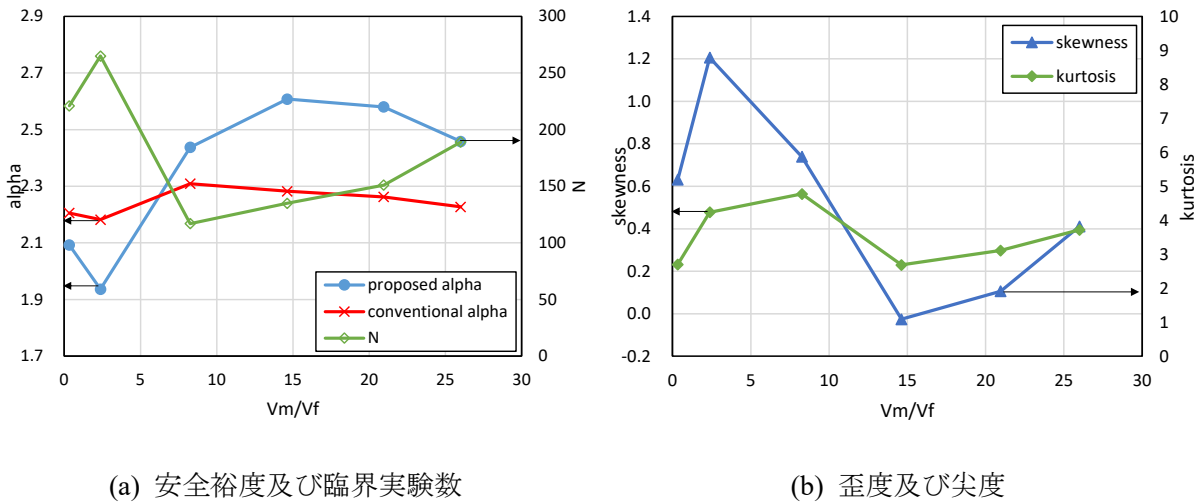


Figure 5.9 新燃料-コンクリート体系における安全裕度及び臨界実験数と歪度及び尖度の変化

5.5.2 減速材の変化による代表性因子の変化

本項では、最適減速条件において減速材を水からコンクリートに変えたことで代表性因子が小さくなった原因を考察する。

最適減速条件における対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさとして寄与が大きい核種-反応の組合せを調べた。核データ起因の実効増倍率不確かさに対する核種-反応の寄与の大きさを Figure 5.10 に示す。横軸は核データ起因の実効増倍率不確かさに対する寄与の大きさを表し、縦軸は核種-反応を表し、棒グラフの右側に示した数字は新燃料-水体系と新燃料-コンクリート体系の相対差異を表す。Figure 5.10 に示すように、U-235 の核分裂中性子発生数 ($\bar{\nu}$) が核データ起因の実効増倍率不確かさに対して最も寄与が大きく、次いで U-238、U-235 の中性子捕獲反応 (n, γ)、U-235 の核分裂反応 (fission) の寄与が大きいことが分かった。水体系とコンクリート体系を比較すると、U-235 の核分裂 χ (χ) が最も相対差異が大きく、次いで U-238 の非弾性散乱 (n, n')、H-1 の中性子捕獲反応 (n, γ) の相対差異が大きいことが分かった。

水とコンクリートを比較して、核データ起因の実効増倍率不確かさの寄与の相対差異が大きかった3つの核種-反応 (U-235 の核分裂 χ 、U-238 の非弾性散乱、H-1 の中性子捕獲反応) における実効増倍率の核データに対する感度係数について、最も代表性因子の高い臨界実験 (leu-comp-therm-008-005) との比較結果を Figure 5.11 に示す。横軸はエネルギーを表し、縦軸は単位レサジーあたりの感度係数を表す。Figure 5.11(a)、(b) に示すように、U-235 の核分裂 χ と U-238 の非弾性散乱は 10^{-3} オーダーの感度を持つことが分かる。一方、Figure 5.11(c) に示すように、H-1 の中性子捕獲反応は U-235 の核分裂 χ と U-238 の非弾性散乱より約3倍から10倍の感度を持つことが分かる。また、H-1 の中性子捕獲反応の感度係数は、新燃料-水体系と最も代表性因子の高い臨界実験が概ね一致したが、新燃料-コンクリート体系では最も代表性因子の高い臨界実験より約35%小さかった。以上より、新燃料-コンクリート体系において代表性因子が下がった原因は、主に H-1 の中性子捕獲反応の感度係数が類似体系として選ばれた臨界実験より小さいためであると考えられる。

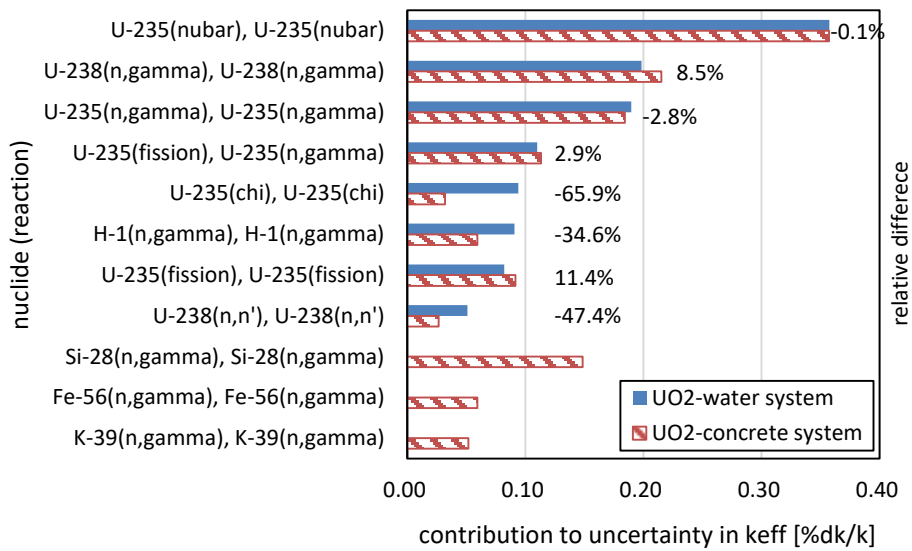


Figure 5.10 核データ起因の実効増倍率不確かさに対する核種-反応の寄与

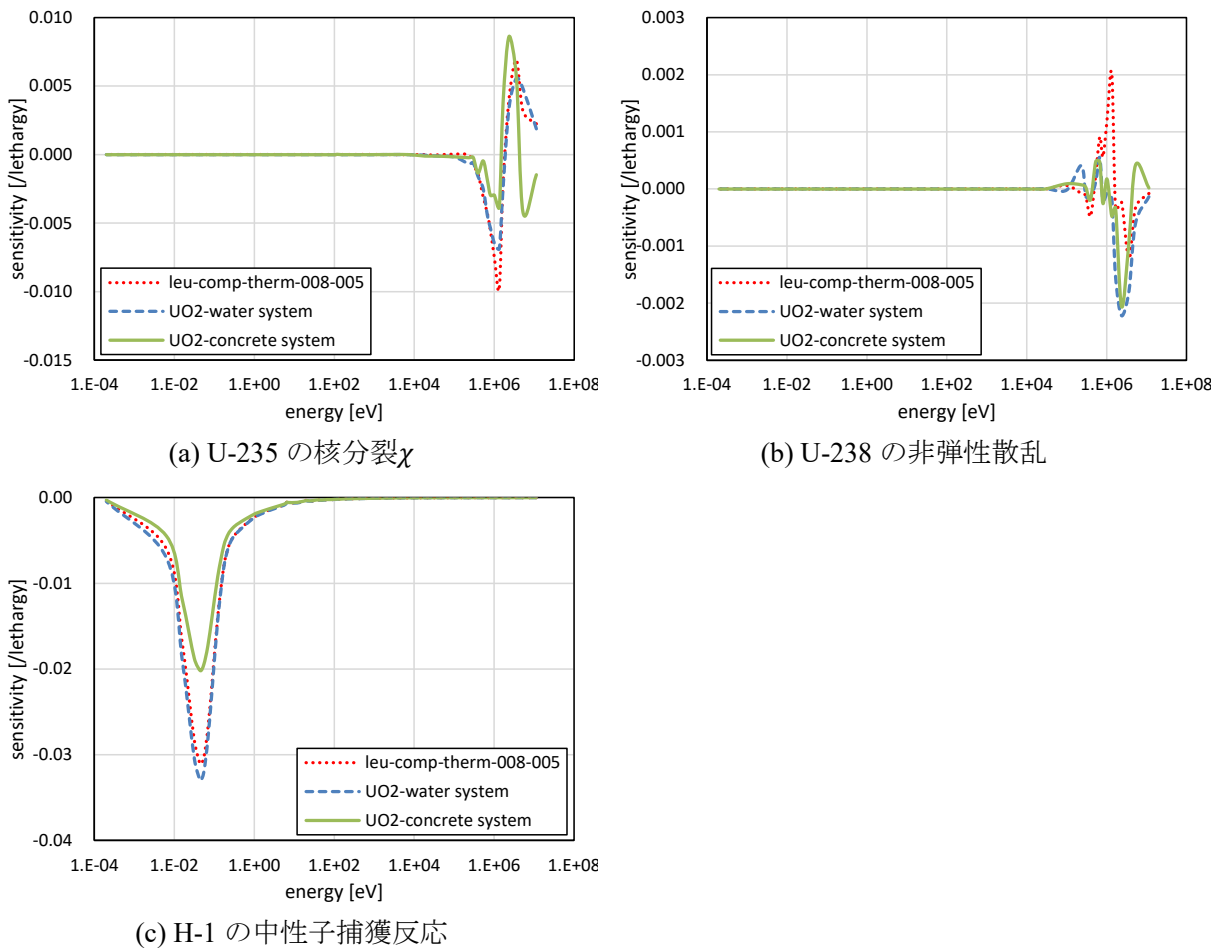


Figure 5.11 実効増倍率の核データに対する感度係数の評価結果

5.5.3 Upper Subcritical Limit (USL)との比較

本項では、Upper Subcritical Limit (USL)との比較を行い、推定臨界下限増倍率と USL の共通点と相違点について考察を行う。

- (1) 推定臨界下限増倍率と USL の比較
- (2) 推定臨界下限増倍率と 1-CM の比較
- (3) V_m/V_f 比の変化に対する MOS_{data} の変化
- (4) データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさの比較

(1) 推定臨界下限増倍率と USL の比較

USL では、選出された $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験について、実効増倍率の計算値と実験値との間のバイアス（以降、 β_i と呼ぶ）の符号を反転させた量（実験値と計算値の系統的な差）が平均値 $-\beta_i$ 、標準偏差 u_i （モンテカルロ計算に伴う統計誤差及び臨界実験の実験誤差から推定される実効増倍率の不確かさ）の正規分布にそれぞれ従うとして、混合正規分布の最大値の極値分布が用いられる[5]。ただし、単純に混合正規分布から N 個の最大値を選ぶのではなく、混合正規分布から重みの総和に基づいた数の最大値を選ぶ。実効増倍率の計算値が実験値より過小評価になることで、臨界安全上厳しく（非保守的に）なるため、USL では「最大限どの程度の裕度を見込むべきか」という観点から最大値の極値分布に注目している。 i 番目の臨界実験のバイアス、バイアスの不確かさは以下の式で定義される。

$$\beta_i = k_{calc,i} - k_{exp,i} \quad (5.1)$$

$$u_i = \sqrt{u_{calc,i}^2 + u_{exp,i}^2} \quad (5.2)$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。

$k_{calc,i}$: 実効増倍率の計算値

$k_{exp,i}$: 実効増倍率の実験値

$u_{calc,i}$: モンテカルロ計算に伴う実効増倍率の統計誤差

$u_{exp,i}$: 臨界実験の実験誤差

USL の基本的な考え方として、1 からより実効増倍率が小さな負側に裕度を取って未臨界と判断できる上限値を設定する。裕度として臨界体系の実効増倍率予測結果に対する計算裕度（以降、CM と呼ぶ）と追加の未臨界裕度（以降、MOS と呼ぶ）を推定し、1 から CM と MOS を引くことで USL は計算される。

$$USL = 1 - CM - MOS_{data} - MOS_{software} - MOS_{application} \quad (5.3)$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。なお、極値理論に基づいた USL 評価法の詳細は Appendix. C にまとめた。

CM : 臨界体系の実効増倍率予測結果に対する計算裕度。CM は、 N 個の正規分布（平均値 $-\beta_i$ 、標準偏差 u_i ）から成る混合正規分布に基づいた最大値の極値分布の下側累積確率が 99% になる値である。

MOS_{data} : 対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさに対する MOS。 MOS_{data} はデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさを 2.6 倍することで計算され、この 2.6 という数字は核データ

が正規分布に従うと仮定した時の信頼区間99%、有意水準1%の範囲を示す値である。Whisper-1.1では、SCALE6.1に収録された44群の共分散データ[40]を使用して、核データ起因の実効増倍率不確かさが推定される。

MOS_{software}：使用する計算コードにおける未検知誤差（コーディングエラーなど）に対する MOS。MOS_{software}は、Whisper-1.1のデフォルト値として0.005が用いられる。

MOS_{application}：対象体系の実効増倍率不確かさに対する MOS。MOS_{application}は、Whisper-1.1のデフォルト値としてゼロが用いられる。

提案手法による推定臨界下限増倍率は、臨界体系の実効増倍率予測結果に対する計算裕度を考慮した $1 - CM$ という量に相当し、3つの MOS 合計値（MOS_{data} + MOS_{software} + MOS_{application}）だけ USL より大きくなる、と考えられる。

推定臨界下限増倍率と USL の比較結果を Figure 5.12 に示す。青色と紫色の丸は、それぞれ新燃料-水体系に対する推定臨界下限増倍率と USL を表し、オレンジ色と緑色の四角は、それぞれ新燃料-コンクリート体系に対する推定臨界下限増倍率と USL を表す。水体系における USL は推定臨界下限増倍率より約1.2%dk/k小さかった。また、コンクリート体系では、USL は約 0.963 から 0.975 の範囲であり、Vm/Vf 比が大きくなるほど推定臨界下限増倍率との差異が大きくなることが確認された。

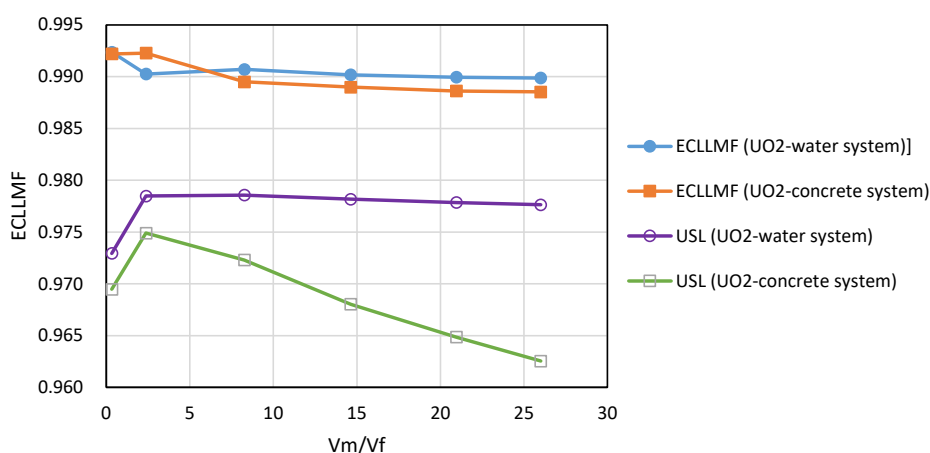


Figure 5.12 推定臨界下限増倍率と USL の比較結果

(2) 推定臨界下限増倍率と $1 - CM$ の比較

提案手法による推定臨界下限増倍と USL で考慮する要素が同じ条件で比較を行うために、USL から MOS を除いた $1 - CM$ と推定臨界下限増倍率を比較した。

推定臨界下限増倍率と $1 - CM$ の比較結果と、Vm/Vf 比の変化に対する CM の変化をそれぞれ、Figure 5.13 と Figure 5.14 に示す。推定臨界下限増倍率は $1 - CM$ より約0.5%dk/kから1.0%dk/k小さかったものの、新燃料-水体系では、Vm/Vf 比が極端に小さい場合を除くと、Vm/Vf 比の変化に対する推定臨界下限増倍率と $1 - CM$ の傾向は概ね一致した。一方で、新燃料-コンクリート体系では、Vm/Vf 比が大きくなるにつれて推定臨界下限増倍率と $1 - CM$ の差は大きくなった。これは、Figure 5.14 に示すように、Vm/Vf 比が大きくなるほど CM が大きくなったためである。

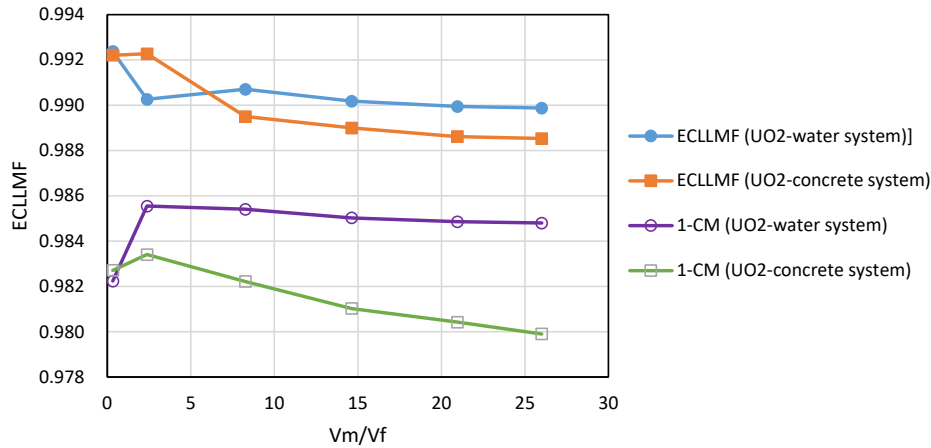


Figure 5.13 推定臨界下限増倍率と 1-CM の比較結果

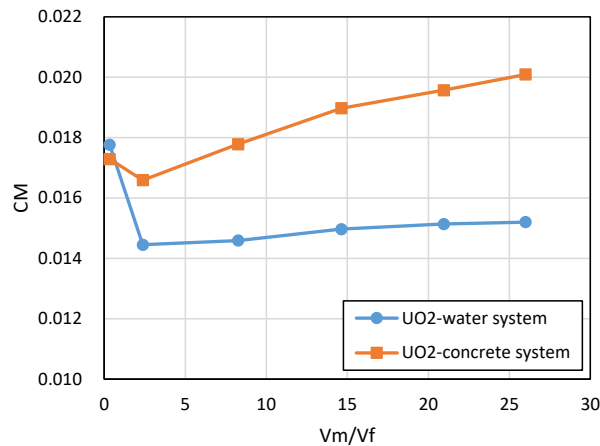


Figure 5.14 Vm/Vf 比の変化に対する CM の変化

CM が大きくなった原因を考察するため、新燃料-コンクリート体系における $-\beta_i$ の極値分布と CM を Figure 5.15 に示す。横軸は $-\beta_i$ を表し、縦軸は確率密度を表す。Figure 5.15 において、Vm/Vf 比が異なる 3 つの極値分布と CM が示されている。実線はVm/Vf = 8.3 のコンクリート体系を表し、このとき、選ばれた臨界実験の数は $N = 117$ である。破線はVm/Vf = 21.0、 $N = 135$ のコンクリート体系を表し、点線はVm/Vf = 26.0、 $N = 189$ のコンクリート体系を表す。Figure 5.15 に示すように、臨界実験数が多くなるにつれて $-\beta_i$ の最大値として選ばれる値がより大きな正側になることで、極値分布が取りうる値の範囲は正側に大きくなることから分かる。CM は極値分布の下側累積確率点が 99% になる値であるため、Vm/Vf 比が大きくなり選ばれた臨界実験数が多くなるにつれて極値分布が正側に大きくなることで CM は大きくなったと考えられる。

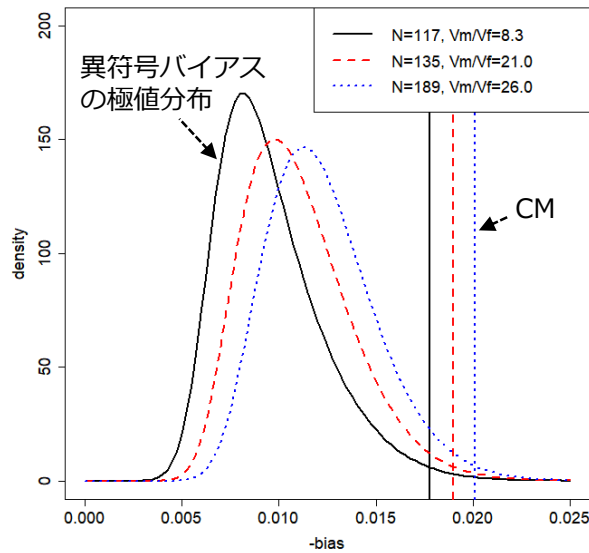


Figure 5.15 新燃料-コンクリート体系における V_m/V_f 比の変化に対する異符号バイアスの極値分布と CM の変化

推定臨界下限増倍率は $1 - CM$ より小さかったが臨界超過確率と信頼度を変えることで両者は一致すると考えられる。そこで、最適減速条件における新燃料-水体系と新燃料-コンクリート体系を対象体系として、推定臨界下限増倍率と $1 - CM$ が一致する臨界超過確率及び信頼度を調べた。 $1 - CM$ と一致する臨界超過確率及び信頼度を Figure 5.16 に示す。横軸は信頼度を表し、縦軸は臨界超過確率を表す。Figure 5.16 に示すように、信頼度が大きくなるにつれて $1 - CM$ と一致する臨界超過確率は大きくなった。USL 評価法で CM の評価に用いられる信頼度と同じ 99% の条件では、 $1 - CM$ と一致する臨界超過確率は、水体系では約 4×10^{-3} であり、コンクリート体系では約 2×10^{-3} であることが分かった。以上の結果から、極値分布に基づいて評価される $1 - CM$ は、信頼度 99% のとき臨界超過確率がおおよそ 0.5% に相当することを明らかにできた。

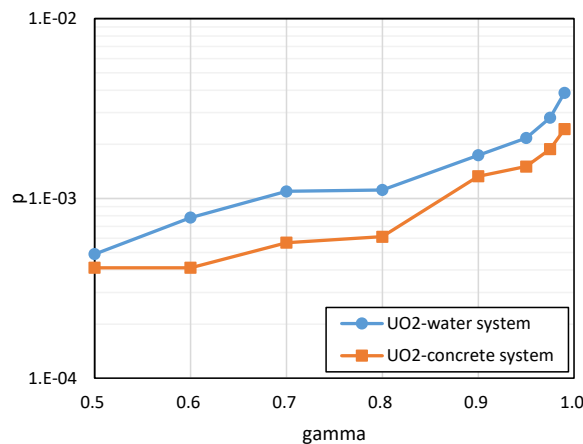


Figure 5.16 $1 - CM$ と一致する臨界超過確率及び信頼度

(3) V_m/V_f 比の変化に対する MOS_{data} の変化

V_m/V_f 比が大きくなるにつれて新燃料-コンクリート体系の USL が小さくなった原因を考察する。 V_m/V_f 比の変化に対する MOS_{data} の変化を Figure 5.17 に示す。Figure 5.17 に示すように、新燃料-コンクリート体系では、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて MOS_{data} が大きくなった。 MOS_{data} が大きくなった原因を考察するため、 V_m/V_f 比の変化に対する核データ起因の実効増倍率不確かさの寄与の変化を Figure 5.18 に示す。Figure 5.18 に示すように、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて U-238 と U-235 の中性子捕獲反応 (n,γ) の寄与は小さくなった。一方で、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて、U-235 の核分裂中性子発生数 ($\bar{\nu}$) と、Si-28、Fe-56、K-39 の中性子捕獲反応 (n,γ) の寄与は大きくなった。特に、U-235 の核分裂中性子発生数と Si-28 の中性子捕獲反応の寄与が大きくなったことが分かった。したがって、 MOS_{data} が大きくなった主な原因は、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて U-235 の核分裂中性子発生数と Si-28 の中性子捕獲反応における核データ起因の実効増倍率不確かさの寄与が大きくなったためであると考えられる。

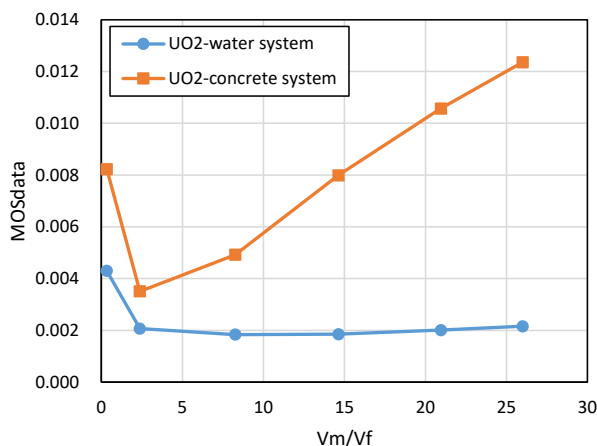


Figure 5.17 V_m/V_f 比の変化に対する MOS_{data} の変化

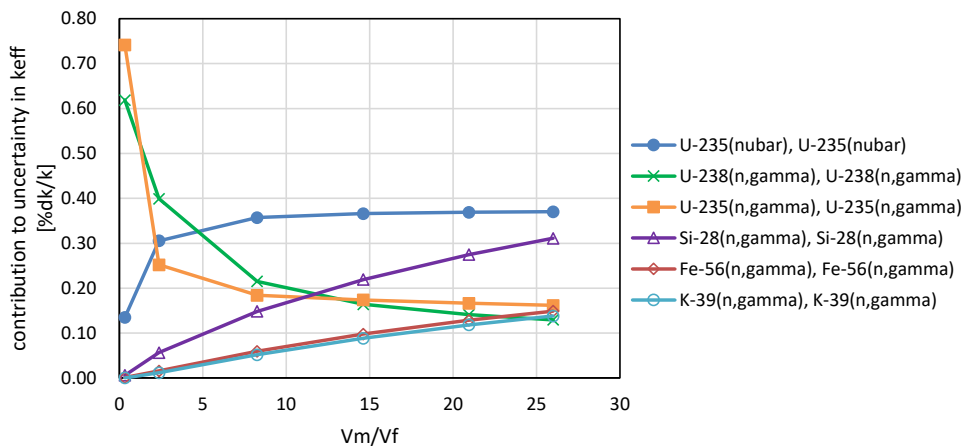


Figure 5.18 V_m/V_f 比の変化に対する核データ起因の実効増倍率不確かさの寄与の変化

(4) データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさの比較

提案手法と USL 評価法を比較して、核データ起因の実効増倍率不確かさのデータ同化に使用する計算コードが異なる。そこで、提案手法で用いた SCALE6.2.3/TSURFER と USL 評価法で用いられる Whisper-1.1 により評価したデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさが一致するか調べた。対象体系は最適減速条件における新燃料-水体系と新燃料-コンクリート体系とした。Whisper-1.1 と TSURFER による核データ起因の実効増倍率不確かさの計算結果を Table 5.4 に示す。Table 5.4 に示すように、データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさは Whisper-1.1 と TSURFER において概ね一致することを確認した。わずかに違いが生じた原因は、提案手法と Whisper-1.1 のどちらについても ICSBEP 臨界実験結果を踏まえてデータ同化された核データ共分散が用いられているものの、Whisper-1.1 で使用される SCALE6.1 に収録された 44 群の共分散データ[40]と TSURFER で使用される SCALE6.2 に収録された 56 群の共分散データ[22]で使えるようになった核データが異なるためであると考えられる。

現在の提案手法で求めている推定臨界下限増倍率には、「選出された臨界実験に対する核データ起因の実効増倍率不確かさ」が考慮される形であり、USL の MOS_{data} に対応する「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさに対する未臨界裕度」と $MOS_{software}$ に対応する「使用する計算コードにおける未検知誤差に対する未臨界裕度」は含まれていない。一方、Whisper-1.1 で採用されている USL では、「選出された臨界実験に対する核データ起因の実効増倍率不確かさ」を考慮しない代わりに、2.6 倍した「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさ」を裕度として考慮する形となっている。したがって、もし USL と等価な条件となるように未臨界判定したい場合には、計算コードを用いて予測された対象体系の実効増倍率予測結果に対して (KUCA 実験解析のように 3σ の統計誤差を追加したような形で)、「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさ」と「使用する計算コードにおける未検知誤差」を追加した上で、推定臨界下限増倍率と比較して未臨界判定をする必要がある、と考えられる。

Table 5.4 Whisper-1.1 と TSURFER による核データ起因の実効増倍率不確かさの計算結果

	Whisper-1.1		TSURFER	
	データ同化前の核データ起因の実効増倍率不確かさ [%dk/k]	データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ [%dk/k]	データ同化前の核データ起因の実効増倍率不確かさ [%dk/k]	データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ [%dk/k]
新燃料-水体系 (最適減速条件)	0.423	0.080	0.489	0.101
新燃料-コンクリート体系 (最適減速条件)	0.463	0.189	0.515	0.209

5.6 本章のまとめ

本章では、燃料デブリ模擬体系の推定臨界下限増倍率の評価を行い、 V_m/V_f 比の変化に対する影響と評価対象とする燃料デブリの減速材及び平均燃焼度考慮による影響について調べた。また、USL との比較を行い、ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率の評価結果が妥当か確認し

た。

5.2 節では、燃料デブリの臨界性に関する文献を調査し、臨界特性に影響の大きいパラメータとして燃料デブリの形状・サイズ、組成について調査し、燃料デブリ模擬体系の計算条件に参考となる3つの知見が得られた。1つ目は、幅広い減速条件及び非均質性の考慮が必要であることである。2つ目は、コンクリートによる減速効果の考慮が必要であることである。3つ目は、評価対象とする燃料デブリの平均燃焼度の考慮が必要であることである。

5.3 節では、5.2 節で得られた知見をもとに燃料デブリ模擬体系の計算条件を設定した。本研究では、燃料と減速材から成る二領域非均質球体系を用いた。燃焼による推定臨界下限増倍率の影響について検討するために、新燃料、FP を含まない使用済み燃料、FP を含む使用済み燃料の3種類の燃料を用いた。また、幅広い減速条件とコンクリートによる影響について検討するため、減速材として普通コンクリートと水を用い、 V_m/V_f 比を変化させた。

5.4 節では、 V_m/V_f 比をパラメータとし燃料デブリ模擬体系に対するブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率の評価結果を示した。推定臨界下限増倍率は約 0.988 から 0.992 の範囲であり、 V_m/V_f 比が大きいほど推定臨界下限増倍率が小さくなる傾向を確認した。無限増倍率が最大となる最適減速条件では、推定臨界下限増倍率は新燃料-コンクリート体系の方が新燃料-水体系より約0.08%dk/k小さかった。また、使用済み燃料の方が新燃料より約0.1%dk/k大きかった。また、照射済み燃料中の核種組成として燃焼度クレジットにおいて考慮する一部の FP が存在する場合と、全ての FP が存在しない場合で得られた評価結果より、FP を考慮するか否かで推定臨界下限増倍率に有意な差がないことが確認された。

5.5 節では、本章で得られた推定臨界下限増倍率の結果について、以下の3つの内容について考察した。まず、1つ目の考察として、減速材を水からコンクリートに変えたことで推定臨界下限増倍率が小さくなった原因は、追加で選ばれた代表性の低い臨界実験の実効増倍率が平均値より小さく、GMM 分布の広がり方がより大きくなったことで不偏標準偏差が大きくなった効果と、GMM 分布がより実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になることで、下側累積確率点が下がり安全裕度が大きくなった効果によるものと考察した。また、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて、(1) 多くの臨界実験が選ばれることで実効増倍率の標本平均と不偏標準偏差の統計精度が良くなるため、統計精度に関連した安全裕度が小さくなる効果と、(2) 強い正の尖度を持つことで GMM 分布が、より実効増倍率が小さな負側に裾を引いた形状になることで、下側累積確率点下がったため安全裕度が大きくなった効果によって、結果として安全裕度が大きくなったと考察した。

2つ目の考察として、最適減速条件において減速材を水からコンクリートに変えたことで代表性因子が小さくなった原因は、主に核データ起因の実効増倍率不確かさに寄与する H-1 の中性子捕獲反応の感度係数が、代表性因子の高い臨界実験と比べて新燃料-水体系は概ね一致したが、新燃料-コンクリート体系は約35%小さいためであると考察した。

3つ目の考察として、推定臨界下限増倍率と USL を比較した結果、新燃料-水体系における USL は推定臨界下限増倍率より約1.2%dk/k小さく、新燃料-コンクリート体系における USL は V_m/V_f 比が大きくなるほど推定臨界下限増倍率との差異が大きくなることが確認された。提案手法と USL で考慮する要素が同じ条件で比較すると、 V_m/V_f 比の変化に対する傾向は概ね一致し、提案手法による推定臨界下限増倍率の妥当性を確認した。また、極値分布に基づいて評価される1から臨界体系の実効増倍率予測結果に対する計算裕度を引いた量は、信頼度99%のとき臨界超過確率がおおよそ0.5%に相当することを明らかにできた。新燃料-コンクリート体系において、 V_m/V_f 比が大き

なるほど USL が小さくなる原因についても考察した。Vm/Vf 比が大きくなるにつれて U-235 の核分裂中性子発生数と Si-28 の中性子捕獲反応における核データ起因の実効増倍率不確かさの寄与が大きくなることで、USL で考慮される対象体系に対する核データ起因の実効増倍率不確かさ裕度が大きくなったためであると考えられる。最後に、対象体系に対する核データ起因の実効増倍率不確かさのデータ同化の結果が提案手法で用いた計算コードと USL 評価法で用いられる計算コードで概ね一致することを確認した。もし USL と等価な条件となるように未臨界判定したい場合には、計算コードを用いて予測された対象体系の実効増倍率予測結果に対して、「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさに対する未臨界裕度」と「使用する計算コードにおける未検知誤差に対する未臨界裕度」を追加した上で、推定臨界下限増倍率と比較して未臨界判定をする必要がある、と考えられる。

第6章 結論

6.1 まとめ

本研究では、ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法の開発及び適用を行った。各章のまとめを以下に示す。

第1章では、背景と本研究の目的について述べた。背景として、推定臨界下限増倍率は実効増倍率の未臨界判断基準を設定するために用いられ、従来の推定臨界下限増倍率評価法では臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を正規分布で近似しているという課題について述べた。卒業研究で開発した推定臨界下限増倍率の評価法では、ブートストラップ法を用いることで従来法の課題を解決することができたが、臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮できていなかった。本研究では、以下に示す3つの目的を設定した。1つ目の目的は、臨界実験の核的な類似性及び実効増倍率の不確かさを考慮することで、より尤もらしい推定臨界下限増倍率評価法の開発を行うことである。2つ目の目的は、本研究で提案する手法に基づく計算コードの検証と実際の未臨界/臨界体系に対して提案手法を用いて推定臨界下限増倍率を評価し、評価結果の妥当性について確認を行うことである。3つ目の目的は、燃料デブリ模擬体系に対して提案手法を適用し、現時点で推定可能な尤もらしい推定臨界下限増倍率を評価することである。

第2章では、1つ目の目的を達成するために、「ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法」を提案した。提案手法では、臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布を核的な類似性に基づいて選出された混合正規分布（GMM分布）でモデル化した。GMM分布を構成する1つ1つの正規分布の重みとして、核データに対する実効増倍率の感度係数と評価済み核データの共分散行列を組み合わせることで得られる各臨界実験と対象体系間の相関係数（代表性因子）を用いた。また、GMM分布を構成する正規分布の標準偏差については、(1)モンテカルロ計算の統計誤差、(2)臨界実験の実験誤差、(3)データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ、の3つの誤差から誤差伝播則に基づいて推定した実効増倍率の不確かさを用いた。そして、GMM分布から無作為に実効増倍率の再標本を復元抽出することで推定臨界下限増倍率の不確かさ分布を推定した。次に、設定した安全裕度において、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布が臨界超過確率 p に対応するGMM分布の下側累積確率点以下となる確率 γ （信頼度）を満たすように、二分法により試行錯誤的に安全裕度を決定した。最終的には、推定臨界下限増倍率の不確かさ分布の平均値から推定臨界下限増倍率を評価した。

第3章では、2つ目の目的に関する検討として、第2章で提案した手法に基づく計算コードを作成し、作成した計算コードの検証を行った。この検証では、実効増倍率の母集団が(1)正規分布に従う場合、(2)GMM分布に従う場合、を想定し計算コードが意図通り実装できているか検証を行った。また、実効増倍率頻度分布の歪度及び尖度やGMM分布を構成する各正規分布の重み及び標準偏差が変化することで推定臨界下限増倍率の評価結果がどのように変化するか調べた。1つ目の正規分布に対する検証では、臨界実験数が極端に少ないときを除いて、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果が従来法による推定臨界下限増倍率と概ね一致することが確認された。2つ目のGMM分布に対する検証では、臨界実験数が無限とみなせるほど多いとき、計算コードによる推定臨界下限増倍率の評価結果がGMM分布の下側累積確率点と一致することが確認された。以上

の検証結果から、計算コードが意図通り実装できていることが検証できた。本章で実施した検証結果から、推定臨界下限増倍率に対する影響の大きさは、歪度による影響が最も大きく、次いで負の尖度による影響が大きく、正の尖度による影響はわずかであることが分かった。また、提案手法による推定臨界下限増倍率の評価結果が変化する場合としては以下のようなケースが該当すると考察した。

- 臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布が平均値からより負側に裾を引いた形状であるとき、推定臨界下限増倍率がより小さくなる。
- GMM 分布を構成する各正規分布の重みが、GMM 分布の平均値から負側に小さくなるほどより小さくなるような条件では、推定臨界下限増倍率がより大きくなる。
- GMM 分布を構成する各正規分布の標準偏差が、GMM 分布の平均値から負側に小さくなるほどより小さくなるような条件では、推定臨界下限増倍率がより大きくなる。

第4章では、2つ目の目的に関する検討として、京都大学臨界集合体実験装置 KUCA を利用して、提案手法の妥当性の確認を行った。KUCA の軽水減速架台を用いた臨界近接実験では、十分に深い未臨界状態の炉心から、逆増倍法に基づくことで燃料板を徐々に装荷することで臨界を達成した。臨界近接実験で得られた KUCA 臨界実験体系を対象体系として、核的に類似する臨界実験体系を過去の臨界実験データベース ICSBEP から選出し、提案手法を適用し推定臨界下限増倍率を評価した。結果として、推定臨界下限増倍率の評価結果に与える影響度は、卒業研究で考慮した実際の実効増倍率の頻度分布による影響が最も大きく、次いで本研究で新たに考慮した実効増倍率の不確かさによる影響が大きく、(よく似た臨界実験を選出した上でさらに)核的な類似性を考慮する影響は以上と比べて小さいことが分かった。また、KUCA において実施した臨界近接実験に対して、提案手法による推定臨界下限増倍率の値を判断基準として未臨界判定を実施した結果、臨界近接実験の最初のステップを未臨界と判定することができた。この適用結果から、KUCA 実験体系そのものに関する情報を用いずとも、核的に類似した過去の臨界実験データに基づくことで、対象体系の未臨界判定が可能であることが分かった。

第5章では、3つ目の目的に関する検討として、燃料デブリ模擬体系に対して提案手法を適用し推定臨界下限増倍率の評価を行った。代表的な計算対象の幾何形状として、 ^{235}U が 5 wt% の UO_2 燃料と減速材から成る二領域非均質球体系(白色境界条件)を用いることとした。減速材には水とコンクリートの2通りについて検討を実施した。燃料の半径は 1 cm とし、減速材の半径を変化させて減速材対燃料体積比 (V_m/V_f 比) の変化に対する推定臨界下限増倍率の変化を調べた。結果として、推定臨界下限増倍率は約 0.988 から 0.992 の範囲であり、 V_m/V_f 比が大きくなるにつれて推定臨界下限増倍率が小さくなる傾向を確認した。また、最適減速条件では、推定臨界下限増倍率はコンクリート体系の方が水体系より約 0.08%dk/k 小さかった。加えて、評価対象とした燃料デブリに含まれる核分裂生成物による推定臨界下限増倍率の影響はほとんどないことが確認された。最後に、提案手法による推定臨界下限増倍率と極値理論に基づく Upper Subcritical Limit (USL) の比較を実施した。提案手法における臨界超過確率及び信頼度が USL と等価な条件で比較した結果、提案手法による推定臨界下限増倍率は、現在の提案手法には考慮されていない「対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさに対する未臨界裕度」と「使用する計算コードにおける未検知誤差に対する未臨界裕度」の大きさだけ、USL より大きいことが分かった。また、 V_m/V_f 比の変化に対する提案手

法による推定臨界下限増倍率の傾向が、現在の提案手法には考慮されていない USL の未臨界裕度を除いた結果と定性的に似た挙動となったため、妥当であることを確認することができた。

以上の検討を通じて、本研究の目的を達成することができた。

6.2 今後の課題

本節では、以下の3点を本研究の今後の課題として示す。

- (1) 真実は臨界であるが未臨界と誤判定される偽陰性を犯す確率の定量的評価
 - (2) 構造材などの混合物と Gd を含む燃料を考慮した燃料デブリの推定臨界下限増倍率解析
 - (3) 核データの共分散の影響を除いた代表性因子に基づく類似の臨界実験の選出
- それぞれの今後の課題について以下に示す。

- (1) 真実は臨界であるが未臨界と誤判定される偽陰性を犯す確率の定量的評価

4.5.2 項で述べたように、推定臨界下限増倍率を用いて臨界か未臨界か判定を行う際、以下に示す2つの誤判定をする可能性がある。

- 真実は未臨界であるが、臨界であると誤判定される（偽陽性）
- 真実は臨界であるが、未臨界であると誤判定される（偽陰性）

臨界安全の観点から、真実は臨界であるが、未臨界と誤判定される偽陰性は許容できない。このため、推定臨界下限増倍率を判断基準として未臨界判定を行ったとき、偽陰性を犯す確率がどの程度か明らかにすることは重要である。そこで、一個抜き交差検証のように ICSBEP に収録されたすべての臨界実験から1つだけ除いた上で推定臨界下限増倍率を評価し、除いた臨界実験の実効増倍率予測結果が推定臨界下限増倍率以下となる（真実は臨界であるが、未臨界であると誤判定される）ケースがあるか調べる。このような検証により、偽陰性を犯す確率を定量的に評価できるか、今後の課題として検討する必要がある。

- (2) 構造材などの混合物と Gd を含む燃料を考慮した燃料デブリの推定臨界下限増倍率解析

本研究では、評価対象となる燃料デブリの幾何形状として、燃料-水（あるいはコンクリート）から成る単純な二領域体系を用いた。しかし、実際の燃料デブリは熔融した燃料と構造材（ステンレスやコンクリート）などが混合して生じた可能性がある[30]。また、MCCI（熔融炉心コンクリート相互作用）が起こることで、熔融物中に気泡が生じ（ポロシティが高くなり）、将来のデブリ取り出し作業時にそのポロシティに水が浸入することにより、反応度が添加される可能性が文献[35]で報告されている。したがって、今回得られた推定臨界下限増倍率の評価結果を実際のデブリ収納缶などの臨界安全設計に活かすためには、中心部の燃料領域に混合物が含まれる場合や非均質性がある場合について検討する必要がある。

2019 年の文献[37]では、1 サイクル目の照射途中燃料（燃焼度 5.2 GWd/t）に含まれる ^{155}Gd と ^{157}Gd が燃料デブリの臨界性に大きく寄与する（負の反応度効果がある）ことが報告されている。今後、 $^{155,157}\text{Gd}/^{235}\text{U}$ 比 ($^{155,157}\text{Gd} = ^{155}\text{Gd} + ^{157}\text{Gd}$) が実際の燃料デブリの臨界リスク評価において重要な指標となると考えられ、 $^{155,157}\text{Gd}/^{235}\text{U}$ 比の変化が推定臨界下限増倍率の評価結果にどの程度影響するかについても検討する必要があると考えられる。

(3) 核データの共分散の影響を除いた代表性因子に基づく類似の臨界実験の選出

現在の提案手法では、対象体系とよく似た臨界実験を選出するために、核データに対する実効増倍率の感度係数と評価済み核データの共分散行列を組み合わせることで得られる核データ起因の相関係数を用いた。このため、対象体系の類似体系として選ばれる臨界実験は、核データの共分散行列の情報に大きく影響されることとなる[41]。例えば、KUCA C 架台の類似体系として選出された原子力推進ロケット研究用の臨界実験体系は KUCA-C 架台の物理的形態が異なるため、類似体系として適切かどうか検討の余地がある。そこで、例えば、文献[42]で提案された核データの共分散の影響を除いた代表性因子 (E_{sum}) を元に類似の臨界実験を選出することで、より尤もらしい推定臨界下限増倍率を評価することが可能か検討する必要がある。

参考文献

- [1] 令和二年原子力規制委員会規則第十一号: 使用施設等の技術基準に関する規則. [Internet]. e-GOV 法令検索; 2020年4月1日 [cited 2021 Jan 5]. Available from: https://elaws.e-gov.go.jp/document?law_unique_id=502M6008000011_20200401_0000000000000000#Mp.
- [2] 臨界安全ハンドブック第2版. 日本原子力研究所; 1999. JAERI-1340.
- [3] Okuno H, Nomura Y, Ryufuku S (translators). Nuclear criticality safety handbook: Version 2 (English translation). Tokyo (Japan): Japan Atomic Energy Research Institute; 2001. JAERI-Review-2001-028.
- [4] Okuno H. Development of a statistical method for evaluation of estimated criticality lower-limit multiplication factor depending on uranium enrichment and H/Uranium-235 atomic ratio. J Nucl Sci Technol. 2007; 44(2):137–146.
- [5] Kiedrowski BC, Brown FB, Conlin JL, et al. Whisper: Sensitivity/uncertainty-based computational methods and software for determining baseline upper subcritical limits. Nucl Sci Eng. 2015; 181(1):17–47.
- [6] International Criticality Safety Benchmark Evaluation Project (ICSBEP) [Internet]. France: OECD Nuclear Energy Agency; 2019 Oct 1 [cited 2020 Sep 21]. Available from: <https://www.oecd-nea.org/science/wpncs/icsbep/handbook.html>.
- [7] Lindsay BG. Mixture models: Theory, geometry and applications. Hayward (CA): Institute of Mathematical Statistics; 1995.
- [8] Burden RL, Faires JD. Numerical analysis: 3rd edition. Boston (MA): Brooks Cole; 2002.
- [9] Palmiotti G, Salvatores M. Use of integral experiments in the assessment of large liquid-metal fast breeder reactor basic design parameters. Nucl Sci Eng. 1984; 87(3):333–348.
- [10] Aliberti G, Palmiotti G, Salvatores M, et al. Nuclear data sensitivity, uncertainty and target accuracy assessment for future nuclear systems. Ann Nucl Energy. 2006; 33(8):700–733.
- [11] Efron B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. Ann Stat. 1979; 7(1):1–26.
- [12] Efron B, Tibshirani RJ. An introduction to the bootstrap. New York (NY): Chapman & Hall; 1994.
- [13] Efron B. Better bootstrap confidence intervals. J Amer Statist Assoc. 1987; 82:171–220.
- [14] The Comprehensive R Archive Network (CRAN) [Internet]. [cited 2020 Dec 27]. Available from: <https://cran.r-project.org/>.
- [15] 逸見功. 統計ソフト「R」超入門. 講談社; 2018.
- [16] Bolch BW, More on unbiased estimation of the standard deviation. Am Stat. 1968; 22(3):27.
- [17] 三澤毅, 宇根崎博信, 卞哲浩. 原子炉物理実験. 京都大学学術出版会; 2010.
- [18] Misawa T, Unesaki H, Pyeon C. Nuclear reactor physics experiments. Kyoto (Japan): Kyoto University Press; 2010.
- [19] Werner CJ (editor). MCNP user's manual: Code version 6.2. Los Alamos (NM): Los Alamos National Laboratory; 2017. LA-UR-17-29981.
- [20] Chadwick MB, Herman M, Obložinský P, et al. ENDF/B-VII.1 nuclear data for science and technology: Cross sections, covariances, fission product yields and decay data. Nucl Data Sheets. 2011; 112(12):2887–2996.
- [21] Jones FE, Harris GL. ITS-90 density of water formulation for volumetric standards calibration. J Res Natl Inst Stan. 1992; 97(3):335–340.

- [22] Rearden BT, Jessee MA (editors). SCALE code system. Oak Ridge (TN): Oak Ridge National Laboratory; 2016. ORNL/TM-2005/39 ver. 6.2.3.
- [23] Kiedrowski BC, Brown FB, Wilson PPH. Adjoint-weighted tallies for k-eigenvalue calculations with continuous-energy Monte Carlo. Nucl Sci Eng. 2011; 168(3):226–241.
- [24] Owen DB. Factors for one-sided tolerance limits and for variables sampling plans. Washington D.C: Sandia Corporation; 1963. SCR-607.
- [25] Shibata K, Iwamoto O, Nakagawa T, et al. JENDL-4.0: A new library for nuclear science and engineering. J Nucl Sci Technol. 2011; 48(1):1–30.
- [26] Morioka K, Pyeon CH. Numerical analysis of criticality by MCNP6.2 in the KUCA-C core. Proc. 8th Reactor Physics Workshop in 2020 (RPW2020); 2020 Dec 2.
- [27] Brown DA, Chadwick MB, Capote R, et al. ENDF/B-VIII.0: The 8th major release of the nuclear reaction data library with CIELO-project cross sections, new standards and thermal scattering data. Nucl Data Sheets. 2018; 148:1–142.
- [28] 平成 30 年度原子力施設等防災対策等委託費（東京電力福島第一原子力発電所燃料デブリの臨界評価手法の整備）. 日本原子力研究開発機構; 2020, <https://www.nsr.go.jp/data/000319703.pdf>.
- [29] Tada K. HAND: A Handy criticality analysis tool for fuel debris. Ibaraki (Japan): Japan Atomic Energy Agency; 2020. JAEA-Data/Code 2020-014.
- [30] 倉田正輝. 福島第一原子力発電所デブリの計量管理技術の現状と今後, (1) 福島第一原子力発電所デブリの概況について. 日本原子力学会 2020 年秋の大会; 2020 年 9 月 11 日-13 日.
- [31] Farmer MT, Lomperski S, Kilsdonk DJ, et al. OECD MCCI project final report. OECD; 2006. OECD/MCCI-2005-TR06.
- [32] Izawa K, Uchida Y, Ohkubo K, et al. Infinite multiplication factor of low-enriched UO₂-concrete system. J Nucl Sci Technol. 2012; 49(11):1043–1047.
- [33] 平成 26 年度原子力施設の臨界管理安全基盤強化委託費（東京電力福島第一原子力発電所燃料デブリの臨界評価手法の整備）事業報告書. 日本原子力研究開発機構; 2015, <https://www.nsr.go.jp/data/000175836.pdf>.
- [34] Miyoshi Y, Ishikawa T, Yanagisawa H, et al. Reactivity effects of concrete slabs in single and coupled cores of rectangular parallelepiped geometry. J Nucl Sci Technol. 1993; 30(8):813–823.
- [35] Kugo T, Ishikawa M, Nagaya Y, et al. Study to improve re-criticality evaluation methodology after severe accident. Ibaraki (Japan): Japan Atomic Energy Agency; 2014. JAEA-Review-2013-046.
- [36] Nishihara K, Iwamoto H, Suyama K. Estimation of fuel compositions in Fukushima-Daiichi Nuclear Power Plant. Ibaraki (Japan): Japan Atomic Energy Agency; 2012. JAEA-Data/Code 2012-018.
- [37] Watanabe T, Ohkubo K, Araki S, et al. Criticality characteristics of fuel debris mixed by fuels with different burnups based on fuel loading pattern. Proc. 11th International conference on Nuclear Criticality safety (ICNC2019); 2019 Sep 15–20; Paris (France).
- [38] Okuno H, Naito Y, Suyama K. OECD/NEA burn-up credit criticality benchmarks phase IIIB: Burnup calculations of BWR fuel assemblies for storage and transport. Ibaraki (Japan): Japan Atomic Energy Agency; 2002. JAEA-Research-2002-001.
- [39] Okuno H, Suyama K, Tonoike K, et al. Second version of data collection part of nuclear criticality safety handbook (contract research). Ibaraki (Japan): Japan Atomic Energy Agency; 2009. JAEA-Data/Code

2009-010.

- [40] Williams ML, Rearden BT. SCALE-6 Sensitivity/uncertainty methods and covariance data. Nucl Data Sheets. 2008; 109(12):2796–2800.
- [41] Clarity J, Marshall W. The influence of changes in nuclear covariance data on the calculation of k_{eff} for highly enriched uranium solution systems. Proc. 11th International conference on Nuclear Criticality safety (ICNC2019); 2019 Sep 15–20; Paris (France).
- [42] Rising ME. Evaluating sensitivity-based similarity metrics between applications and benchmarks. Proc. 11th International conference on Nuclear Criticality safety (ICNC2019); 2019 Sep 15–20; Paris (France).

Appendix. A 従来の推定臨界下限増倍率評価法

A.1 従来法の基本的な考え方

臨界安全解析の対象となる体系を考え、対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率について調べたいとする。そこで、すべての臨界体系（母集団）について実効増倍率を数値計算によって予測したところ Figure A.1 のような結果となったとする。ここで言うすべての臨界体系とは、未知の体系も含む臨界状態になるすべての体系を指し、実際の実験時における実効増倍率の真値はちょうど1である。数値計算によって得られた臨界体系の実効増倍率は、解析手法起因の不確かさ、計算モデル起因の不確かさ、モンテカルロ計算コードで解く場合はモンテカルロ計算に伴う統計誤差、計算の入力となる核データに起因する不確かさ等により、ちょうど1にはならず誤差を持って分布する。簡単のために、実効増倍率予測結果の頻度分布を母平均 μ 、母分散 σ^2 の正規分布と仮定する。対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率は、実効増倍率予測結果の頻度分布に属するサンプルと考えることができる。したがって、対象体系がちょうど臨界になる確率密度が最も高くなるのは、対象体系の実効増倍率が μ の値をとったときである。

次に、Figure A.1 の例において、対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率の下限値について調べたいとする。ここで言う下限値とは、対象体系の実効増倍率が下限値以下であれば未臨界と判定でき、下限値より大きいとき臨界と判定できる値を意味する。そこで、下限値を μ より十分小さく設定し、対象体系がちょうど臨界になる確率密度を十分低くする。設定した下限値における実効増倍率予測結果の下側累積確率は臨界超過確率 p と呼ばれる。誤差分布が正規分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ として正確に知られていれば、正規分布の下側累積確率が p になる値（ $= \mu - \alpha_p \sigma$ ）を下限値として用いることができる。このとき、 $-\alpha_p$ は標準正規分布の下側累積確率が p になる値である。Figure A.1 の例では、 $p = 2.5\%$ のときの下限値（ $\mu - 1.96\sigma$ ）を示した。

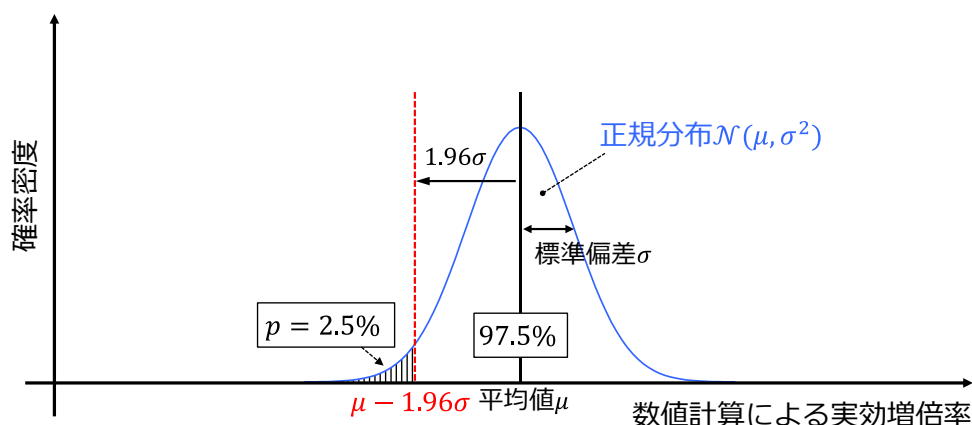


Figure A.1 臨界体系に対する実効増倍率予測結果の母集団が正規分布に従う場合

実際には、母集団の分布は未知であり、必ずしも正規分布に従うとは限らない。このような状況で対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率について調べたいとする。そこで、過去に行われた臨界実験を活用して、臨界体系の実効増倍率を数値計算によって予測したところ Figure A.2 に示した右側の分布のような結果になったとする。このとき実効増倍率の標本平均及び不偏分散をそれぞれ \bar{k} と s^2 と表す。また、用いた臨界実験の数を N と表す。実効増倍率の数値結果が対象体系と用いた臨界実験の間で強く相関していれば、対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率は、用いた臨界実験

に対する実効増倍率予測結果の頻度分布に属するサンプルと考えることができる。対象体系がちょうど臨界になる確率密度が最も高くなるのは、対象体系の実効増倍率が \bar{k} の値をとったときである。このとき、 \bar{k} の値を推定臨界増倍率¹と呼ぶ。

ここで、Figure A.2 の例において、対象体系がちょうど臨界になる実効増倍率の下限値について調べたいとすると、 \bar{k} からどの程度裕度を取るか考える必要がある。そこで、安全裕度 α を導入し、 α 倍した s を \bar{k} から引くことで、下限値として $\bar{k} - \alpha s$ を用いることとする。ここで、 \bar{k} は頻度分布の形によらず平均 μ 、標準偏差 σ/\sqrt{N} の正規分布に従ってばらつくことが知られている。また、頻度分布を正規分布と仮定することで、不偏分散 s^2 の期待値及び標準偏差はそれぞれ σ^2 、 $\sqrt{2\sigma^4/(N-1)}$ で求まることが知られている。したがって、 $\bar{k} - \alpha s$ は Figure A.2 に示した左側の分布のように幅を持って分布する。

設定した α において臨界超過確率を p とするために、まず正規分布の下側累積確率が p になる値（以降、 k_p と呼ぶ）を求める。 p は Figure A.2 に示した青色の領域に対応する。そして、 k_p を超えて推定臨界下限増倍率の設定に失敗する確率を $1 - \gamma$ と定義する。 $1 - \gamma$ は Figure A.2 に示したオレンジ色の領域に対応する。このとき、 γ を推定臨界下限増倍率の設定に成功する確率として信頼度と呼ぶ。Figure A.2 の例では、 $p = 2.5\%$ 、 $\gamma = 97.5\%$ とした。そして、 $\bar{k} - \alpha s$ 分布の確率密度が最も大きい条件は、対象体系の実効増倍率が $\bar{k} - \alpha s$ 分布の平均値をとったときである。このとき、 $\bar{k} - \alpha s$ の値を推定臨界下限増倍率¹とする。

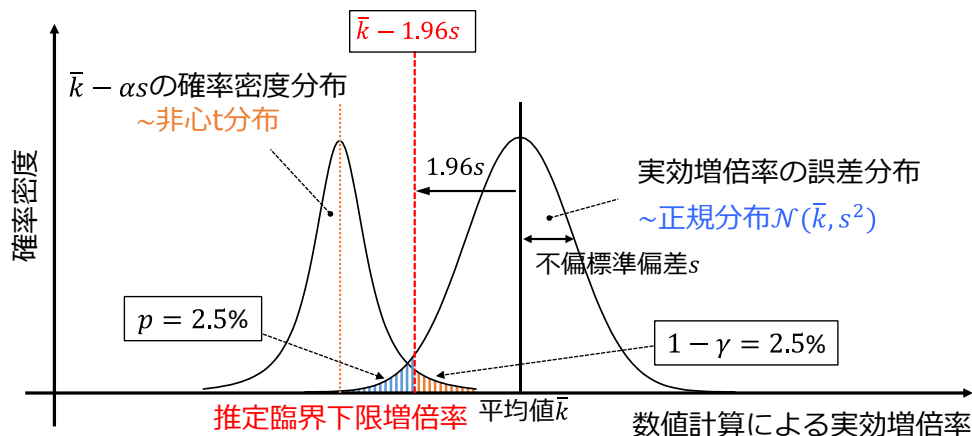


Figure A.2 臨界体系に対する実効増倍率予測結果の頻度分布が正規分布に従う場合

¹ 臨界安全ハンドブック第2版. 日本原子力研究所; 1999. JAERI-1340.

A.2 従来法による推定臨界下限増倍率の計算手順

従来法の推定臨界下限増倍率評価法の計算手順を以下にまとめる。

1. $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験に対する実効増倍率 k_i の標本平均 \bar{k} と不偏分散 s^2 を求める。

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \quad (\text{A.1})$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2 \quad (\text{A.2})$$

2. 実効増倍率 k_i が平均 \bar{k} 、標準偏差 s の正規分布に従うとして、標準正規分布の下側累積確率 p に対応する値を $-\alpha_p$ とする。
3. $\bar{k} - \alpha s \leq \mu - \alpha_p \sigma$ を満足するように、 α の値を設定することを考え、 $\bar{k} - \alpha s \leq \mu - \alpha_p \sigma$ を以下のように式変形する。

$$\frac{\frac{\bar{k} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} + \alpha_p \sqrt{N}}{\sqrt{\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2} \frac{1}{N-1}}} \leq \alpha \sqrt{N} \quad (\text{A.3})$$

4. ここで、(1) 平均値 0、分散 1 の正規分布（標準正規分布）に従う確率変数 X と、(2) 自由度 $\nu = N - 1$ のカイ二乗分布に従い、かつ X と独立な確率変数 Y があった場合、以下で定義される量 T は「自由度 ν 、非心パラメータ m の非心 t 分布」と呼ばれる分布に従う量となる。

$$T \equiv \frac{X + m}{\sqrt{Y/\nu}} \quad (\text{A.4})$$

5. (A.3)式左辺の分子 $X = (\bar{k} - \mu)/(\sigma/\sqrt{N})$ は、中心極限定理より、平均 0、標準偏差 1 の正規分布に従う。また、(A.3)式左辺の分母 $Y = (N - 1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $(N - 1)$ の χ^2 分布に従う。したがって、(A.3)式左辺の $X/\sqrt{Y/(N - 1)}$ は自由度 $(N - 1)$ 、非心パラメータ $\alpha_p \sqrt{N}$ の非心 t 分布に従うことが分かる。よって、自由度 $(N - 1)$ 、非心パラメータ $\alpha_p \sqrt{N}$ の非心 t 分布の下側累積確率 γ に対応する値を α_γ とする。

$$\frac{X}{\sqrt{Y/(N - 1)}} \leq \alpha_\gamma \quad (\text{A.5})$$

6. (A.3)、(A.5)式の右辺の値を比較することで、 $\bar{k} - \alpha s \leq \mu - \alpha_p \sigma$ を満足するためには α の値^{2,3}を以下のように設定すれば良いことが分かる。

$$\alpha = \frac{\alpha_\gamma}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.6})$$

7. こうして求められた α を使用して、推定臨界下限増倍率 k_{sub} を求める。

$$k_{\text{sub}} = \bar{k} - \alpha s \quad (\text{A.7})$$

² Okuno H. Development of a statistical method for evaluation of estimated criticality lower-limit multiplication factor depending on uranium enrichment and H/Uranium-235 atomic ratio. J Nucl Sci Technol. 2007; 44(2):137-146.

³ Owen DB. Factors for one-sided tolerance limits and for variables sampling plans. Washington D.C: Sandia Corporation; 1963. SCR-607.

Appendix. B データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ

B.1 データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ評価方法

核データ起因の実効増倍率不確かさの共分散行列（以降、 Σ_k と呼ぶ）は SCALE マニュアル⁴の(6.6.1)式に基づいて以下の式で計算される。

$$\Sigma_k = \mathbf{S}_{k,\sigma} \Sigma_\sigma \mathbf{S}_{k,\sigma}^T \quad (\text{B.1})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。上添え字‘T’は転置行列を表す。

$\mathbf{S}_{k,\sigma}$ ：実効増倍率の核データに対する感度係数行列

Σ_σ ：核データの共分散行列

実効増倍率の核データに対する感度係数行列 $\mathbf{S}_{k,\sigma}$ は、対象体系の類似体系として選ばれた $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験の実効増倍率計算値 $\{k_{\text{calc},1}, k_{\text{calc},2}, \dots, k_{\text{calc},N}\}$ に対する核データの感度係数ベクトル $\mathbf{S}_{k_i,\sigma}$ から構成される。

$$\mathbf{S}_{k,\sigma} \equiv [\mathbf{S}_{k_1,\sigma} \quad \mathbf{S}_{k_2,\sigma} \quad \dots \quad \mathbf{S}_{k_N,\sigma}]^T \quad (\text{B.2})$$

バイズ理論に基づくバイアス因子法を利用すると、対象体系の類似体系として選ばれた臨界実験の実験結果に基づいて核データ起因の実効増倍率不確かさを低減することができる。データ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさの共分散行列（以降、 $\Sigma_{k'}$ と呼ぶ）は、SCALE マニュアルの(6.6.19)式に基づいて以下の式で計算される。

$$\Sigma_{k'} = \Sigma_k - \Sigma_k^T (\Sigma_k + \mathbf{V}_{\text{exp}})^{-1} \Sigma_k \quad (\text{B.3})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。上添え字‘T’は転置行列を表し、上添え字‘-1’は逆行列を表す。

Σ_k ：データ同化前の核データ起因の実効増倍率不確かさの共分散行列

\mathbf{V}_{exp} ：実験分散行列

実験分散行列 \mathbf{V}_{exp} は、測定値間の相関を考慮しない場合には、対象体系の類似体系として選ばれた $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験の実験誤差 $\{u_{\text{exp},1}, u_{\text{exp},2}, \dots, u_{\text{exp},N}\}$ の対角行列で構成される。

$$\mathbf{V}_{\text{exp}} \equiv \text{diag}(u_{\text{exp},1}, u_{\text{exp},2}, \dots, u_{\text{exp},N}) \quad (\text{B.4})$$

ここで、‘diag’は対角行列を表す。

$\Sigma_{k'}$ の対角要素の平方根が、対象体系の類似体系として選ばれた $i = 1 \sim N$ 個の臨界実験のデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさ $\{u_{\text{XS},1}, u_{\text{XS},2}, \dots, u_{\text{XS},N}\}$ に対応する。本研究では、感度係数行列 $\mathbf{S}_{k,\sigma}$ を MCNP6.2 の Iterated Fission Probability (IFP)⁵を用いて評価し、SCALE6.2 に収録された 56 群の共分散データ Σ_σ と ICSBEP ハンドブックに収録された実験データ \mathbf{V}_{exp} を用いて、SCALE6.2.2.3/TSURFER モジュールによりデータ同化後の核データ起因の実効増倍率不確かさを評価した。

⁴ Rearden BT, Jessee MA (editors). SCALE code system. Oak Ridge (TN): Oak Ridge National Laboratory; 2016. ORNL/TM-2005/39 ver. 6.2.3.

⁵ Kiedrowski BC, Brown FB, Wilson PPH. Adjoint-weighted tallies for k-eigenvalue calculations with continuous-energy Monte Carlo. Nucl Sci Eng. 2011; 168(3):226–241.

B.2 SDF 形式ファイルの作成方法

MCNP6.2 で評価された実効増倍率の核データに対する感度係数を SCALE6.2.3/TSURFER モジュールの入力データとして用いる際、MCNP6.2 の出力ファイルから SDF (Sensitivity data file) 形式に変化する必要がある。SDF ファイル作成時の注意点を以下にまとめる。

1. SDF ファイルは、SCALE マニュアル⁴ の”Format of TSUNAMI-B sensitivity data file”に従って記述する必要がある。特に、マニュアルの Table 6.3.A.2 に示された”Format”の規則に基づいて値や文字をファイルにまとめる必要がある。例えば、
 SDF ファイル 1 行目：「a80」→行頭～80 個の文字
 SDF ファイル 2 行目：「i10」→行頭～10 マスの中に右詰めで整数
 SDF ファイル 3 行目：「i10」「a35」「i10」→行頭から順に「0 マスの中に右詰めで整数」「35 個文字」「0 マスの中に右詰めで整数」
 などである。
2. エネルギー領域の指定は、NG 群の場合、NG+1 個のエネルギー値を与える必要がある。
3. 感度係数を指定する行の一行目は Table B.1 に示した値を順に指定する必要がある。

Table B.1 SDF 感度係数の指定行

マニュアルの説明	計算方法
energy integrated sensitivity coefficient	エネルギー積分された感度係数の総和 (MCNP の場合は出力された感度係数をそのまま総和すればよい)
standard deviation for energy integrated sensitivity coefficient	エネルギー積分された感度係数の相対標準偏差の二乗和の平方根 (ただし、これは各エネルギー群間の相関 (共分散) を無視した近似値である)
sum of absolute value of group-wise sensitivities	エネルギー積分された感度係数の総和 + 感度係数の絶対値の総和
sensitivities with opposite sign as energy integrated value (osc)	負のエネルギー積分された感度係数の総和
standard deviation for osc.	負のエネルギー積分された感度係数の相対標準偏差の二乗和の平方根 (ただし、これも各エネルギー群間の相関 (共分散) を無視した近似値である。)

4. SDF ファイルに収録する感度係数として「、感度係数の要素がすべて 0 となっている核種-反応の感度係数は除く必要がある。
5. 感度係数は、レサジー平均の感度係数ではなく、エネルギー積分された感度係数の値を入力すればよい。レサジー平均の感度係数は、SCALE 付属のグラフィカルユーザーインターフェース(GUI)である Fulcrum.exe で自動的に計算される。
6. SDF ファイル形式における感度係数の標準偏差は、MCNP6.2 出力結果にプリントされる相対値 (相対標準偏差) ではなく、絶対値 (絶対標準偏差) で与える必要がある。

SDF ファイルの作成例を以下に示す。各行の意味を Table B.2 にまとめた。

```

water_rev2_15mm
    56    number of neutron groups
        1    number of sensitivity profiles          1 are region integrated
1.544760 +/-    0.000070 k-eff from the forward case
energy boundaries:
2.000000e+07  6.434000e+06  4.304000e+06  3.000000e+06  1.850000e+06
1.500000e+06  1.200000e+06  8.611000e+05  7.500000e+05  6.000000e+05
4.700000e+05  3.300000e+05  2.700000e+05  2.000000e+05  5.000000e+04
2.000000e+04  1.700000e+04  3.740000e+03  2.250000e+03  1.915000e+02
1.877000e+02  1.175000e+02  1.160000e+02  1.050000e+02  1.012000e+02
6.750000e+01  6.500000e+01  3.713000e+01  3.600000e+01  2.175000e+01
2.120000e+01  2.050000e+01  7.000000e+00  6.875000e+00  6.500000e+00
6.250000e+00  5.000000e+00  1.130000e+00  1.080000e+00  1.010000e+00
6.250000e-01  4.500000e-01  3.750000e-01  3.500000e-01  3.250000e-01
2.500000e-01  2.000000e-01  1.500000e-01  1.000000e-01  8.000000e-02
6.000000e-02  5.000000e-02  4.000000e-02  2.530000e-02  1.000000e-02
4.000000e-03  1.000000e-05
h-1    elastic  1001    2
        0    0
0.000000e+00  0.000000e+00    0
9.488405e-02  3.764774e-03  2.381174e-01 -2.417464e-02  2.555075e-03
-9.901300e-04 -7.596900e-04 -2.173600e-03 -3.592600e-03 -1.228800e-03
-8.914800e-04  2.906100e-04  2.798400e-04 -1.000400e-04 -4.522600e-06
1.169500e-03  3.066000e-04 -1.751300e-05  2.420300e-03  3.459200e-03
5.377200e-04  6.616300e-03  2.924000e-03  1.769400e-02  6.791100e-04
3.269900e-03  9.179000e-04  9.300100e-04  1.852100e-03  3.463200e-03
2.808000e-03  5.611100e-03  3.174200e-03  6.507100e-03  2.355000e-03
4.179200e-03  1.678000e-02  2.114800e-03  7.951500e-03  3.778500e-03
4.993100e-03  7.383500e-03 -4.578300e-05 -5.597300e-05 -4.283600e-05
8.292100e-04 -4.302500e-05  1.495900e-05 -3.299400e-04  2.220900e-04
2.498200e-04  3.035200e-04 -6.268500e-04 -3.899600e-04 -1.698800e-03
-2.961800e-03 -2.175500e-03 -4.052500e-03 -1.993300e-03  1.937400e-03
1.055400e-03
8.960677e-05  1.795147e-04  2.343141e-04  4.174601e-04  2.687386e-04
2.618277e-04  3.669242e-04  2.557738e-04  3.242396e-04  3.328294e-04
3.903791e-04  3.299936e-04  4.264818e-04  8.943008e-04  7.011798e-04
2.532123e-04  8.574725e-04  5.105304e-04  1.120030e-03  1.037001e-04
5.084695e-04  6.957682e-05  1.944651e-04  1.196457e-04  4.038091e-04
1.232712e-04  4.544991e-04  9.617826e-05  4.704633e-04  8.760600e-05

```

9.319616e-05	6.376400e-04	7.232616e-05	1.057550e-04	1.091986e-04
3.115694e-04	8.343355e-04	1.738472e-04	1.816324e-04	4.437553e-04
4.515048e-04	3.538591e-04	1.959435e-04	1.998777e-04	4.163521e-04
4.422813e-04	5.320402e-04	8.050008e-04	7.032929e-04	8.517783e-04
7.946509e-04	6.959425e-04	1.034198e-03	1.114255e-03	6.044688e-04
3.633742e-04				

Table B.2 SDF ファイル例の各行の意味

行	意味
1	タイトル
2	エネルギー群数
3	感度係数の核種及び反応の組み合わせの数
4	実効増倍率計算値と統計誤差
5~17	エネルギー [eV]
18	核種、反応、ZAID [†] 、MT 番号 [‡]
19~20	Unit number、Number of the region within the unit、Unit comments は 0 でよい。Zone number 及び Zone volume の値は、感度係数が全領域で積分された値であれば 0 でよい。
21	Table B.1 を参照
22~33	エネルギー積分された感度係数の値
34~45	感度係数の標準偏差

[†]: ZAID = Z * 1000 + A (ただし、Zは原子番号、Aは質量数を表す)

[‡]: 反応を表す Index。ENDF フォーマット⁶を参照。

⁶ Trkov A, Herman M, Brown DA. ENDF-6 formats manual: Data formats and procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI, ENDF/B-VII and ENDF/B-VIII. New York (NY). Brookhaven National Laboratory; 2018. BNL-203218-2018-INRE.

Appendix. C Upper Subcritical Limit (USL)評価法

C.1 極値理論に基づく USL 評価法

Whisper-1.1 で採用されている Upper subcritical limit (USL)⁷の基本的な考え方として、臨界体系の実効増倍率 1 からより未臨界側に（実効増倍率がより小さな負側に）裕度を取って未臨界と判断できる上限値を設定する。USL では以下に示す不確かさに対する裕度が考慮される。

- (a) 対象体系の類似体系として選出した臨界実験体系に対する実効増倍率計算値と実験値とのバイアス ($\beta_i = k_{\text{calc},i} - k_{\text{exp},i}$)。さらに、バイアスの不確かさとして、(1) モンテカルロ計算に伴う統計誤差、(2) 臨界実験の実験誤差も考慮される。
- (b) 対象体系に対する核データ起因の実効増倍率不確かさ
- (c) 使用する計算コードにおける未検知誤差（コーディングエラーなど）
- (d) 対象体系の実効増倍率不確かさ

(a)については、実効増倍率の計算値が実験値より過小評価になることで、臨界安全上厳しく（非保守的に）なるため、実験値と計算値の系統的な差 ($-\beta_i = k_{\text{exp},i} - k_{\text{calc},i}$) に対して「最大限どの程度の裕度を見込むべきか」という観点から最大値の極値分布（以降、極大値分布と呼ぶ）に注目し裕度を設定する。(b)については、臨界実験結果を踏まえてデータ同化された断面積調整後の共分散データを用いて対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさを評価し、2.6 倍した値を裕度として用いる。この 2.6 という数字は核データが正規分布に従うと仮定した時の信頼区間 99%、有意水準 1% の範囲を示す値である。(c)については、連続エネルギーモンテカルロ計算は、複雑な計算処理から成るため、コード開発者が認識しきれていない、計算コードの潜在的なバグが潜んでいる可能性がある。このような検知しきれていない計算コードのバグに起因した誤差として、Whisper-1.1 では経験的に 0.005 がデフォルト値として設定されている。(d)については、

- 対象体系の統計誤差
- 組成や寸法など製造公差に起因した不確かさ

などの不確かさがあるが、Whisper-1.1 に収録されているデータベースから計算できる裕度ではなく、解析者が対象体系に応じて裕度を評価する。

以上で述べた不確かさに対する裕度を 1 から引くことで、USL は以下のように計算される。

$$\text{USL} = 1 - \text{CM} - \text{MOS}_{\text{data}} - \text{MOS}_{\text{software}} - \text{MOS}_{\text{application}} \quad (\text{C.1})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。

CM : 対象体系の類似体系として選出した臨界実験体系に対する実効増倍率計算値と実験値とのバイアスに対する計算裕度 (Calculation margin)。CM は $-\beta_i$ の極大値分布の下側累積確率が 99% になる値である。

MOS_{data} : 対象体系の核データ起因の実効増倍率不確かさに対する未臨界裕度 (Margin of subcriticality)

MOS_{software} : 使用する計算コードにおける未検知誤差に対する未臨界裕度 (Margin of subcriticality)

MOS_{application} : 対象体系の実効増倍率不確かさに対する未臨界裕度 (Margin of subcriticality)

⁷ Kiedrowski BC, Brown FB, Conlin JL, et al. Whisper: Sensitivity/uncertainty-based computational methods and software for determining baseline upper subcritical limits. Nucl Sci Eng. 2015; 181(1):17–47.

極値分布に基づく USL 評価法の概要を Figure C.1 に示す。 $-\beta_i$ の最大値分布を考えることは、提案手法で用いた臨界体系に対する実効増倍率予測結果 $k_i = 1 + \beta_i$ の最小値が漸近的に従う分布（以降、極小値分布と呼ぶ）を考えることと等価な条件になる。したがって、CM は k_i の極小値分布の下側累積確率が1%になる値から求めることができる。青色の破線（ $1 - \beta$ ）は k_i の極小値分布の平均値である。 σ_β は $-\beta$ の不確かさを表し、直接極値分布から求められる量ではないため、CM から $-\beta$ を引いた値を用いる。赤破線は $1 - \text{CM}$ に対応し、オレンジ色の点線は $1 - \text{CM}$ から MOS を引いた値、すなわち USL に対応する。 $1 - \text{CM}$ の部分は計算値と実験値のバイアスを考慮する項であり、提案手法による推定臨界下限増倍率に相当する。

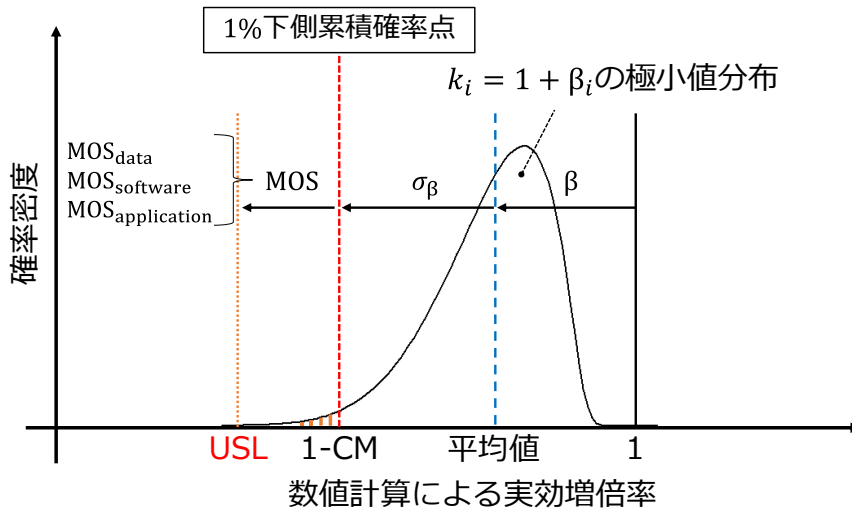


Figure C.1 極値分布に基づく USL 評価法の概要

C.2 極値分布に基づく CM の計算手順

CM の導出過程について以下に示す。

1. i 番目の臨界実験について、実効増倍率の計算値と実験値とのバイアス（以降、 β_i と呼ぶ）を以下の式で定義する。

$$\beta_i = k_{\text{calc},i} - k_{\text{exp},i} \quad (\text{C.2})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。

$k_{\text{calc},i}$: 実効増倍率の計算値

$k_{\text{exp},i}$: 実効増倍率の実験値

2. β_i の不確かさとして、(1) モンテカルロ計算に伴う統計誤差、(2) 選出した臨界実験の組成や製造公差およびモデルの簡略化などに起因する誤差（すなわち臨界実験の実験誤差）、の2つの誤差を誤差伝播則に基づいて考慮する。すなわち、実効増倍率の計算値と実験値とのバイアスの不確かさ（以降、 u_i と呼ぶ）は以下の式で定義される。

$$u_i = \sqrt{u_{\text{calc},i}^2 + u_{\text{exp},i}^2} \quad (\text{C.3})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。

$u_{\text{calc},i}$: モンテカルロ計算に伴う実効増倍率の統計誤差

$u_{\text{exp},i}$: 臨界実験の実験誤差

3. 実効増倍率の計算値と実験値とのバイアス符号を反転させた量（実験値と計算値の系統的な差）が平均値 $-\beta_i$ 、標準偏差 u_i の正規分布にそれぞれ従うと仮定する。 $-\beta_i$ が従う正規分布の確率密度関数（以降、 $f_i(x)$ と呼ぶ）と累積分布関数（以降、 $F_i(x)$ と呼ぶ）は、以下の式で定義される。

$$f_i(x) = \frac{w_i}{\sqrt{2\pi u_i^2}} \exp\left[-\frac{(x + \beta_i)^2}{2u_i^2}\right] \quad (\text{C.4})$$

$$F_i(x) = (1 - w_i) + \frac{w_i}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x + \beta_i}{\sqrt{2}u_i}\right) \right] \quad (\text{C.5})$$

ここで、それぞれの項の意味は以下に示す通りである。

N : 選出された臨界実験数

w_i : 選出された i 番目の臨界実験の重み。対象体系と選出された臨界実験の間の核データ起因の相関係数（代表性因子）に基づいて重み付けされる。最も類似する臨界実験の重みが1となるように規格化する必要がある。

β_i : 選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率計算値と実験値とのバイアス

u_i : 選出された i 番目の臨界実験の実効増倍率計算値と実験値とのバイアスの不確かさ

$\operatorname{erf}(x)$: 誤差関数。誤差関数は以下の式で定義される。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{C.6})$$

4. $-\beta_i$ の最大値が漸近的に従う分布として、極大値分布を仮定する。 $-\beta_i$ の極大値分布の確率密度関数（以降、 $f(x)$ と呼ぶ）と累積分布関数（以降、 $F(x)$ と呼ぶ）は、以下の式で定義される。なお、極小値分布は、極大値分布における確率変数 x を $-x$ で置き換えることで得られる。

$$f(x) = F(x) \sum_{i=1}^N \frac{f_i(x)}{F_i(x)} \quad (\text{C.7})$$

$$F(x) = \prod_{i=1}^N F_i(x) \quad (\text{C.8})$$

5. CM は $-\beta_i$ の極大値分布の累積分布関数 $F(x)$ が確率 $q = 0.99$ となる値として、以下の式で得られる。

$$F(\text{CM}) = q \quad (\text{C.9})$$

6. $-\beta$ は、 $-\beta_i$ の極大値分布の期待値として以下の式で計算される。

$$-\beta = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{C.10})$$

7. σ_β は、CM と $-\beta$ の差として以下の式で計算される。

$$\sigma_\beta = \text{CM} - (-\beta) \quad (\text{C.11})$$

Appendix. D 提案手法による推定臨界下限増倍率の計算コード

ブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法の実装例として、R 言語を用いて作成した計算コードのプログラムを示す。

```
#ECLLMF source code, R script, Takuto Hayashi, 2020/12/19

#開始
#データの読み込み
data = read.csv("data.csv")

#データの入力
k_calc = data$k_calc
k_exp = data$k_exp
k = k_calc - (k_exp - 1) #実効増倍率
unc_calc = data$unc_calc
unc_exp = data$unc_exp
unc_xs = data$unc_xs
unc = sqrt(unc_exp ^ 2 + unc_calc ^ 2 + unc_xs ^ 2) #実効増倍率の不確かさ
weight = data$weight / sum(data$weight) #重み
N = length(k) #臨界実験数

#推定臨界下限増倍率の計算条件
p = 0.025 #臨界超過確率
gamma = 0.975 #信頼度

#下側累積確率点の計算条件
kpm = 0.0 #上限設定
kpp = 2.0 #下限設定
pm = sum(weight * pnorm(kpm, mean = k, sd = unc)) #下側累積確率の計算
pp = sum(weight * pnorm(kpp, mean = k, sd = unc)) #下側累積確率の計算

#下側累積確率点の反復計算
for (r in 1:100) {
  kpr = (kpm + kpp) / 2 #計算区間の中点
  pr = sum(weight * pnorm(kpr, mean = k, sd = unc)) #下側累積確率の計算
  print(c(r, kpr, pr))

  #収束判定
  if (abs(pr / p - 1) < 1e-10) break #下側累積確率がpと一致したら終了
  else if (pr > p) kpp = kpr #上限を中点と入れ替え
```

```

else kpm = kpr #下限を中点と入れ替え
}
kp = kpr #下側累積確率点kp

#ブートストラップ法の計算条件
B = 10 ^ 5 #ブートストラップ法の反復回数
k_hat = numeric(B) #ベクトルの生成
s_hat = numeric(B) #ベクトルの生成

#ブートストラップ法の反復計算
set.seed(1) #初期乱数の指定
for (b in 1:B) {
  j = sample(1:N, size = N, replace = TRUE, prob = weight) #iをリサンプリング
  k_ast = k[j] #実効増倍率のリサンプル
  for (l in 1:N) {
    z = rnorm(1, 0, 1) #標準正規乱数の作成
    k_ast[l] = k_ast[l] + z * unc[j[l]] #リサンプルに不確かさを追加
  }

  #リサンプリングの平均値と不偏標準偏差を計算
  k_hat[b] = mean(k_ast)
  s_hat[b] = sd(k_ast)
}

#安全裕度の計算条件
agm = 1.0 #下限設定
agp = 5.0 #上限設定
kgm = k_hat - agm * s_hat #ブートストラップ標本の計算
kgp = k_hat - agp * s_hat #ブートストラップ標本の計算

#安全裕度の反復回数
for (t in 1:100) {
  agt = (agm + agp) / 2 #計算区間の中点
  kgt = k_hat - agt * s_hat #ブートストラップ標本の計算
  gt = length(kgt[kgt <= kp]) / B #信頼度の計算
  print(c(t, agt, gt))

  #収束判定
  if (abs(gt / gamma - 1) < 1e-10) break #信頼度がgammaと一致したら終了
  else if (gt > gamma) agp = agt #上限を中点と入れ替え
}

```

```

else agm = agt          #下限を中点と入れ替え
}
alpha = agt #安全裕度alpha

#推定臨界下限増倍率の計算
k_bar = mean(k_hat)    #標本平均k_bar
s = mean(s_hat)       #不偏標準偏差s
ksub = k_bar - alpha * s #推定臨界下限増倍率ksub

#結果の出力
print(c(k_bar, s, kp, alpha, ksub))

#終了

```


公刊論文

1. 林卓人, 遠藤知弘, 山本章夫. Bootstrap法を用いた推定臨界下限増倍率の算出方法. 日本原子力学会中部支部研究発表会; 2018年12月11日-12日; 愛知.
2. 林卓人, 遠藤知弘, 山本章夫. Bootstrap法を用いた推定臨界下限増倍率の算出方法. 日本原子力学会2019年春の年会; 2019年3月20日-22日; 茨城.
3. Hayashi T, Endo T, Yamamoto A. Calculation method of estimated criticality lower-limit multiplication factor using the bootstrap method. Proc. M&C 2019; 2019 Aug 25-29; Portland (OR).
4. 西岡楓賀, 林卓人, 遠藤知弘, 山本章夫. Bootstrap法を用いた推定臨界下限増倍率の算出方法, (2) 核特性の類似度、実験誤差、モンテカルロ計算の統計誤差を考慮した改良. 日本原子力学会2019年秋の大会; 2019年9月11日-13日; 富山.
5. Hayashi T, Nishioka F, Endo T, Yamamoto A. Estimated criticality lower-limit multiplication factor considering neutronic similarity and uncertainties of effective multiplication factor using the bootstrap method, (1) Theory. Proc. Reactor Physics Asia 2019 (RPHA19); 2019 Dec 2-3; Osaka.
6. Nishioka F, Hayashi T, Endo T, Yamamoto A. Estimated criticality lower-limit multiplication factor considering neutronic similarity and uncertainties of effective multiplication factor using the bootstrap method, (2) Application. Proc. Reactor Physics Asia 2019 (RPHA19); 2019 Dec 2-3; Osaka.
7. Hayashi T, Nishioka F, Endo T, Yamamoto A. Estimated criticality lower-limit multiplication factor of low-enriched uranium dioxide-concrete system using the bootstrap method. EPJ Web Conf. 2021; 247(17001).
8. Hayashi T, Endo T, Yamamoto A. Application of bootstrap method to estimated criticality lower-limit multiplication factor considering nuclear data-induced uncertainty. Trans Am Nucl Soc. 2020; 122:458-461.
9. Hayashi T, Endo T, Yamamoto A. Validation of estimated criticality lower-limit multiplication factor for KUCA-C core. Proc. 8th Reactor Physics Workshop (RPW2020); 2020 Dec 2.
10. 林卓人, 遠藤知弘, 山本章夫. 燃料デブリ模擬体系に対するブートストラップ法を用いた推定臨界下限増倍率評価法の適用. 日本原子力学会2021年春の年会; 2021年3月17日-19日.
11. Hayashi T, Endo T, Yamamoto A. Proposal and applicability of estimated criticality lower-limit multiplication factor using the bootstrap method. J Nucl Sci Technol. 2021 Mar 7. [accepted]