

修士論文

モンテカルロ法による固有値計算における  
統計誤差過小評価に関する研究

名古屋大学大学院  
工学研究科博士課程(前期課程)  
マテリアル理工学専攻  
量子エネルギー工学分野  
量子エネルギーシステム工学講座  
エネルギー量子制御工学グループ  
林 幸司  
平成 29 年 2 月



# 目次

第1章	序論	1
1.1	背景	1
1.2	モンテカルロ法による炉心計算	2
1.2.1	モンテカルロ計算の概要	2
1.2.2	固有値計算における統計誤差過小評価	2
1.3	本研究の目的	3
1.4	本論文の構成	4
第2章	モンテカルロ法による固有値計算	5
2.1	本章の概要	5
2.2	固有値計算と世代の概念	5
2.3	中性子のランダムウォーク	6
2.3.1	アナログ法	7
2.3.2	非アナログ法	10
2.4	エスティメータ	14
2.5	世代間の相関と統計誤差過小評価	15
2.6	本章のまとめ	17
第3章	統計誤差過小評価割合の予測モデル	18
3.1	本章の概要	18
3.2	統計誤差過小評価割合の理論式	18
3.2.1	局所タリ-統計量の展開係数の世代推移	18
3.2.2	自己回帰モデル	21
3.2.3	統計誤差過小評価割合の理論式の導出	22
3.3	本章のまとめ	30
第4章	統計誤差過小評価割合の予測に必要なパラメータの計算手法	31
4.1	本章の概要	31
4.2	固有値・固有関数	31
4.2.1	解析的に求める場合	32
4.2.2	数値的に求める場合	37
4.2.3	固有関数の規格化について	39
4.3	ノイズ項の分散	46
4.3.1	ノイズ項の理論式の導出	46
4.3.2	ノイズ項の分散の評価手法	49
4.4	ノイズ項の分散の次数依存性についての検証	50

4.4.1	ノイズ項の分散の参照値の算出方法.....	50
4.4.2	ノイズ項の分散の予測値の計算方法.....	52
4.4.3	エネルギー1群の場合.....	55
4.4.4	エネルギー2群の場合.....	61
4.4.5	考察.....	68
4.5	本章のまとめ.....	72
第5章	統計誤差過小評価割合の予測モデルの検証.....	73
5.1	本章の概要.....	73
5.2	統計誤差過小評価割合の参照値.....	73
5.2.1	参照値の算出手法.....	73
5.2.2	統計誤差過小評価割合の不確かさ.....	74
5.3	エネルギー1群・1次元均質平板体系.....	74
5.3.1	計算条件.....	74
5.3.2	計算結果.....	77
5.3.3	考察.....	79
5.4	エネルギー2群・1次元均質平板体系.....	82
5.4.1	計算条件.....	82
5.4.2	計算結果.....	87
5.4.3	考察.....	89
5.5	エネルギー1群・2次元均質平板体系.....	91
5.5.1	計算条件.....	91
5.5.2	計算結果.....	94
5.5.3	考察.....	95
5.6	統計誤差過小評価割合の予測モデルの炉心体系への適用.....	97
5.6.1	C5G7 ベンチマーク問題.....	97
5.6.2	計算結果.....	101
5.6.3	考察.....	102
5.7	本章のまとめ.....	110
第6章	結論.....	111
6.1	まとめ.....	111
6.2	今後の課題.....	113
参考文献	.....	115
謝辞	.....	118
Appendix. A	断面積が統計誤差過小評価に与える影響.....	119
A.1	計算条件.....	119
A.2	計算結果.....	120

A.3 考察.....	121
公刊論文リスト .....	124

## 記号

$\vec{r}$	位置
$E$	エネルギー
$\vec{\Omega}$	飛行方向
$\phi$	全中性子束
$\phi_n$	$n$ 次モード全中性子束
$\phi_n^\dagger$	$n$ 次モード随伴全中性子束
$\psi$	角度中性子束
$\psi_n$	$n$ 次モード角度中性子束
$\psi_n^\dagger$	$n$ 次モード随伴角度中性子束
$k_n$	$n$ 次モード固有値
$\rho_n$	$n$ 次モード固有値比
$\Sigma_t$	巨視的全断面積
$\Sigma_s$	巨視的散乱断面積
$\Sigma_a$	巨視的吸収断面積
$\Sigma_r$	巨視的除去断面積
$\Sigma_f$	巨視的核分裂断面積
$\nu$	核分裂あたりに発生する中性子の数
$\chi$	核分裂スペクトル
$D$	拡散係数

# 第1章 序論

## 1.1 背景

原子炉の安全性評価は、数値シミュレーションを利用して出力分布などの炉心特性を予測し、それらを実行することで行われる。その計算手法は、決定論的手法と確率論的手法の2種類に大別される。決定論的手法は乱数を用いず、反復解法などにより中性子輸送方程式を解く手法であり、確率論的手法は乱数を用いて中性子の挙動を追跡することで中性子輸送方程式を解く手法である。ここで言う確率論的手法とはすなわちモンテカルロ法のことを指す。この手法の利点としては、「複雑な幾何形状を忠実に模擬できる」、「断面積のエネルギー依存性をより正確に取り扱うことができる」、「統計数を増やすことで高精度の解を得られる」、などの点が挙げられる。統計数を増やせば計算時間も長くなるが、近年の計算機性能の向上によりこの欠点が改善しつつあり、大型体系の炉心解析にもモンテカルロ法を用いることができるようになりつつある[1]。

モンテカルロ法を炉心解析に用いる場合、乱数を用いて中性子の振る舞いを確率的に再現し、その挙動を追跡して物理量を評価する。しかし、最初は中性子源の分布が未知のため、一様分布などを仮定し、べき乗法に基づいた反復計算により真の中性子源分布に収束させる必要がある[2]。この反復計算では、1つ前の世代で得られた核分裂源の位置を次の世代の中性子源として使用しているため、先行世代の核分裂源分布の統計的な誤差が後の世代に影響を与え、その結果、世代間に相関が生じる。しかし、既存のモンテカルロコードでは、各世代に相関が無いものと仮定して中心極限定理に従い統計誤差を計算しているため、世代間の相関が無視できないほど強い体系の場合、出力される統計誤差は本来の統計誤差よりも小さく見積もられることがある[3]。モンテカルロ法は極力近似を排した計算が可能のため、様々な問題の参照解を計算するために用いられている。その参照解に付随する統計誤差が過小に評価されることは、計算結果の信頼性を担保するにあたり非常に重要な問題となる。

統計誤差過小評価が起りやすい体系の例として、大型の原子炉体系や、結合の弱い体系など、ドミナンス比が1に近い体系が挙げられる。ドミナンス比とは、体系の基本モード固有値と1次モード固有値の比のことであり、べき乗法の収束の速さを表す指標として使われる。ドミナンス比が1に近いほど、べき乗法による核分裂中性子源分布の収束は遅くなり、世代間の相関が強く表れるため、各世代が独立であるという仮定が成り立たない。そのため、無相関の中心極限定理によって推定された統計誤差は真の統計誤差に比べ過小に評価されることがある。また、ピン出力などの局所解に付随する統計誤差は、世代間の相関だけでなく、統計を取る領域の幾何形状にも左右されることが過去の研究で報告されている[4][5][6]。

過小評価されていない“真の統計誤差”を求める方法の一つに、初期乱数を変えた多数回のモンテカルロ計算を実施し、その結果を統計処理する手法がある。しかし、大型の体系に

において、詳細な計算条件を設定した場合、1回のモンテカルロ計算に数日かかることも珍しくないため、必要な統計数を確保するためには膨大な計算時間が必要となる。そのため、別の方法で真の統計誤差を求めることが望まれている。

## 1.2 モンテカルロ法による炉心計算

### 1.2.1 モンテカルロ計算の概要

モンテカルロ法は乱数を用いた統計的な手法であり、原子力分野をはじめ素粒子物理や金融工学など、確率的な事象を扱う様々な分野で利用されている[7]。モンテカルロ計算では、計算機上で中性子の振る舞い（ランダムウォーク）を確率的に再現し、その挙動を追跡することで中性子束や実効増倍率などを計算する。

原子力分野におけるモンテカルロ法では、主に固定源計算と固有値計算の2つを取り扱う[8]。固定源計算は、中性子源の分布やエネルギースペクトルなどの情報が既知の体系において、ユーザーが設定した粒子数（ヒストリー数）だけランダムウォークを繰り返す計算であり、中性子遮蔽解析などに用いられる。それに対し、固有値問題では計算開始時に中性子源となる核分裂中性子発生位置の分布（固有関数）が未知であるという問題がある。そのため、最初は一様分布などを仮定し、“世代”という概念を使った反復計算により真の中性子源分布に収束させる[9]。世代とは1つの計算単位であり、1世代は核分裂によって発生した中性子が吸収・漏洩によって全て消滅するまでを指す。1つの世代の中ではあらかじめ設定したヒストリー数だけ中性子が発生し、それらを1つずつ追跡していく。この時、核分裂が発生した場合はその位置を記録しておく。全ての中性子の追跡が終了したらその世代における実効増倍率などを計算し、次の世代の計算に移る。次の世代の計算では、前の世代に記録しておいた核分裂発生位置から中性子を発生させ、ランダムウォークを行う。これをあらかじめ設定した世代数だけ繰り返すが、中性子の挙動を評価する際に乱数を使っているため各世代の計算結果にはばらつきが生じる。そのため、最後に各世代の計算結果を統計処理し、これを最終的な計算結果とする。

### 1.2.2 固有値計算における統計誤差過小評価

モンテカルロ法における固有値計算では、その計算アルゴリズムに起因する統計誤差評価上の問題が存在する。

#### ・中性子源分布の収束に関する問題

前節で述べたように、固有値計算では初期の中性子源分布をユーザーが仮定し、反復計算を経て真の中性子束分布に収束させる。そのため、計算初期の世代の核分裂中性子源分布は真の分布からかけ離れている可能性があり、信用できない。よって、各世代の計算結果を統計処理する段階において、真の分布に収束する以前の世代の結果を除外する必要がある。この除外する世代を“捨てバッチ”と呼ぶ。どの程度の世代数で真の分布に収束するかを評価



する手法[10] [11] [12] も研究されているが、ユーザーが経験的に除外する世代数を設定しているのが現状である。

#### ・統計誤差過小評価の問題

固有値計算における反復計算では、べき乗法の理論に従い前世代の核分裂発生位置を次世代の中性子源として使用している。そのため、固有値計算の各世代の計算結果には相関が生じる。また、モンテカルロ計算では乱数を用いるため、核分裂中性子源分布が十分に収束した後の世代でも計算結果は統計的に揺らぐ。商業用原子炉体系や結合の弱い体系など、核分裂中性子源分布の収束が遅い体系では、世代間の相関が強く、先行世代で発生した統計的な揺らぎは核分裂中性子源分布の相関を介して伝播・蓄積しやすい[13]。現在広く使われているモンテカルロコード (MCNP, KENO, MVP など) では、全世代の計算が終了した後、その結果を統計処理 (平均) して最終的な解としている。この時、各世代の計算結果が独立であると仮定して計算している。つまり、世代間に相関がないものとして統計量を計算しているため、相関による統計誤差の影響を無視していることになる。このため、世代間の相関が強い体系においては、モンテカルロ計算で出力される統計誤差は、真の統計誤差よりも小さな値となることがある。

### 1.3 本研究の目的

1.2 節で述べた統計誤差評価上の問題を解決するために、これまで様々な手法が提案されてきた。それらはアプローチの仕方によって以下の3種類に分類できる。

- (1) 時系列解析の手法により世代間の相関を考慮して真の統計誤差を推定する手法[14] [15]
- (2) モンテカルロ法の計算方法を工夫することで世代間の相関を低減し、統計誤差過小評価が起きないようにする手法[16] [17]
- (3) 統計誤差過小評価が起こるメカニズムを解明し、真の統計誤差を理論的に予測する手法[18]

本研究では、原子炉物理学の理論と時系列解析の手法を組み合わせることで統計誤差過小評価割合 (過小評価された統計誤差と真の統計誤差の比) を理論的に予測する手法を開発することを目的とする。上記の分類では(3)に該当するが、本手法では原子炉物理学の立場に立って (炉物理パラメータを使って) 過小評価のメカニズムを解明する点が特徴となる。また、本研究では、実効増倍率などの体系全体の統計量に付随する統計誤差ではなく、中性子束分布や核分裂率分布などの局所タリーに付随する統計誤差を対象としている点を強調しておく。

先行研究では、統計誤差過小評価割合の理論式を導出し、過小評価割合の予測に必要なとなるパラメータが解析的に計算できるような簡易な体系で理論式の妥当性を検証した[13] [19] [20]。本研究では、過小評価割合の予測に必要なパラメータを計算する手法を開発し、

解析解が得られないような複雑な問題に対しても理論式を適用し、過小評価割合の予測を試みる。

#### 1.4 本論文の構成

本論文は6章構成である。第1章では、本研究の背景として、モンテカルロ法による固有値計算の問題点を挙げ、モンテカルロ計算の概要とそのアルゴリズムに起因する統計誤差過小評価の原因について述べ、本研究の目的を示した。第2章では、モンテカルロ法による固有値計算について、その計算方法を詳しく述べる。第3章では、統計誤差過小評価割合の理論式を導出する。第4章では、第3章で導出した理論式の計算に必要となる固有値、固有関数、ノイズ項の分散について、その計算手法を示す。第5章では、第3章に示した計算手法で求めたパラメータを統計誤差過小評価割合の理論式に代入することで過小評価割合を予測し、参照値と比較することで、本研究で提案する予測手法の妥当性について検証する。最後に、第6章で本論文の結論を示す。

## 第2章 モンテカルロ法による固有値計算

### 2.1 本章の概要

本章では、中性子発生位置が中性子束分布に依存し、計算開始時には中性子源分布が未知であるような問題（固有値問題）を、モンテカルロ法を使って解く手法と、その手法に起因する統計誤差評価上の問題について述べる。2.2節では、固有値計算の概要と、それをモンテカルロ法で解く際に導入される“世代”の概念について述べる。2.3節では、統計誤差過小評価とも深く関係する中性子のランダムウォークについて述べる。2.4節では、中性子のランダムウォークを追跡して実効増倍率や中性子束などの物理量を評価する手法であるエステイメータについて述べる。2.5節では、世代間の相関が統計誤差過小評価を引き起こすメカニズムについて述べる。最後に、2.6節において本章をまとめる。

### 2.2 固有値計算と世代の概念

定常状態かつ外部中性子源が存在しない体系を仮定すると、中性子輸送方程式は消滅・生成演算子を使って次式のように記述できる。

$$\mathbf{A}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \equiv \vec{\Omega} \nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\chi(\vec{r}, E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \quad (2.3)$$

$\mathbf{A}$ ：消滅演算子， $\mathbf{F}$ ：生成演算子

(2.1)式を解くことで実効増倍率や中性子束を求めることができる。ここで、(2.1)式は以下のように変形できる。

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = k_0 \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.4)$$

(2.4)式において、 $k_0$ 、 $\psi$ はそれぞれ $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}$ の固有値、固有関数に対応している。すなわち、(2.1)式のような中性子輸送方程式を解く、ということは、 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}$ の固有値、固有関数を求めることと同義である。このことから、(2.1)式を解くことは固有値計算と呼ばれる。

モンテカルロ法による数値シミュレーションでは、べき乗法に基づいて基本モード固有関数（中性子束）を計算し、それに対応した基本モード固有値（実効増倍率）が得られる。べき乗法の詳しい理論については3章で述べるが、ここではべき乗法における世代の概念について説明する。

べき乗法では、反復回数を世代と呼び、(2.1)式の中性子束 $\psi$ に世代数を表す添え字 $i$ を加えた(2.5)式を用いる。

$$\mathbf{A}\psi^{(i+1)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (2.5)$$

$\psi^{(i)}$  :  $i$ 世代目の角度中性子束

(2.5)式は $i + 1$ 世代目の中性子輸送方程式であり，右辺は $i$ 世代目の中性子が引き起こした核分裂により発生した $i + 1$ 世代目の中性子を表し，左辺は右辺で発生した $i + 1$ 世代目の中性子の吸収反応や体系外への漏洩による消滅を表す．このように，核分裂で発生した中性子が全て消滅するまでが1世代と定義される．この過程において核分裂反応が起こった場合，新たに中性子が発生するが，この世代ではその中性子の追跡は行われず，次世代の中性子源として発生位置が記録される．次世代においては記録された核分裂発生位置から中性子の追跡が始まる．

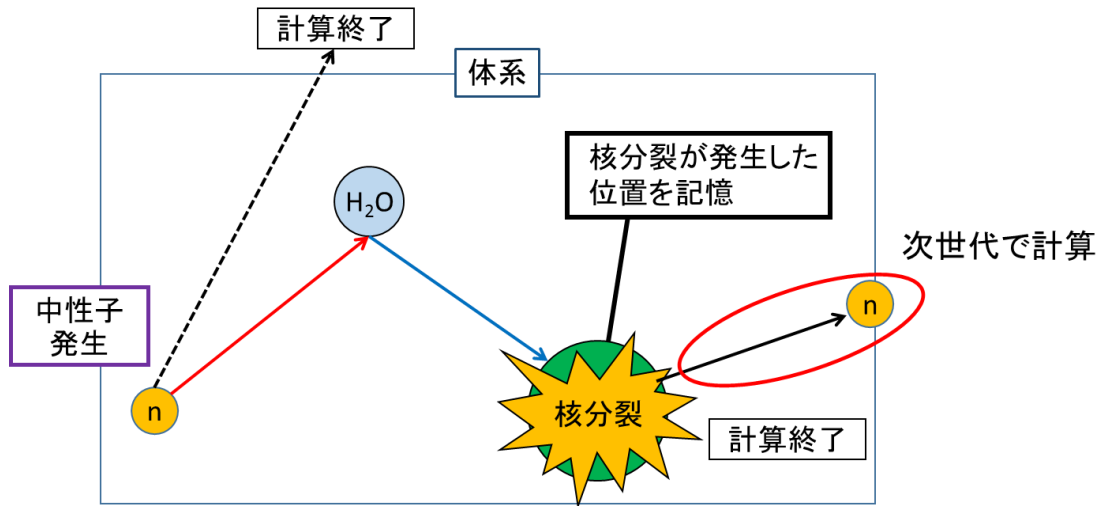


Fig. 2.1 世代の概念図

このサイクルを繰り返すことによって核分裂中性子源分布は真の分布に収束する．

上記の計算過程から分かるように，前世代の核分裂反応の位置が次世代の中性子源となっているため，核分裂中性子源分布には世代間で相関が生じる．

### 2.3 中性子のランダムウォーク

本節では，中性子源から発生した中性子の挙動（ランダムウォーク）を，乱数を用いて計算機上で再現する手法について説明する[9][21]．ここで使用する乱数は $[0,1]$ または $[0,1)$ の一樣乱数である．ランダムウォークの手法には，実現象を忠実に模擬したアナログ法と，分散や世代間の相関を低減する手法を導入した非アナログ法の2種類がある．なお，以下で説明する手法は，あくまでモンテカルロ計算の方法の一例であり，全てのモンテカルロコードで採用されている方法ではないことを強調しておく．

### 2.3.1 アナログ法

アナログ法は実現象を忠実に模擬した手法である。多群エネルギーのアナログモンテカルロ法におけるランダムウォークの処理手順を以下に示す。

- (1) 中性子源から発生する中性子のエネルギー，飛行方向，飛行距離を決定する。
  - (2) 中性子の衝突点において吸収反応と散乱反応のどちらが起きるかを決定する。吸収反応の場合は追跡を終了する。散乱反応の場合は追跡を続行する。
  - (3) 全ての中性子の追跡が終了したら，その世代の実効増倍率や中性子束を計算する。
  - (4) この世代の核分裂発生位置から次世代の中性子源位置をサンプリングする。
- それぞれの処理について，以下で詳しく述べる。

#### (1) 中性子源から発生する中性子のエネルギー，飛行方向，飛行距離を決定する。

中性子源の位置は前世代の核分裂発生位置からサンプリングされる。しかし，1世代目の計算では前世代が存在しないので，ユーザーが入力として与える必要がある。この初期中性子源分布は，ある1点に設定されるか，もしくはある領域に一様に分布するように設定されることが多い。この時，真の分布からあまりにかけ離れた初期中性子源分布を設定すると，真の分布への収束に多くの世代を要し，捨てバッチ数を多く設定する必要があり，計算の効率が低下するため注意が必要である。

中性子源から発生する中性子のエネルギーのサンプリング手法には，Maxwell分布などの確率分布に従ってサンプリングする方法や，中性子が発生する領域の核分裂スペクトルに従ってサンプリングする方法がある[8]。例えば，エネルギー3群の核分裂スペクトル $\chi_g$ に従いサンプリングする場合には， $[0,1)$ の乱数 $\xi$ を使って以下のように中性子のエネルギーを決定する。

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi < \chi_1 & \rightarrow 1 \text{ 群} \\ \chi_1 \leq \xi < \chi_1 + \chi_2 & \rightarrow 2 \text{ 群} \\ \chi_1 + \chi_2 \leq \xi < 1 & \rightarrow 3 \text{ 群} \end{aligned}$$

中性子源から出発する中性子の飛行方向は方位角 $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ )と極角 $\theta$  ( $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ )で決定する。この2つのパラメータは，乱数 $\xi$ を使って以下のようにサンプリングする。

$$\varphi = 2\pi \times \xi \tag{2.6}$$

$$\cos \theta = 2 \times \xi - 1 \tag{2.7}$$

$\xi$ の範囲は(2.6)式では $[0,1)$ ，(2.7)式では $[0,1]$ である。ここで，極角 $\theta$ は方向余弦に対して乱数を振ることで決定している。中性子の飛行のz軸方向成分について考えると，中性子の位置座標は，最初の位置座標に飛行距離と $\cos \theta$ の積を加算することで求められる。仮に，方位角 $\varphi$ と同様に角度に対して乱数を振り極角 $\theta$ を決定した場合， $\cos \theta$ の値は1と-1に偏った分

布をとり，中性子の飛行方向に偏りが生じる．極角 $\theta$ を方向余弦に対して乱数を振ることで決定しているのはこのためである．

次に，中性子の飛行距離 $L$ をサンプリングする．中性子が全断面積 $\Sigma_t$ の媒質中を衝突することなく距離 $L$ だけ飛行する確率 $P(L)$ は下式で与えられる．

$$P(L) = \exp(-\Sigma_t L) \quad (2.8)$$

中性子が距離 $dL$ を飛行する間に衝突する確率 $\overline{P(dL)}$ は(2.9)式のようなになる．

$$\overline{P(dL)} = 1 - \exp(-\Sigma_t dL) \quad (2.9)$$

$dL$ が十分に小さい時，(2.9)式を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，2次以降の項を無視することで下式のように近似できる．

$$\overline{P(dL)} \approx \Sigma_t dL \quad (2.10)$$

したがって，中性子が $L$ だけ飛行した後， $dL$ の間に衝突する確率密度 $f(L)dL$ は以下のようなになる．

$$\begin{aligned} f(L)dL &= P(L) \cdot \overline{P(dL)} \\ &\approx \Sigma_t \exp(-\Sigma_t L) dL \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.11)式を $[0, L]$ で積分することで，中性子が距離 $L$ だけ飛行する累積分布関数 $F(L)$ は以下のように求まる．

$$F(L) = \int_0^L \Sigma_t \exp(-\Sigma_t L) dL = 1 - \exp(-\Sigma_t L) \quad (2.12)$$

(2.12)式より， $F(L)$ を乱数 $\xi$ により決定することで，中性子の飛行距離 $L$ を下式のようにサンプリングすることができる．ただし， $\xi$ の範囲は $[0,1]$ である．

$$L = -\frac{1}{\Sigma_t} \ln(1 - \xi) \quad (2.13)$$

$1 - \xi$ は $\xi$ と等価であるため， $L = 1/\Sigma_t \ln(\xi)$ としてもよいが，その場合は $\xi$ の範囲を $(0,1]$ としなければならない．

飛行距離を決定した後，中性子の位置座標に $x, y, z$ それぞれの軸方向に対する飛行距離を加算することで中性子の位置を更新する．更新後の中性子の位置が衝突点となる．

(2) 中性子の衝突点において吸収反応と散乱反応のどちらが起きるかを決定する。吸収反応の場合は追跡を終了する。散乱反応の場合は追跡を続行する。

衝突点を決定した後は、吸収、散乱のどちらの反応が起きるかを、乱数を振ることで決定する。

$$0 \leq \xi < \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} \quad \rightarrow \text{吸収反応}$$

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} \leq \xi < 1 \quad \rightarrow \text{散乱反応}$$

吸収反応が起こった場合、さらに捕獲反応か核分裂反応かを以下のように決定する。

$$0 \leq \xi < \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad \rightarrow \text{核分裂反応}$$

$$\frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \leq \xi < 1 \quad \rightarrow \text{捕獲反応}$$

核分裂が発生した場合、その衝突点からは中性子が放出される。放出される中性子の個数 $n_f$ は核分裂あたりの発生中性子数 $\nu$ 値に従い、下式で決定される。

$$n_f = \text{int}(\nu + \xi) \quad (2.14)$$

$\text{int}$  は括弧内の整数部分を取ることを表している。(2.14)式は、本来の核分裂中性子発生数分布とは異なるが、実効増倍率など中性子の平均的な挙動を再現するには発生数の平均値が保存されていればよい。例えば、 $\nu = 2.4$ の場合、 $\xi < 0.6$ ならば中性子は2個、 $\xi \geq 0.6$ ならば中性子は3個発生し、発生中性子数の期待値は2.4個となる。衝突した中性子の追跡は終了し、核分裂によって発生した中性子はこの世代では追跡せず、発生した数だけ位置座標を記憶しておく。この情報は次世代の中性子源の候補として使用される。

捕獲反応が発生した場合は、その時点で追跡を終了する。

散乱反応が起こった場合、中性子の飛行方向を変えてランダムウォークを続行する。等方散乱を仮定する場合、新たな飛行方向、飛行距離は(2.6)～(2.13)式を用いてサンプリングする。また、衝突後のエネルギーは散乱マトリックスに基づいてサンプリングする。例えば、エネルギー3群の体系で $g$ 群中性子の散乱を考える場合には、以下のように決定する。

$$0 \leq \xi < \frac{\Sigma_s(g \rightarrow 1)}{\Sigma_{g'} \Sigma_s(g \rightarrow g')} \quad \rightarrow 1 \text{ 群に散乱}$$

$$\frac{\Sigma_s(g \rightarrow 1)}{\Sigma_{g'} \Sigma_s(g \rightarrow g')} \leq \xi < \frac{\Sigma_s(g \rightarrow 1) + \Sigma_s(g \rightarrow 2)}{\Sigma_{g'} \Sigma_s(g \rightarrow g')} \quad \rightarrow 2 \text{ 群に散乱}$$

$$\frac{\Sigma_s(g \rightarrow 1) + \Sigma_s(g \rightarrow 2)}{\Sigma_{g'} \Sigma_s(g \rightarrow g')} \leq \xi < 1 \quad \rightarrow 3 \text{ 群に散乱}$$

(3) 全ての中性子の追跡が終了したら、その世代の実効増倍率や中性子束を計算する。

モンテカルロ法において実効増倍率や中性子束を評価する手法には、collision estimator や track length estimator などがある。詳しくは2.4節で述べる。

(4) この世代の核分裂発生位置から次世代の中性子源位置をサンプリングする。

(2)で記憶しておいた核分裂中性子の発生位置から、設定したヒストリー数だけ中性子源の位置をサンプリングする。アナログ法は実現象を忠実に模擬した手法であるため、核分裂を通した世代間の相関もそのまま再現してしまうという問題がある。

### 2.3.2 非アナログ法

アナログモンテカルロ法では、中性子の状態は存在するかしないかのどちらかとなる。そのため、計算結果の分散が大きくなるという問題がある。例として、中性子が厚い遮蔽壁中を透過していく深層透過問題を考える。中性子は遮蔽壁でほぼ吸収されて消滅するので、遮蔽壁を透過する中性子の数は非常に少なく、十分な統計数を稼げないため分散が大きくなる。また、前節でも述べたが、核分裂中性子源分布を通した相関が強いという問題もある。そのため、現在使われているモンテカルロコードでは、アナログ法はほとんど使われておらず、非アナログモンテカルロコードが主流である。非アナログモンテカルロ法では、中性子にウェイト（重み）の概念を導入することで分散を低減している。また、核分裂で発生する中性子のサンプリング方法を工夫することで、次世代の中性子源位置の候補をより多く確保し、世代間の相関を低減している。

#### 2.3.2.1.1 中性子のウェイト

アナログ法では、中性子は存在するかしないかの2択であった。非アナログ法では、中性子にウェイトの概念を導入することで、中性子が存在するかしないかの2択ではなく、中間的な状態を期待値として記述することができるようになる。つまり、ウェイトとは中性子の存在確率を表すパラメータである。ウェイトを導入することで、中性子はアナログ法の場合より平均値に近い振る舞いをするため、分散の低減が期待できる。ウェイトを導入した場合のランダムウォークの処理手順を以下に示す。

- (1) 中性子源から発生する中性子にウェイトを与え、エネルギー、飛行方向、飛行距離を決定する。
- (2) 中性子の衝突点において中性子のウェイトを吸収される確率分だけ減らす。
- (3) 核分裂により中性子が発生するかしないかを判定する。
- (4) 一定値以下のウェイトの中性子に対しロシアンルーレットを実施する。
- (5) 全ての中性子の追跡が終了したら、その世代の実効増倍率や中性子束を計算する。
- (6) この世代の核分裂発生位置から次世代の中性子源位置をサンプリングする。それぞれの処理について、以下で詳しく述べる。



(1) 中性子源から発生する中性子にウェイトを与え、エネルギー、飛行方向、飛行距離を決定する。

中性子のウェイト $W$ を1に設定する。エネルギー、飛行方向、飛行距離のサンプリング方法はアナログ法の場合と同様である。その後、衝突点を求める。

(2) 中性子の衝突点において中性子のウェイトを吸収される確率分だけ減らす。

アナログ法では反応の種類を決定し、その後の処理が分岐するが、非アナログ法では反応の種類は判定を行わず、下式に従ってウェイトを更新することで吸収反応を表現する。

$$W_{\text{after}} = \frac{\Sigma_t - \Sigma_a}{\Sigma_t} W_{\text{before}} \quad (2.15)$$

$W_{\text{before}}$  : 衝突前のウェイト,  $W_{\text{after}}$  : 衝突後のウェイト

(3) 核分裂により中性子が発生するかしらないかを判定する。

アナログ法では核分裂反応が起きた場合のみ中性子が発生するが、非アナログ法では中性子が衝突する度に以下のように中性子が1個発生するかしらないかを判定する。

$$0 \leq \xi < \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_t} \cdot W_{\text{before}} \quad \text{中性子が1個発生}$$

$$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_t} \cdot W_{\text{before}} \leq \xi < 1 \quad \text{中性子は発生しない}$$

$\nu\Sigma_f/\Sigma_t$ は衝突時に中性子が1個発生する確率を表す。また、ここで用いるウェイトは衝突前のものである点に注意されたい。アナログ法において、無限体系に存在する1個の中性子が核分裂により発生させる中性子数の期待値は $\nu\Sigma_f/\Sigma_a$ である。中性子の最初のウェイトを1として、 $\nu\Sigma_f/\Sigma_t \times W_{\text{before}}$ を全ての衝突について和を取ると、下式のように期待値が保存されていることが確認できる。

$$\sum_n \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_t} \cdot W_n = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_t} \sum_n \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\right)^n = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_t} \cdot \frac{\Sigma_t}{\Sigma_t - \Sigma_s} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (2.16)$$

$W_n$  :  $n$ 回目の衝突時のウェイト

上記の処理により中性子が発生した場合は、その位置情報を記憶しておく。その後、アナログ法における散乱反応の処理と同様にエネルギー、飛行方向、飛行距離をサンプリングし、ランダムウォークを続行する。

(4) 一定値以下のウェイトの中性子に対しロシアンルーレットを実施する。

これまで述べたように、ウェイトを導入した場合、中性子は衝突時にウェイトを減らした後、ランダムウォークを続ける。(2.15)式から分かるように、どれだけ衝突しても中性子のウェイトは0にはならない。そのため、中性子の追跡はいつまでも終了せず、計算が終わらなくなってしまう。また、ウェイトが小さくなった場合、その中性子は核分裂に与える寄与

も小さくなるため、そのような中性子をいつまでも追跡し続けるのは計算コストの観点から望ましくない。そこで、ロシアンルーレットと呼ばれる手法を導入する。

ロシアンルーレットでは、これを実施する基準となるウェイト $W_{\text{kill}}$ を設定し、ウェイトが $W_{\text{kill}}$ 未満となった中性子がある確率で消滅させ、生き残った中性子には $W_{\text{survive}}$ のウェイトを与える。ここで、生き残った中性子に与えるウェイトは $W_{\text{survive}} > W_{\text{kill}}$ でなければならない。ロシアンルーレットの判定は以下のように行う。

$$0 \leq \xi < \frac{W_{\text{after}}}{W_{\text{survive}}} \quad \text{成功. 中性子のウェイトを } W_{\text{survive}} \text{ に更新}$$

$$\frac{W_{\text{after}}}{W_{\text{survive}}} \leq \xi < 1 \quad \text{失敗. 中性子のウェイトを } 0 \text{ に更新}$$

上記のようにロシアンルーレットの判定をすることで、 $W_{\text{after}}/W_{\text{survive}}$ の確率でウェイトが $W_{\text{survive}}$ になり、 $1 - W_{\text{after}}/W_{\text{survive}}$ の確率でウェイトが0になるため、(2.17)式のようにウェイトの期待値は変化していないことが確認できる。

$$\left(\frac{W_{\text{after}}}{W_{\text{survive}}}\right) \cdot W_{\text{survive}} + \left(1 - \frac{W_{\text{after}}}{W_{\text{survive}}}\right) \cdot 0 = W_{\text{after}} \quad (2.17)$$

(5) 全ての中性子の追跡が終了したら、その世代の実効増倍率や中性子束を計算する  
実効増倍率や中性子束を評価する手法については2.4節で詳しく述べる。

(6) この世代の核分裂発生位置から次世代の中性子源位置をサンプリングする。

(3)で記録された中性子発生位置から、設定したヒストリー数だけ中性子源の位置をサンプリングする。非アナログ法による中性子源のサンプリングにより、世代間の相関の低減が期待できる。これについては次節で述べる。

### 2.3.2.1.2 核分裂源サンプリング

これまで、アナログ法と非アナログ法、それぞれの計算手順について述べてきた。非アナログ法の特徴として、中性子にウェイトの概念を導入する点と、衝突毎に核分裂による中性子が発生するかどうかを判定する点が挙げられる。前者は計算結果の分散を低減する手法であり、後者は世代間の相関を低減する手法である。ここでは、アナログ法、非アナログ法それぞれの核分裂中性子源のサンプリング方法の差異が世代間の相関に影響するメカニズムについて説明する。

まず、アナログ法における核分裂中性子源のサンプリングについて考える。アナログ法では、追跡中の中性子が核分裂反応を起こした場合、その位置を発生する中性子の数だけ記録する。通常、核分裂反応では複数個の中性子が発生するので、この操作では位置情報を重複して記録することになる。そのため、次世代で中性子を発生させるときに、同じ位置から2回以上中性子を発生させる場合が存在することになる。この場合、Fig. 2.2のように、現世

代の中性子源の付近で次世代の核分裂が起きる可能性が高くなる。

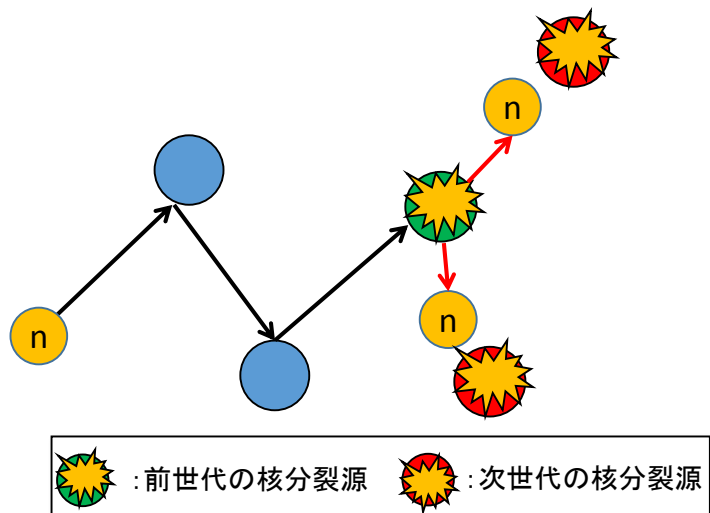


Fig. 2.2 アナログ法の核分裂源サンプリングのイメージ

これにより、前世代の核分裂中性子源と似たような位置に次世代の核分裂中性子源が集まるため、世代間の相関が強く表れる。

次に、非アナログ法における核分裂中性子源のサンプリングについて考える。非アナログ法では、全ての衝突位置のうち、核分裂を起こし得る位置（核分裂断面積を有している領域）からランダムに中性子を発生させる。前節で述べた手法では、核分裂発生時に放出される中性子は1個であるため、記録される位置情報が重複することはない。（別の中性子が偶然同じ位置で衝突して核分裂を起こす可能性はあるが、極めて稀なケースであろう。）この場合、Fig. 2.3 のようにアナログ法に比べて前世代における核分裂中性子源と現世代の核分裂中性子源の距離は大きくなる可能性が高い。

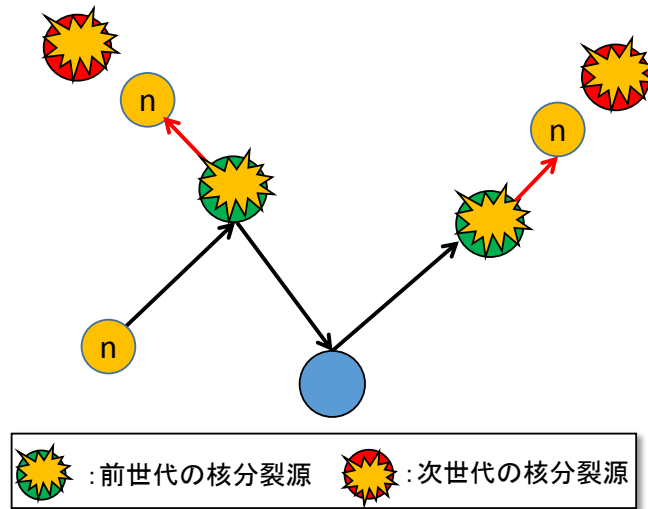


Fig. 2.3 非アナログ法の核分裂源サンプリングのイメージ

これにより，前世代の核分裂中性子源とは異なる分布に次世代の核分裂中性子源が分散するため，世代間の相関の低減が期待できる．

## 2.4 エスティメータ

これまで，モンテカルロシミュレーションにおける中性子のランダムウォークについて説明してきた．しかし，ただ中性子をランダムウォークさせているだけでは何の情報も得られない．モンテカルロ法では，ランダムウォークの過程で着目する物理現象に対する中性子の寄与を加算していくことでその物理量を評価する．この評価手法をエスティメータ (estimator) と呼ぶ．代表的なエスティメータとしては，中性子の衝突時に物理現象への寄与を加算する *collision estimator* や，中性子が飛行する度にその飛行距離に応じた寄与を加算する *track length estimator* などがある．本研究では *collision estimator* で評価された物理量に付随する統計誤差について検討を行うため，ここでは *collision estimator* について述べる [8] [9] [21] ．

*collision estimator* により，ある局所タリ- $v$  の統計量  $R_v$  を評価したい場合，(2.18) 式を用いて計算する．

$$R_v = \sum_j \frac{\Sigma_{x,j}}{\Sigma_{t,j}} \cdot \frac{1}{V_v} W_{\text{before},j} \quad (2.18)$$

$V_v$  : 領域  $v$  の体積

ここで， $j$  はその世代の全ての衝突反応についてのインデックスであり， $\Sigma_x$  は着目する物理現象の巨視的反応断面積である．例えば，全中性子束を評価したい場合には  $\Sigma_x = 1$  となり，核分裂率を評価したい場合は  $\Sigma_x = \nu \Sigma_f$  となる．ランダムウォークの過程において，着目領域  $v$  の中で中性子が衝突する度に加算を行うことで，その領域の統計量  $R_v$  を計算することができる．

collision estimator により実効増倍率を評価したい場合は、(2.19)式を用いる。

$$k = \frac{1}{N} \sum_j \frac{v \Sigma_f}{\Sigma_{t,j}} W_{\text{before},j} \quad (2.19)$$

$N$  : 着目世代のヒストリー数

上式は、実効増倍率の定義に従い、元の中性子数（ヒストリー数） $N$ と核分裂により生成された中性子数（総和の項）の比を取ることによって実効増倍率を計算している。実効増倍率は体系全体の積分量であるため、全ての衝突について(2.19)式の加算を行うことで評価することができる。

collision estimator は、衝突時に物理現象への寄与を加算する評価法であるため、断面積が小さな体系では精度のよい評価ができなくなる点や、物質が存在しないボイド領域ではそもそも衝突が起きないため適用できない点が問題点として挙げられる。このような場合でも物理量を評価する手法として、track length estimator がある。この手法では、中性子が飛行する度にその飛行距離に応じた寄与を加算するため、中性子が着目領域を通過するだけで物理量を評価することができる。collision estimator や track length estimator では、ある有限の体積を持つ領域の物理量は評価することができるが、空間内のある1点における物理量を評価する必要がある場合は適用できない。なぜなら、空間内の特定の点にちょうど中性子が到達する確率は極めて低いからである。そのような場合には point detector estimator を用いる。point detector estimator は、着目する点に対する全ての衝突の寄与を計算することで物理量を評価するため、点タリーであっても精度よく物理量を評価することができる。その他には、空間内に設定した面を中性子が通過する事象を基に物理量を評価する surface crossing estimator などがある。これらのエスティメータの詳細については文献[8]を参照されたい。

## 2.5 世代間の相関と統計誤差過小評価

モンテカルロ計算では、前世代の核分裂源を次世代の中性子源として利用するため、世代間に相関が生じる。相関が弱い場合と強い場合について、ある統計量の世代推移を、疑似乱数を用いて模擬したグラフを Fig. 2.4 に示す。

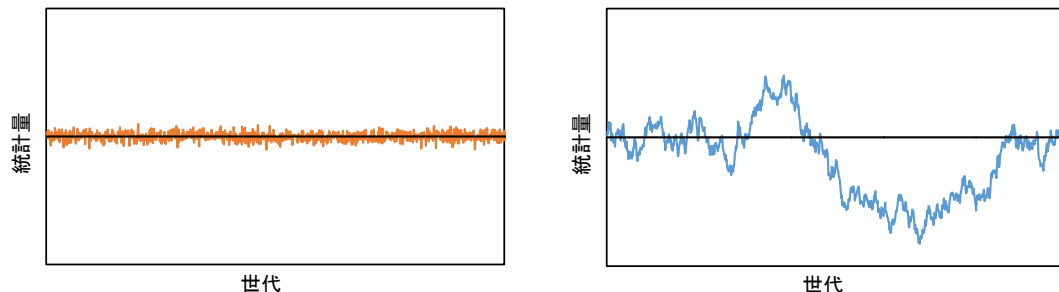


Fig. 2.4 ある統計量の世代推移（左：相関 0, 右：相関 0.99）

相関が弱い場合は、統計的な揺らぎはあるものの、統計量は平均値の付近で推移している。

しかし、相関が強い場合には、統計的な揺らぎが後続世代へと伝播・蓄積され、世代によって統計量が平均値から大きく逸脱する可能性があることが分かる。そのため、統計処理を行う世代区間によっては、収束していない統計量を用いて計算が行われる可能性がある[13]。これにより、相関の強い体系においては、出力される統計誤差が過小に評価される場合がある。以下では、世代間の相関が統計誤差過小評価につながるメカニズムについて、理論的に説明する。

モンテカルロ計算では、全ての世代 ( $l$ 世代) の計算が終了した後、各世代の計算結果  $x_i$  の平均値を計算し、それを最終的な解  $\bar{x}$  としている。なお、捨てバッチは除いてあるものとする。

$$\bar{x} = \frac{1}{l} \sum_i^l x_i \quad (2.20)$$

$i$ 世代目の計算結果  $x_i$  の統計的な誤差を  $\sigma_i$  とすると、平均値  $\bar{x}$  に付随する統計誤差  $\sigma_{\bar{x}}$  は誤差伝播則により下式のように求まる。

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{l} \sqrt{\sum_i^l \sigma_i^2 + 2 \sum_i^l \sum_j^l \text{cov}(\sigma_i, \sigma_j)} \quad (i \neq j) \quad (2.21)$$

$\text{cov}(\sigma_i, \sigma_j)$  :  $\sigma_i$  と  $\sigma_j$  の共分散

世代間に相関がある場合、(2.21)式のように共分散項を考慮しなければならない。しかし、現行のモンテカルロコードでは、無相関の中心極限定理を用いて統計誤差を評価している。これは(2.21)式の共分散項を無視していることになるため、世代間の相関が無視できないほど強い場合、出力される統計誤差は過小に評価されることになる。共分散が負の場合は、むしろ過大評価されることになるが、通常、各世代の統計量は正の自己相関を持っているため、統計誤差は過小評価される。

世代間の相関と統計誤差過小評価の関係は、自己回帰モデルからも導くことができる。(自己回帰モデルについては第3章で詳しく述べるのでここでは省略する。) 自己回帰モデルに従う時系列データの相関を考慮した標準誤差  $\sigma_{\text{true}}$  は、相関を無視した場合の標準誤差  $\sigma$  と下式の関係を持つ。

$$\sigma_{\text{true}} = \sigma \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \quad (2.22)$$

$\rho$  : 時系列データの自己相関

(2.22)式を見ると、相関が弱い (0に近い) 場合は  $\sigma_{\text{true}} \approx \sigma$  となるが、正の相関が強い (1に近い) ほど  $\sigma_{\text{true}}$  は  $\sigma$  より大きくなる。このことから、正の相関が強い場合、無相関の中心極限定理で推定した統計誤差が真の統計誤差より過小評価されることが分かる。

## 2.6 本章のまとめ

本章では、固有値問題をモンテカルロ法により解く手法と、その手法に起因する統計誤差評価上の問題について述べた。2.2 節では、固有値計算の概要と、それをモンテカルロ法で解く際に導入される“世代”の概念について説明し、核分裂中性子源を介して世代間に相関が生じることを述べた。2.3 節では、アナログ法と非アナログ法における中性子のランダムウォークについて説明し、核分裂中性子源のサンプリング方法の違いが世代間の相関に影響を及ぼすことを説明した。2.4 節では、モンテカルロ法において物理量を評価する手法であるエスティメータについて述べた。2.5 節では、世代間の相関が統計誤差過小評価を引き起こすメカニズムについて述べた。

## 第3章 統計誤差過小評価割合の予測モデル

### 3.1 本章の概要

本章では、文献[13][19][20]を参考に、モンテカルロ法で計算される統計量に対する統計誤差過小評価割合の理論式を導出する。3.2.1節でモンテカルロ計算における局所タリーの統計量の振る舞いをべき乗法の理論を用いてモデル化する。3.2.2節では、本研究で用いる自己回帰モデルについて説明する。3.2.3節では、3.2.1節で導出したモデルを自己回帰モデルにフィッティングすることで、統計量の真の統計誤差を導出する。同時に、無相関の中心極限定理に基づき過小評価された統計誤差を導出し、両者の比を取ることで統計誤差過小評価割合の理論式を得る。

### 3.2 統計誤差過小評価割合の理論式

#### 3.2.1 局所タリー統計量の展開係数の世代推移

本節では、局所タリーの統計量を固有関数展開した際の展開係数について、その世代に対する挙動を、べき乗法を用いてモデル化する。

##### 3.2.1.1.1 べき乗法の理論

べき乗法の理論について説明する。

中性子輸送方程式は消滅・生成演算子を使って次のように記述できる。

$$\mathbf{A}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{A}$  : 消滅演算子,  $\mathbf{F}$  : 生成演算子

(3.1)式を次式のように変形する。

$$\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.2)$$

べき乗法による反復計算では、 $i+1$ 反復目の角度中性子束 $\psi^{(i+1)}$ は $i$ 反復目の中性子束 $\psi^{(i)}$ を使って次式のように求めることができる。

$$\psi^{(i+1)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.3)$$

ここで、(3.3)式を満たす高次モードの固有値、固有関数について、次式が成り立つ。

$$k_n \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.4)$$

ここで、高次モード固有値 $k_n$ は $k_0 > k_1 \geq k_2 \dots$ を満たす。

反復計算の初期値 $\psi^{(0)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を、上述した固有関数を用いて以下のように展開できると仮定する。



$$\psi^{(0)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_n a_n^{(0)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.5)$$

$a_n^{(0)}$  :  $i$ 世代目の $n$ 次モード展開係数

(3.5)式を(3.3)式に代入する.

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \frac{1}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \psi^{(0)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \frac{1}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \sum_n a_n^{(0)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \sum_n a_n^{(0)} \frac{k_n}{k_0} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (\because (3.4) \text{式}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6)式を繰り返し使うことで次式の関係を得る.

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \frac{1}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \psi^{(i-1)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \left(\frac{1}{k_0}\right)^2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \psi^{(i-2)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{1}{k_0}\right)^i (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F})^i \psi^{(0)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.5)式を代入する.

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \left(\frac{1}{k_0}\right)^i (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F})^i \sum_n a_n^{(0)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \left(\frac{1}{k_0}\right)^i (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{F})^{i-1} \sum_n a_n^{(0)} k_n \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &\vdots \\ &= \sum_n a_n^{(0)} \left(\frac{k_n}{k_0}\right)^i \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \sum_n a_n^{(i)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$a_n^{(i)}$  :  $i$ 世代目の $n$ 次モード展開係数

$k_0 > k_1 \geq k_2 \dots$ より, 反復を重ねることで(3.8)式は $a_0 \psi_0$ に収束することが分かる.

モンテカルロ法にべき乗法を適用する場合には, 基本モード中性子束が真の中性子束分布に相当する. 中性子束が収束する前の真の分布との差異は, 高次モード中性子束が展開係数により励起されることで生じると考えることができる. よって, 世代を重ねて高次モード展開係数が0に収束することで, 基本モードのみが残り, 中性子束は真の分布に収束する.

### 3.2.1.1.2 モンテカルロ法へのべき乗法の適用

モンテカルロ法では、中性子束を用いて局所タリー統計量を計算する。そのため、この統計量も中性子束と同様にべき乗法の理論に従い世代を重ねることで基本モードに収束する。 $i$ 世代目の局所タリー統計量 $R^{(i)}(\vec{r})$ を以下のように定義する。

$$R^{(i)}(\vec{r}) = \mathbf{R}\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R} \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \Sigma_x(\vec{r}, E) \quad (3.10)$$

$\Sigma_x$  : 着目する物理現象の巨視的反応断面積

ここで、(3.8)式の両辺に左から演算子 $\mathbf{R}$ を作用させることで下式を得る。

$$\mathbf{R}\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_n a_n^{(i)} \mathbf{R}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.11)$$

(3.11)式は以下のように表せる。

$$R^{(i)}(\vec{r}) = \sum_n a_n^{(i)} R_n(\vec{r}) \quad (3.12)$$

$$R_n(\vec{r}) \equiv \mathbf{R}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3.13)$$

また、(3.8)式の関係を用いることで $i+1$ 世代目の統計量 $R^{(i+1)}(\vec{r})$ は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} R^{(i+1)}(\vec{r}) &= \sum_n a_n^{(i+1)} R_n(\vec{r}) \\ &= \sum_n \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} R_n(\vec{r}) \\ &\vdots \\ &= \sum_n \left(\frac{k_n}{k_0}\right)^i a_n^{(0)} R_n(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

中性子束の場合と同様に、 $k_0 > k_1 \geq k_2 \dots$ より、反復を重ねることで(3.14)式は基本モード $a_0 R_0$ に収束する。

しかし、モンテカルロ法では中性子のランダムウォークにより体系内の中性子束分布が統計的に揺らぐため、結果として統計量 $R^{(i)}$ の分布も揺らぐ。そこで、(3.14)式に示した $R^{(i+1)}$ に、統計的な揺らぎ $\Delta^{(i+1)}(\vec{r})$ を導入することで統計量分布の揺らぎを表現する。

$$R^{(i+1)}(\vec{r}) = \sum_n \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} R_n(\vec{r}) + \Delta^{(i+1)}(\vec{r}) \quad (3.15)$$

$\Delta^{(i+1)}$  :  $i$ 世代目から $i+1$ 世代目の統計量を求める際に発生した統計的な揺らぎ  
 $\Delta^{(i+1)}$ は着目する物理現象が起き得る領域でのみ発生するため、 $R_n$ の展開形で表現することができるだろう。

$$\Delta^{(i+1)}(\vec{r}) = \sum_n d_n^{(i+1)} R_n(\vec{r}) \quad (3.16)$$

$d_n^{(i+1)}$  :  $\Delta^{(i+1)}$  の  $n$  次モード展開係数

(3.16)式を(3.15)式に代入することで次式を得る.

$$\begin{aligned} R^{(i+1)}(\vec{r}) &= \sum_n \left( \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} + d_n^{(i+1)} \right) R_n(\vec{r}) \\ &= \sum_n a_n^{(i+1)} R_n(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$a_n^{(i+1)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} + d_n^{(i+1)} \quad (3.18)$$

(3.17), (3.18)式が局所タリー統計量分布の解析モデルである.

### 3.2.2 自己回帰モデル

局所タリー統計量分布の展開係数の世代推移は(3.18)式で表される. この時, 1 世代を時間単位とした時系列解析によって, 展開係数の振る舞いを予測することができる. この時系列解析手法の一つに自己回帰モデル (Autoregressive model : AR モデル) がある [22] [23] .

AR( $p$ )モデルは  $p$  次の AR モデルを表し, (3.19)式で定義される.

$$X^{(t)} = c + \sum_{i=1}^p \phi^{(i)} X^{(t-i)} + \varepsilon^{(t)} \quad (3.19)$$

$X^{(t)}$  :  $t$  番目の時系列データ,  $c$  : 定数項,  $\phi^{(i)}$  :  $i$  次のモデルパラメータ

$\varepsilon^{(t)}$  :  $t$  番目の時系列データに付随する誤差項

定数項  $c$  は単純のため省かれることが多い.

この定義から, AR(1)モデルは(3.20)式となる. なお, 定数項は  $c = 0$  とした.

$$X^{(t)} = \phi X^{(t-1)} + \varepsilon^{(t)} \quad (3.20)$$

AR モデルでは  $\phi < 1$  の時, 共分散定常性を持つ. 「共分散定常性を持つ」とは, 統計的なばらつきを持つ時系列データの平均や分散が時間変化しないこと, つまり定常状態であることを指す. また, 誤差項  $\varepsilon^{(t)}$  は分散  $\sigma_{\varepsilon_n}^2$  のホワイトノイズである. ホワイトノイズとは, (3.20)式で表される時間変化に対し, 全ての周波数で同じ強度となるノイズ (つまり非常にランダムなノイズ) であり, その平均値は 0, 他のタイムステップにおける誤差項との相関は 0 である.

ここで, 展開係数  $a_n$  の世代推移(3.18)式は AR(1)モデルに当てはめることができ, 固有値比  $k_n/k_0$  がモデルパラメータ  $\phi$  に相当する. 基本モードを除き  $k_n/k_0 < 1$  であるため, この時の AR(1)モデルは共分散定常性を持つ. また, 固有値比が 1 に近いほど前世代との相関が強くなり, 統計誤差過小評価大きく寄与する.

### 3.2.3 統計誤差過小評価割合の理論式の導出

局所タリ統計量の統計誤差過小評価割合を，以下の 5 つの段階に分けて理論的に求める．

- (1) ある $n$ 次モード展開係数について，AR モデルに基づき世代間の相関を考慮した標準偏差を求める．
- (2) ある $n$ 次モード展開係数について，モンテカルロ計算と同様の手順で標準偏差を求める．
- (3) (1), (2)で求めた展開係数の標準偏差から， $n$ 次モード展開係数の真の統計誤差と過小評価された統計誤差を求める．
- (4) (3)で求めた統計誤差を，全ての次数について誤差伝播の公式により積算し，局所タリ統計量の真の統計誤差と過小評価された統計誤差を求める．
- (5) 2つの統計誤差の比を取ることで統計誤差過小評価割合を求める．

以下で実際の導出について述べる．

- (1) ある $n$ 次モード展開係数について，AR モデルに基づき世代間の相関を考慮した標準偏差を求める．

まず，展開係数の世代推移を自己回帰モデルに従う時系列データとして扱い，展開係数の標準偏差を導出する．展開係数の分散 $\sigma_{a_n}^2$ は期待値 $E$ で表すと下式として定義される．

$$\begin{aligned}
 \sigma_{a_n}^2 &= E \left[ \left( a_n^{(i)} - E \left[ a_n^{(i)} \right] \right)^2 \right] \\
 &= E \left[ a_n^{(i)2} \right] - 2E \left[ a_n^{(i)} \right]^2 + E \left[ a_n^{(i)} \right]^2 \\
 &= E \left[ a_n^{(i)2} \right] - E \left[ a_n^{(i)} \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

上式から分かるように，展開係数の分散を求めるには展開係数の期待値と二乗の期待値が必要となる．まず，展開係数の期待値を求める．展開係数の世代推移がAR(1)モデルに従うと近似する．

$$a_n^{(i+1)} \approx \rho_n a_n^{(i)} + d_n^{(i+1)} \tag{3.22}$$

$$\rho_n \equiv \frac{k_n}{k_0} \tag{3.23}$$

$\rho_n$  :  $n$ 次モード固有値比

(3.22)式の期待値を取ることで，展開係数の期待値 $E \left[ a_n^{(i)} \right]$ は次式のように書ける．

$$E \left[ a_n^{(i+1)} \right] = \rho_n E \left[ a_n^{(i)} \right] + E \left[ d_n^{(i+1)} \right] \tag{3.24}$$

AR モデルにおいて、 $d_n^{(i+1)}$  はホワイトノイズであるため、その期待値は 0 である。

$$E \left[ d_n^{(i+1)} \right] = 0 \quad (3.25)$$

また、展開係数の期待値は世代が変わっても変化しない。

$$E \left[ a_n^{(i)} \right] = E \left[ a_n^{(i+1)} \right] \quad (3.26)$$

よって、展開係数の期待値は(3.24)式を変形することで下式のように求められる。

$$E \left[ a_n^{(i)} \right] = \frac{0}{1 - \rho_n} = 0 \quad (3.27)$$

次に、展開係数の二乗の期待値を求める。(3.22)式の両辺を二乗して期待値を取る。

$$E \left[ a_n^{(i+1)2} \right] = \rho_n^2 E \left[ a_n^{(i)2} \right] + 2\rho_n E \left[ a_n^{(i)} \right] E \left[ d_n^{(i+1)} \right] + E \left[ d_n^{(i+1)2} \right] \quad (3.28)$$

ここで、展開係数 $a_n^{(i)}$ とノイズ項 $d_n^{(i+1)}$ の間に相関は無いものと仮定していることに注意されたい。ノイズ項の二乗の期待値を求めるには、その分散を考えればよい。ノイズ項の分散 $\sigma_{dn}^2$ は、(3.21)式と同様に求めることができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{dn}^2 &= E \left[ d_n^{(i)2} \right] - E \left[ d_n^{(i)} \right]^2 \\ &= E \left[ d_n^{(i)2} \right] \quad (\because (3.25) \text{式}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.28)式に(3.25)、(3.27)、(3.29)式を代入することで、展開係数の二乗の期待値が得られる。

$$E \left[ a_n^{(i)2} \right] = \frac{\sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2} \quad (3.30)$$

(3.21)式に(3.27)、(3.30)式を代入することで展開係数の分散が下式のように求められる。

$$\sigma_{an}^2 = \frac{\sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2} \quad (3.31)$$

よって、展開係数の標準偏差は下式のようになる。

$$\sigma_{an} = \sqrt{\frac{\sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2}} \quad (3.32)$$

(2) ある $n$ 次モード展開係数について、モンテカルロ計算と同様の手順で標準偏差を求める。

モンテカルロ計算では有限の世代数から展開係数の分散を以下のように推定する。

$$\begin{aligned}
 S_{an}^2(l) &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l \left( a_n^{(j)} - \mu_n(l) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{2}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \mu_n(l) + \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l \mu_n^2(l)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$l$  : モンテカルロ計算における世代数

$S_{an}^2(l)$  : 世代数 $l$ で推定される展開係数の不偏分散

$\mu_n(l)$ は世代数 $l$ で推定される展開係数の世代平均値で、下式で定義される。

$$\mu_n(l) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \tag{3.34}$$

(3.34)式を(3.33)式に代入して整理することで次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 S_{an}^2(l) &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{2}{l(l-1)} \left( \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \right)^2 + \frac{1}{l^2(l-1)} \sum_{j=1}^l \left( \sum_{i=1}^l a_n^{(i)} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{2}{l(l-1)} \left( \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \right)^2 + \frac{1}{l(l-1)} \left( \sum_{i=1}^l a_n^{(i)} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{1}{l(l-1)} \left( \sum_{i=1}^l a_n^{(i)} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

ここで、(3.35)式の右辺第2項は以下のように変形することができる。

$$\left( \sum_{i=1}^l a_n^{(i)} \right)^2 = \left( a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots + a_n^{(l)} \right)^2 \tag{3.36}$$

$$= \sum_{i=1}^l a_n^{(i)2} + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}$$

(3.36)式を(3.35)式に代入することで展開係数の不偏分散 $S_{an}^2(l)$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
S_{an}^2(l) &= \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{1}{l(l-1)} \left( \sum_{i=1}^l a_n^{(i)2} + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} a_n^{(j)} a_n^{(j+t)} \right) \\
&= \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)2} - \frac{2}{l(l-1)} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.37)式の両辺について期待値をとる.

$$\begin{aligned}
E[S_{an}^2(l)] &= \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l E[a_n^{(j)2}] - \frac{2}{l(l-1)} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}] \\
&= \sigma_{an}^2 - \frac{2}{l(l-1)} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.38)式中の  $E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}]$  を求める. まず, AR モデルの式 ((3.22)式) の両辺に  $a_n^{(i-1)}$  をかけて期待値を取る.

$$\begin{aligned}
E[a_n^{(i)} a_n^{(i-1)}] &= \rho_n E[a_n^{(i-1)2}] + E[a_n^{(i-1)}] E[d_n^{(i)}] \\
&= \rho_n \sigma_{an}^2 \quad (\because (3.25) \text{式})
\end{aligned} \tag{3.39}$$

同様に, (3.22)式の両辺に  $a_n^{(i-2)}$  をかけて期待値を取る.

$$\begin{aligned}
E[a_n^{(i)} a_n^{(i-2)}] &= \rho_n E[a_n^{(i-1)} a_n^{(i-2)}] + E[a_n^{(i-2)}] E[d_n^{(i)}] \\
&= \rho_n E[a_n^{(i-1)} a_n^{(i-2)}] \quad (\because (3.25) \text{式})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.39)式より, (3.40)式は下式のように書ける.

$$E[a_n^{(i)} a_n^{(i-2)}] = \rho_n^2 \sigma_{an}^2 \tag{3.41}$$

これを繰り返すことで次の関係が得られる.

$$E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}] = \rho_n^t \sigma_{an}^2 \tag{3.42}$$

(3.42)式を(3.38)式に代入する.

$$E[S_{an}^2(l)] = \sigma_{an}^2 - \frac{2}{l(l-1)} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} \rho_n^t \sigma_{an}^2 \tag{3.43}$$

$\sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} \rho_n^t \sigma_{an}^2$  は展開して整理することで以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} \rho_n^t \sigma_{an}^2 &= \sum_{j=1}^{l-1} (\rho_n^1 \sigma_{an}^2 + \rho_n^2 \sigma_{an}^2 + \cdots + \rho_n^{l-j} \sigma_{an}^2) \\
&= (\rho_n^1 \sigma_{an}^2 + \rho_n^2 \sigma_{an}^2 + \cdots + \rho_n^{l-2} \sigma_{an}^2 + \rho_n^{l-1} \sigma_{an}^2) \\
&\quad + (\rho_n^1 \sigma_{an}^2 + \rho_n^2 \sigma_{an}^2 + \cdots + \rho_n^{l-2} \sigma_{an}^2) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\rho_n^1 \sigma_{an}^2) \\
&= (l-1)\rho_n^1 \sigma_{an}^2 + (l-2)\rho_n^2 \sigma_{an}^2 + \cdots + \rho_n^{l-1} \sigma_{an}^2 \\
&= \sum_{t=1}^{l-1} (l-t)\rho_n^t \sigma_{an}^2 \\
&= \sum_{t=1}^{l-1} (l-t)\rho_n^t \sigma_{an}^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

(3.44)式の右边を計算する。まず、 $S_n = \sum_{t=1}^{l-1} (l-t)\rho_n^t$ として、 $S_n$ と $\rho_n S_n$ の差を取る。

$$\begin{aligned}
S_n &= (l-1)\rho_n^1 + (l-2)\rho_n^2 + \cdots + \rho_n^{l-1} \\
-) \rho_n S_n &= \frac{(l-1)\rho_n^2 + \cdots + 2\rho_n^{l-1} + \rho_n^l}{(1-\rho_n)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$(1-\rho_n)S_n = l\rho_n - (\rho_n + \rho_n^2 + \cdots + \rho_n^l)$$

$\rho_n + \rho_n^2 + \cdots + \rho_n^l$ は等比数列の和の公式より、下式のようになる。

$$\rho_n + \rho_n^2 + \cdots + \rho_n^l = \frac{1 - \rho_n^{l+1}}{1 - \rho_n} - 1 = \frac{\rho_n - \rho_n^{l+1}}{1 - \rho_n} \tag{3.46}$$

(3.46)式を(3.45)式に代入して整理することで $S_n$ が下式のように計算できる。

$$S_n = \frac{l\rho_n - \frac{\rho_n - \rho_n^{l+1}}{1 - \rho_n}}{1 - \rho_n} = \frac{\rho_n \{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{(1 - \rho_n)^2} \tag{3.47}$$

(3.47)式を(3.44)式に代入することで下式を得る。

$$\sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} \rho_n^t \sigma_{an}^2 = \sigma_{an}^2 \frac{\rho_n \{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{(1 - \rho_n)^2} \tag{3.48}$$

(3.48)式を(3.38)式に代入することで展開係数の不偏分散の期待値は以下のようになる。

$$E[S_{an}^2(l)] = \sigma_{an}^2 \left[ 1 - \frac{2\rho_n \{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{l(l-1)(1 - \rho_n)^2} \right] \tag{3.49}$$

よって、標本標準偏差の期待値は次式のようになる。

$$E[S_{an}(l)] = \sigma_{an} \sqrt{1 - \frac{2\rho_n \{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{l(l-1)(1 - \rho_n)^2}} \tag{3.50}$$

(3.50)式は、世代数 $l$ を十分大きくとることで実際の標準偏差と一致する。



$$\lim_{l \rightarrow \infty} E[S_{an}(l)] = \sigma_{an} \quad (3.51)$$

(3) (1), (2)で求めた展開係数の標準偏差から,  $n$ 次モード展開係数の真の統計誤差と過小評価された統計誤差を求める.

ここまでは展開係数の標準偏差について導出を行った. 次は, 展開係数の平均値の標準偏差(統計誤差)を導出する.

まず, 展開係数の真の統計誤差を導出する. 展開係数の平均値の分散は期待値 $E$ で下式のように表せる.

$$\sigma_{\mu n}^2 = E[\mu_n^2(l)] - E[\mu_n(l)]^2 \quad (3.52)$$

(3.34)式を代入する.

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu n}^2 &= E \left[ \left( \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \right)^2 \right] - E \left[ \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l a_n^{(j)} \right]^2 \\ &= \frac{1}{l^2} \left( \sum_{j=1}^l E[a_n^{(j)^2}] + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}] \right) - \frac{1}{l^2} \sum_{j=1}^l E[a_n^{(j)}]^2 \quad (\because (3.36) \text{式}) \quad (3.53) \\ &= \frac{1}{l^2} \left( \sum_{j=1}^l E[a_n^{(j)^2}] + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{t=1}^{l-j} E[a_n^{(j)} a_n^{(j+t)}] \right) \quad (\because (3.27) \text{式}) \end{aligned}$$

(3.42), (3.42)式を用いると, (3.53)式は次式のようになる.

$$\sigma_{\mu n}^2 = \frac{1}{l} \sigma_{an}^2 + \frac{2}{l^2} \sum_{t=1}^{l-1} (l-t) \rho_n^t \sigma_{an}^2 \quad (3.54)$$

(3.48)式を代入して整理すると, 展開係数の平均値の分散を得ることができる.

$$\sigma_{\mu n}^2 = \frac{\sigma_{an}^2}{l} \left[ 1 + \frac{2\rho_n \{\rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1\}}{l(1-\rho_n)^2} \right] \quad (3.55)$$

よって展開係数の真の統計誤差は(3.56)式のようになる.

$$\sigma_{\mu n} = \frac{\sigma_{an}}{\sqrt{l}} \sqrt{1 + \frac{2\rho_n \{\rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1\}}{l(1-\rho_n)^2}} \quad (3.56)$$

一方で, モンテカルロ法では各世代が独立だと仮定し, 中心極限定理によって平均値の分散を下式のように求めている.

$$S_{\mu n}^2(l) = \frac{S_{an}^2(l)}{l} \quad (3.57)$$

$S_{\mu n}^2(l)$  : 世代数 $l$ で推定される展開係数の平均値の分散  
よって、展開係数の平均値の標準偏差は下式のようになる。

$$S_{\mu n}(l) = \frac{S_{an}(l)}{\sqrt{l}} \quad (3.58)$$

(3.58)式の期待値を取り、さらに(3.50)式を代入する。

$$E[S_{\mu n}(l)] = \frac{\sigma_{an}}{\sqrt{l}} \sqrt{1 - \frac{2\rho_n\{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{l(l-1)(1 - \rho_n)^2}} \quad (3.59)$$

(3.59)式は、相関が無い場合 ( $\rho_n = 0$ の場合)、展開係数の真の統計誤差 ((3.56)式) と一致することが確認できる。

最後に、(3.56)式と(3.59)式の比を取ることで、ある $n$ 次モード展開係数の統計誤差過小評価割合が求められる。

$$\frac{E[S_{\mu n}(l)]}{\sigma_{\mu n}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\rho_n\{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{l(l-1)(1 - \rho_n)^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\rho_n\{\rho_n^l + l(1 - \rho_n) - 1\}}{l(1 - \rho_n)^2}}} \quad (3.60)$$

(4) (3)で求めた統計誤差を、全ての次数について誤差伝播の公式により積算し、局所タリー統計量の真の統計誤差と過小評価された統計誤差を求める。

まず、局所タリー統計量の真の統計誤差を求める。局所タリー統計量の分布は(3.17)式のように高次モード固有関数の和で表される。そのため、各モードの展開係数の統計誤差は統計量の分布に伝播する。

ある領域 $v$ に着目した時、その領域の統計量は次式のように書ける。

$$R^{(i)}(\vec{r}) = \sum_n a_n^{(i)} \int_v R_n(\vec{r}) dV \quad (3.61)$$

展開係数の統計誤差は(3.56)式のように導出できた。 $\int_v R_n(\vec{r}) dV$ は誤差を持たない定数項であるため、ある $n$ 次モードの統計誤差は $\sigma_{\mu n} \int_v R_n(\vec{r}) dV$ となる。この統計誤差を全ての次数について誤差伝播の公式により積算すると、領域 $v$ の統計量の統計誤差は下式のようになる。ただし $m \neq n$ である。

$$\sigma_{\overline{R}_v} = \sqrt{\sum_n \left( \sigma_{\mu n} \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2 + 2 \sum_m \sum_n \text{cov} \left( \sigma_{\mu m} \int_v R_m(\vec{r}) dV, \sigma_{\mu n} \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)} \quad (3.62)$$

$\sigma_{\overline{R}_v}$  : 領域 $v$ の統計量の統計誤差

異なる高次モード間に相関は無いものと仮定すると、(3.62)式の共分散項は 0 となるため、 $\sigma_{\overline{R}_v}$ は下式のようになる。

$$\sigma_{\overline{R}_v} = \sqrt{\sum_n \left( \sigma_{\mu n} \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2} = \sqrt{\sum_n \left( \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2 \sigma_{\mu n}^2} \quad (3.63)$$

次に、モンテカルロ法で出力される過小評価された統計誤差は(3.59)式のように導出できた。 $\int_v R_n(\vec{r}) dV$ は誤差を持たない定数項であるため、ある $n$ 次モードの統計誤差は $E[S_{\mu n}(l)] \int_v R_n(\vec{r}) dV$ となる。先程と同様に、異なる高次モード間に相関はないと仮定し、この統計誤差を全ての次数について誤差伝播の公式により積算すると、領域 $v$ の統計量の統計誤差は下式のようなになる

$$E[S_{\overline{R}_v}(l)] = \sqrt{\sum_n \left( \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2 E[S_{\mu n}^2(l)]} \quad (3.64)$$

$S_{\overline{R}_v}(l)$  : 世代数 $l$ で推定される領域 $v$ の統計量の統計誤差

(5) 2つの統計誤差の比を取ることで統計誤差過小評価割合を求める。

(3.63)式と(3.64)式の比を取ることで領域 $v$ の統計量の統計誤差過小評価割合を求めることができる。

$$\frac{E[S_{\overline{R}_v}(l)]}{\sigma_{\overline{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \left( \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2 E[S_{\mu n}^2(l)]}{\sum_n \left( \int_v R_n(\vec{r}) dV \right)^2 \sigma_{\mu n}^2}} \quad (3.65)$$

(3.65)式に(3.56), (3.59)式を代入する。

$$\frac{E[S_{\overline{R}_v}(l)]}{\sigma_{\overline{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n w_{n,v}^2 \sigma_{an}^2 \left[ 1 - \frac{2\rho_n \{ \rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1 \}}{l(l-1)(1-\rho_n)^2} \right]}{\sum_n w_{n,v}^2 \sigma_{an}^2 \left[ 1 + \frac{2\rho_n \{ \rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1 \}}{l(1-\rho_n)^2} \right]}} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} w_{n,v} &\equiv \int_v R_n(\vec{r}) dV \\ &= \int_v \mathbf{R}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV \quad (\because (3.9) \text{式}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$w_{n,v}$  : 領域 $v$ の領域積分値

(3.66)式に(3.31)式を代入する。

$$\frac{E[S_{\overline{R}_v}(l)]}{\sigma_{\overline{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n w_{n,v}^2 \frac{\sigma_{dn}^2}{1-\rho_n^2} \left[ 1 - \frac{2\rho_n \{ \rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1 \}}{l(l-1)(1-\rho_n)^2} \right]}{\sum_n w_{n,v}^2 \frac{\sigma_{dn}^2}{1-\rho_n^2} \left[ 1 + \frac{2\rho_n \{ \rho_n^l + l(1-\rho_n) - 1 \}}{l(1-\rho_n)^2} \right]}} \quad (3.68)$$

世代数 $l$ を十分に大きくとることで(3.68)式は下式に収束する。

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E[S_{\bar{R}_v}(l)]}{\sigma_{\bar{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2}}{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2} \left( \frac{1 + \rho_n}{1 - \rho_n} \right)}} \quad (3.69)$$

本研究では、(3.69)式を局所タリー統計量の統計誤差過小評価割合の理論式として使用する。領域積分値 $w_{n,v}$ は、(3.67)式で定義されているように、着目する統計量に対応した反応率を適用しなければならいので注意が必要である。例えば、全中性子束の統計誤差過小評価割合を予測したい場合には、演算子 $\mathbf{R}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{R} \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \quad (3.70)$$

また、核分裂率の統計誤差過小評価割合を予測したい場合には、演算子 $\mathbf{R}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{R} \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \nu \Sigma_f \quad (3.71)$$

(3.69)式より、統計誤差過小評価割合の予測には、固有値・固有関数の他にも、ノイズ項の分散 $\sigma_{dn}^2$ を計算する必要がある。これらのパラメータの計算手法については4章で述べる。

### 3.3 本章のまとめ

本章では、モンテカルロ法で計算される統計量に対する統計誤差過小評価割合の理論式を導出した。3.2.1節では、モンテカルロ計算における局所タリーの統計量の振る舞いをべき乗法の理論を用いて展開係数の漸化式の形でモデル化した。3.2.2節では、自己回帰モデルについて説明し、3.2.3節では、3.2.1節で導出したモデルを自己回帰モデルにフィッティングすることで、統計誤差過小評価割合の理論式を導出した。こうして導出した理論式で統計誤差過小評価割合を計算する場合、着目する統計量の領域積分値が必要となる。この領域積分値の計算には、着目する統計量に対応した反応率を適用しなければならいので注意が必要である。

## 第4章 統計誤差過小評価割合の予測に必要となる

### パラメータの計算手法

#### 4.1 本章の概要

本章では，統計誤差過小評価割合の予測値の計算に必要な各パラメータの計算手法について述べる．第3章で導出した統計誤差過小評価割合の理論式には，固有値比，領域積分値，ノイズ項の分散の3つのパラメータが存在する．4.2節では，固有値比，領域積分値の計算に必要な固有値・固有関数を求める手法について説明する．4.3節では，ノイズ項を理論的に導出することで，ノイズ項の分散を評価する手法について説明する．4.4節では，4.3節で提案したノイズ項の分散の評価手法で使用する仮定について検証を行う．

#### 4.2 固有値・固有関数

3章で導出した統計誤差過小評価割合の理論式を以下に示す．

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E[S_{\bar{R}_v}(l)]}{\sigma_{\bar{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2}}{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2} \left( \frac{1 + \rho_n}{1 - \rho_n} \right)}} \quad (4.1)$$

$$\rho_n \equiv \frac{k_n}{k_0} \quad (4.2)$$

$$w_{n,v} \equiv \int_v \mathbf{R} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV \quad (4.3)$$

$$\mathbf{R} \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \Sigma_x(\vec{r}, E) \quad (4.4)$$

$\Sigma_x$ ：着目する物理現象の巨視的反応断面積

理論式中の固有値比 $\rho_n$ と領域積分値 $w_{n,v}$ は，(4.2)，(3.67)式に示した定義のように，高次モード固有値・固有関数を使って計算することができる．1次元平板などの簡単な体系においては，固有値・固有関数は解析的に求めることができる．それに対し，解析解が求められないような複雑な体系の固有値固有関数は，数値的に求める必要がある．4.2.1節では，エネルギー2群・1次元無限平板体系を対象として，拡散理論に基づいた場合と輸送理論に基づいた場合の2通りについて固有値・固有関数の解析解を導出する．なお，後述するノイズ項の分散の予測には，通常固有関数（forward）だけでなく随伴固有関数（adjoint）も必要となる．そのため，随伴拡散方程式，随伴輸送方程式についても解析解を導出する．4.2.2節では，解析解が求められないような複雑な体系の固有値・固有関数を求めるために使用した高次モード計算コードについて述べる．

### 4.2.1 解析的に求める場合

本節では、拡散方程式、輸送方程式を解析的に解くことで高次モード固有値・固有関数を求める。計算体系はエネルギー2群・1次元無限平板体系を対象とし、計算条件は以下に示すとおりである。

- 平板厚さ  $H$
- 上方散乱なし
- 等方散乱を仮定
- 両面完全反射境界条件

#### 4.2.1.1.1 拡散理論

上述した計算条件における2群 forward/adjoint 拡散方程式を以下に示す。

$$\begin{cases} -D_1 \nabla^2 \phi_{n,1}(x) + \Sigma_{r,1} \phi_{n,1}(x) = \frac{\chi_1}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,1}(x) + \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}(x)) \\ -D_2 \nabla^2 \phi_{n,2}(x) + \Sigma_{a,2} \phi_{n,2}(x) = \frac{\chi_2}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,1}(x) + \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}(x)) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_{n,1}(x) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} -D_1 \nabla^2 \phi_{n,1}^\dagger(x) + \Sigma_{r,1} \phi_{n,1}^\dagger(x) = \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{k_n} (\chi_1 \phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2 \phi_{n,2}^\dagger(x)) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_{n,2}^\dagger(x) \\ -D_2 \nabla^2 \phi_{n,2}^\dagger(x) + \Sigma_{a,2} \phi_{n,2}^\dagger(x) = \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{k_n} (\chi_1 \phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2 \phi_{n,2}^\dagger(x)) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\Sigma_{r,g} \equiv \Sigma_{t,g} - \Sigma_{s,g \rightarrow g} \quad (4.7)$$

forward/adjoint 固有関数がそれぞれ次式の関数形で表されるとする。

$$\begin{cases} \phi_{n,1} = f_1 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2} = f_2 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \phi_{n,1}^\dagger = f_1^\dagger \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2}^\dagger = f_2^\dagger \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.9)$$

$f_g$  : forward 固有関数の規格化定数,  $f_g^\dagger$  : adjoint 固有関数の規格化定数  
 $B_n$  は  $n$  次モードバックリングであり、1次元平板体系では下式のようなになる。

$$B_n = \frac{n\pi}{H} \quad (4.10)$$

(4.8), (4.9)式を(4.5), (4.6)式に代入することで下式が得られる。

$$\begin{cases} D_1 B_n^2 f_1 + \Sigma_{r,1} f_1 = \frac{\chi_1}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} f_1 + \nu \Sigma_{f,2} f_2) \\ D_2 B_n^2 f_2 + \Sigma_{a,2} f_2 = \frac{\chi_2}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} f_1 + \nu \Sigma_{f,2} f_2) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} f_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} D_1 B_n^2 f_1^\dagger + \Sigma_{r,1} f_1^\dagger = \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{k_n} (\chi_1 f_1^\dagger + \chi_2 f_2^\dagger) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} f_2^\dagger \\ D_2 B_n^2 f_2^\dagger + \Sigma_{a,2} f_2^\dagger = \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{k_n} (\chi_1 f_1^\dagger + \chi_2 f_2^\dagger) \end{cases} \quad (4.12)$$

(4.11)式より,  $f_1$  と  $f_2$  の関係が以下のように求められる.

$$f_2 = \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} f_1 \quad (4.13)$$

同様に, (4.12)式より,  $f_1^\dagger$  と  $f_2^\dagger$  の関係が以下のように求められる.

$$f_2^\dagger = \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} f_1^\dagger \quad (4.14)$$

(4.13), (4.14)式は, それぞれ forward/adjoint 全中性子束の 1 群と 2 群の比に相当する.

また, (4.13)式を(4.11)式の 1 群方程式に代入して整理することで固有値が以下のように求められる.

$$k_n = \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,1}}{D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}} + \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f,2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} + \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{(D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2})} \quad (4.15)$$

#### 4.2.1.1.2 輸送理論

拡散理論では, 中性子の飛行方向を 1 次のルジャンドル関数で近似することで考慮している. 一方, 輸送理論では中性子の飛行方向についても近似を導入することなく考慮する必要がある.

先述した計算条件における 2 群 forward/adjoint 輸送方程式を以下に示す.

$$\begin{cases} \mu \frac{d\psi_{n,1}(x, \mu, \varphi)}{dx} + \Sigma_{t,1} \psi_{n,1}(x, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\chi_1}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,1}(x) + \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}(x)) \right. \\ \quad \left. + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \phi_{n,1}(x) \right\} \\ \mu \frac{d\psi_{n,2}(x, \mu, \varphi)}{dx} + \Sigma_{t,2} \psi_{n,2}(x, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\chi_2}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,1}(x) + \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}(x)) \right. \\ \quad \left. + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_{n,1}(x) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \phi_{n,2}(x) \right\} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} -\mu \frac{d\psi_{n,1}^\dagger(x, \mu, \varphi)}{dx} + \Sigma_{t,1} \psi_{n,1}^\dagger(x, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2 \nu \Sigma_{f,1} \phi_{n,2}^\dagger(x)) \right. \\ \quad \left. + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \phi_{n,1}^\dagger(x) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_{n,2}^\dagger(x) \right\} \\ -\mu \frac{d\psi_{n,2}^\dagger(x, \mu, \varphi)}{dx} + \Sigma_{t,2} \psi_{n,2}^\dagger(x, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}^\dagger(x)) \right. \\ \quad \left. + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \phi_{n,2}^\dagger(x) \right\} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \phi_{n,g}(x) = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \psi_{n,g}(x, \mu, \varphi) \\ \phi_{n,g}^\dagger(x) = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \psi_{n,g}^\dagger(x, \mu, \varphi) \end{cases} \quad (4.18)$$

$\mu$  : 中性子の飛行方向の $x$ 軸方向に対する極角の方向余弦

$\varphi$  : 中性子の飛行方向の $x$ 軸方向に対する方位角

上式の右辺に $1/4\pi$ を乗じているのは、等方散乱・等方中性子源を仮定しているためである。1次元平板体系では、 $x$ 軸周りの方位角 $\varphi$ の対称性があるため、(4.16)、(4.17)式の両辺を $[0, 2\pi]$ で積分することで、forward/adjoint 輸送方程式は以下ようになる。

$$\begin{cases} \mu \frac{d\psi_{n,1}(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,1}\psi_{n,1}(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\chi_1}{k_n} (\nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}(x) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}(x)) \\ & + \Sigma_{s,1\rightarrow 1}\phi_{n,1}(x) \end{aligned} \right\} \\ \mu \frac{d\psi_{n,2}(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,2}\psi_{n,2}(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\chi_2}{k_n} (\nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}(x) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}(x)) \\ & + \Sigma_{s,1\rightarrow 2}\phi_{n,1}(x) + \Sigma_{s,2\rightarrow 2}\phi_{n,2}(x) \end{aligned} \right\} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} -\mu \frac{d\psi_{n,1}^\dagger(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,1}\psi_{n,1}^\dagger(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k_n} (\chi_1\nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2\nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,2}^\dagger(x)) \\ & + \Sigma_{s,1\rightarrow 1}\phi_{n,1}^\dagger(x) + \Sigma_{s,1\rightarrow 2}\phi_{n,2}^\dagger(x) \end{aligned} \right\} \\ -\mu \frac{d\psi_{n,2}^\dagger(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,2}\psi_{n,2}^\dagger(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k_n} (\chi_1\nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,1}^\dagger(x) + \chi_2\nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}^\dagger(x)) \\ & + \Sigma_{s,2\rightarrow 2}\phi_{n,2}^\dagger(x) \end{aligned} \right\} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \phi_{n,g}(x) = \int_{-1}^1 \psi_{n,g}(x, \mu) d\mu \\ \phi_{n,g}^\dagger(x) = \int_{-1}^1 \psi_{n,g}^\dagger(x, \mu) d\mu \end{cases} \quad (4.21)$$

以下では、(4.19)、(4.20)式について解く。

まず、forward 輸送方程式を解く。even parity 中性子束 $\psi_{n,g}^+$ および odd parity 中性子束 $\psi_{n,g}^-$ を以下のように定義する。

$$\psi_{n,g} = \psi_{n,g}^+(x, \mu) \equiv \frac{\psi_{n,g}(x, \mu) + \psi_{n,g}(x, -\mu)}{2} \quad (4.22)$$

$$\psi_{n,g}^- = \psi_{n,g}^-(x, \mu) \equiv \frac{\psi_{n,g}(x, \mu) - \psi_{n,g}(x, -\mu)}{2} \quad (4.23)$$

(4.19)式の1群輸送方程式について、 $\mu \rightarrow -\mu$ と置き換えた式を考え、元の式との和と差をそれぞれ取ることによって下式が得られる。

$$\mu \frac{d\psi_{n,1}^-(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,1}\psi_{n,1}^-(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\chi_1}{k_n} (\nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}(x) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}(x)) + \Sigma_{s,1\rightarrow 1}\phi_{n,1}(x) \right\} \quad (4.24)$$

$$\mu \frac{d\psi_{n,1}^+(x, \mu)}{dx} + \Sigma_{t,1}\psi_{n,1}^+(x, \mu) = 0 \quad (4.25)$$



$\Sigma_{t,1} \neq 0$ であれば, (4.25)式より $\psi_{n,1}^-$ が以下のように書ける.

$$\psi_{n,1}^-(x, \mu) = -\frac{\mu}{\Sigma_{t,1}} \frac{d\psi_{n,1}^+(x, \mu)}{dx} \quad (4.26)$$

(4.26)式を(4.24)式に代入すると,  $\psi_{n,1}^+$ についての2階微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} -\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,1}} \frac{d^2\psi_{n,1}^+(x, \mu)}{dx^2} + \Sigma_{t,1}\psi_{n,1}^+(x, \mu) \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\chi_1}{k_n} \left( \nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}(x) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}(x) \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}\phi_{n,1}(x) \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

(4.19)式の2群輸送方程式についても同様に,  $\psi_{n,2}^+$ についての2階微分方程式が得られる.

$$-\frac{\mu^2}{\Sigma_{t,2}} \frac{d^2\psi_{n,2}^+(x, \mu)}{dx^2} + \Sigma_{t,2}\psi_{n,2}^+(x, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\chi_2}{k_n} \left( \nu\Sigma_{f,1}\phi_{n,1}(x) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_{n,2}(x) \right) \right. \\ \left. + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}\phi_{n,1}(x) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}\phi_{n,2}(x) \right\} \quad (4.28)$$

均質平板体系かつ完全反射境界条件であるため, 中性子の飛行方向は位置に依存しないと考えられる. よって $\psi_{n,g}^+$ が次式のように空間と飛行方向について変数分離できると仮定する.

$$\psi_{n,g}^+(x, \mu) = F_g(\mu) \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \quad (4.29)$$

$F_g(\mu)$ :  $g$ 群の forward 角度中性子束の角度を表す関数

(4.29)式を(4.27), (4.28)式に代入して $F_g(\mu)$ について整理する.

$$F_1(\mu) = \frac{\Sigma_{t,1} \frac{\chi_1}{k_n} (\nu\Sigma_{f,1}f_1 + \nu\Sigma_{f,2}f_2) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}f_1}{2(\Sigma_{t,1}^2 + B_n^2\mu^2)} \quad (4.30)$$

$$F_2(\mu) = \frac{\Sigma_{t,2} \frac{\chi_2}{k_n} (\nu\Sigma_{f,1}f_1 + \nu\Sigma_{f,2}f_2) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}f_1 + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}f_2}{2(\Sigma_{t,2}^2 + B_n^2\mu^2)} \quad (4.31)$$

$$f_g \equiv \int_{-1}^1 F_g(\mu) d\mu \quad (4.32)$$

また, (4.29)式を(4.18)式に代入することで下式を得る.

$$\phi_{n,g}(x) = f_g \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \quad (4.33)$$

(4.33)式より,  $f_g$ が $g$ 群の forward 全中性子束の規格化定数になっていることが分かる. ここで, 以下の積分公式を利用する.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{a^2 + b^2\mu^2} d\mu = \frac{2 \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{ab} \quad (4.34)$$

(4.34)式を利用して, (4.30), (4.31)式の両辺を $\mu$ について $-1 \leq \mu \leq 1$ の範囲で積分する.

$$f_1 = \left\{ \frac{\chi_1}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} f_1 + \nu \Sigma_{f,2} f_2) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} f_1 \right\} \frac{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)}{B_n} \quad (4.35)$$

$$f_2 = \left\{ \frac{\chi_2}{k_n} (\nu \Sigma_{f,1} f_1 + \nu \Sigma_{f,2} f_2) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} f_1 + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} f_2 \right\} \frac{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)}{B_n} \quad (4.36)$$

(4.35)より,  $f_2$ と $f_1$ の間の関係式が以下のように求められる.

$$f_2 = \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} f_1 \quad (4.37)$$

(4.37)式は, forward 全中性子束の1群と2群の比に相当する.

adjoint 輸送方程式についても, forward の場合と同様の手順で解くことができる. adjoint においては,  $\psi_{n,g}^{\dagger}$ が次式のように空間と飛行方向について変数分離できるとする.

$$\psi_{n,g}^{\dagger} = F_g^{\dagger}(\mu) \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \quad (4.38)$$

$F_g^{\dagger}(\mu)$ :  $g$ 群の adjoint 角度中性子束の角度を表す関数

$F_g^{\dagger}(\mu)$ は以下ようになる.

$$F_1^{\dagger}(\mu) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,1} f_1^{\dagger} + \chi_2 \nu \Sigma_{f,1} f_2^{\dagger}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} f_1^{\dagger} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} f_2^{\dagger}}{\Sigma_{t,1}^2 + B_n^2 \mu^2} \quad (4.39)$$

$$F_2^{\dagger}(\mu) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} f_1^{\dagger} + \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} f_2^{\dagger}) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} f_2^{\dagger}}{\Sigma_{t,2}^2 + B_n^2 \mu^2} \quad (4.40)$$

$$f_g^{\dagger} \equiv \int_{-1}^1 F_g^{\dagger}(\mu) d\mu \quad (4.41)$$

(4.34)式を利用して, (4.39), (4.40)式の両辺を $\mu$ について $-1 \leq \mu \leq 1$ の範囲で積分する.

$$f_1^{\dagger} = \left\{ \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,1} f_1^{\dagger} + \chi_2 \nu \Sigma_{f,1} f_2^{\dagger}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} f_1^{\dagger} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} f_2^{\dagger} \right\} \frac{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)}{B_n} \quad (4.42)$$

$$f_2^{\dagger} = \left\{ \frac{1}{k_n} (\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} f_1^{\dagger} + \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} f_2^{\dagger}) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} f_2^{\dagger} \right\} \frac{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)}{B_n} \quad (4.43)$$

(4.43)式より,  $f_2^{\dagger}$ と $f_1^{\dagger}$ の間の関係式が以下のように求められる.

$$f_2^\dagger = \frac{\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2} + \frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1\rightarrow 2}} f_1^\dagger \quad (4.44)$$

(4.44)式は adjoint 全中性子束の 1 群と 2 群の比に相当する.

また, (4.37)式を(4.35)式に代入して整理することで, 高次モード固有値が求められる.

$$k_n = \frac{\chi_1 \nu\Sigma_{f,1}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1}} + \frac{\chi_2 \nu\Sigma_{f,2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2}} + \frac{\chi_1 \nu\Sigma_{f,2} \Sigma_{s,1\rightarrow 2}}{\left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1} \right) \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2} \right)} \quad (4.45)$$

拡散理論の結果(4.13), (4.14), (4.15)式と, 輸送理論の結果(4.37), (4.44), (4.45)式を比較すると,  $B_n/\arctan(B_n/\Sigma_{t,g})$ が $D_g B_n^2 + \Sigma_{t,g}$ に対応していることが分かる. また, 本節で導出した解析解を使いエネルギー1群の計算を行う場合は,  $\chi_1 = 1.0$ ,  $\chi_2 = 0.0$ かつ2群断面積が全て0とすればよい.

#### 4.2.2 数値的に求める場合

解析解が得られないような複雑な体系では, 高次モード固有値・固有関数を数値的に計算する必要がある. 本研究では, 名古屋大学で開発された高次モード計算コード Diffusion XY を使用し, 高次モード固有値・固有関数を計算した[24]. この Diffusion XY コードは, 2次元 $x, y$ 体系について, エネルギーと空間の離散化を行い, 拡散理論に基づき高次モード固有値・固有関数を計算する. この時の forward/adjoint 拡散方程式を以下に示す.

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{\phi}_n = \frac{1}{k_n} \mathbf{F}\vec{\phi}_n \\ \mathbf{A}^\dagger \vec{\phi}_n^\dagger = \frac{1}{k_n} \mathbf{F}^\dagger \vec{\phi}_n^\dagger \end{cases} \quad (4.46)$$

$\mathbf{A}$ : 中性子の吸収・漏洩を表す行列,  $\mathbf{F}$ : 核分裂による中性子の発生を表す行列

$\vec{\phi}_n$ : 全エネルギー群・全メッシュ点における中性子束を並べた列ベクトル

上式は(2.4)式のように変形できる.

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}_n = k_n \vec{\phi}_n \\ \mathbf{A}^{\dagger -1} \mathbf{F}^\dagger \vec{\phi}_n^\dagger = k_n \vec{\phi}_n^\dagger \end{cases} \quad (4.47)$$

$k_n$ ,  $\vec{\phi}_n$ ,  $\vec{\phi}_n^\dagger$ はそれぞれ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$ の固有値, forward 固有関数, adjoint 固有関数に対応している.

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{F}$ の行列の作成の仕方については文献[25]を参照されたい. 作成した行列から $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$ を計

算すれば、その行列の固有値・固有関数を計算することで  $k_n$ ,  $\overrightarrow{\phi}_n$ ,  $\overrightarrow{\phi}_n^\dagger$  を求めることができる。固有値・固有関数は核分裂反応が生じる空間メッシュの数だけ得られる。Diffusion XY コードでは、C++ライブラリ Eigen を利用してこの計算を行っている。

#### 4.2.2.1.1 C++ライブラリ Eigen

Eigen は、C++言語で書かれた線形代数ライブラリであり、以下の特徴を持つ[26]。

- 疎行列から密行列まで、あらゆるサイズ・密度の行列を扱うことができる。
- 様々な行列分解手法を実装している。
- Expression templates を導入することで、一時的な変数の生成が減るため、計算時間が速い。
- 行列やベクトルの演算を直感的に書くことができる。
- 連立方程式や固有値問題などがソルバーを利用することで容易に計算できる。

Diffusion XY コードでは、fullPivHouseholderQr()関数を用いて行列  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$  を作成し、EigenSolver クラスの eigenvalues()関数と eigenvectors()関数を使うことで固有値・固有関数を計算している。

#### 4.2.2.1.2 計算手順の概要

Diffusion XY コードによる高次モード計算概要を以下に示す。

- (1) 入力から行列  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$  を作成する。
- (2) 作成した行列の  $k_n$  と、 $\overrightarrow{\phi}_n$ ,  $\overrightarrow{\phi}_n^\dagger$  の事前推定値を求める。
- (3) 縮退している  $k_n$  の次数を判定する。
- (4) 縮退している  $k_n$  に対応する  $\overrightarrow{\phi}_n$ ,  $\overrightarrow{\phi}_n^\dagger$  を再直交化する。

(1)では、先述したように Eigen の fullPivHouseholderQr()関数を用いて、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$  を計算する。

(2)では、eigenvalues()関数を使うことで固有値を求め、eigenvectors()関数を使うことで固有関数の事前推定値を求める。この計算では QR 法[32] を用いているため、縮退した固有値に対応する forward/adjoint 固有関数は、以下の直交条件を満足しない場合がある。

$$\langle \phi_m^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle = \delta_{m,n} \langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle \quad (4.48)$$

$\delta_{m,n}$  : クロネッカーのデルタ

(2)で計算される forward/adjoint 固有関数を「事前推定値」としているのはこのためである。

そこで、Diffusion XY では(3)において縮退している固有値を判定した後、(4)でそれに対応する forward/adjoint 固有関数を再直交化する。これにより(4.48)式の直交条件を満たすような forward/adjoint 固有関数が得られる。再直交化の手順は以下のおとりである。

- i.) 縮退している次数  $m \sim (m+r-1)$  に対応する  $\overrightarrow{\phi}_n, \overrightarrow{\phi}_n^\dagger$  に対して修正 Gram-schmidt 法を適用する.
- ii.) adjoint 固有関数について(4.49)式に示す  $\overrightarrow{\phi}_n^\dagger$  の線形結合を考える.
- iii.) (4.48)式の直交条件を満足すよう連立方程式を解くことで係数  $b_n^\dagger$  を求める.

$$\overrightarrow{\phi}_n^\dagger = \sum_{n=m}^{m+r-1} b_n^\dagger \overrightarrow{\phi}_n^\dagger \quad (4.49)$$

$\overrightarrow{\phi}_n^\dagger$ : 再直交化後の adjoint 固有関数のベクトル

上記の手法により, 縮退した固有関数を再直交化することができる.

### 4.2.3 固有関数の規格化について

4.2.1 節では, エネルギー2 群・1 次元無限平板体系について輸送理論, 拡散理論に基づき固有値・固有関数の解析解を導出した. また, forward/adjoint 固有関数について, 1 群と 2 群の規格化定数の比を求めた. 導出した解析解を用いて統計誤差過小評価割合を予測する場合, (4.50)式に示す領域積分値  $w_{n,v}$  を計算する必要がある.

$$w_{n,v} = \int_v \mathbf{R}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV \quad (4.50)$$

例えば, エネルギー2 群・1 次元無限平板体系において全中性子束の統計誤差過小評価割合を予測する場合には, (4.50)式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} w_{n,v} &= \int_v (\phi_{n,1} + \phi_{n,2}) dV \\ &= (f_1 + f_2) \int_v \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dV \end{aligned} \quad (4.51)$$

$v$ : タリーをとる領域

(4.51)式に示すように, 領域積分値を計算するためには forward 固有関数の規格化定数を決定する必要がある. また, 後述するノイズ項の分散の参照値の計算するためには, adjoint 固有関数の規格化定数を決定する必要がある.

Diffusion XY コードでは, まず, 計算した固有関数に対し Gram-schmidt の正規直交化を施し, その後,  $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle = 1$  となるように規格化を行っている. 本研究では, この手順ののっとり解析解の規格化を行う.

エネルギー2 群・1 次元無限平板体系における全中性子束の解析解を以下に示す.

$$\begin{cases} \phi_{n,1} = f_1 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2} = f_2 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} \phi_{n,1}^\dagger = f_1^\dagger \cos\left(B_n\left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2}^\dagger = f_2^\dagger \cos\left(B_n\left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.53)$$

上記の関数形については輸送理論・拡散理論で共通であり，規格化定数の 1 群と 2 群の比が異なる．

まず，Gram-schmidt 法による正規直交化を行う．正規直交化と言っても，上式に示すように解析解は  $\cos$  関数であるため，直交条件はすでに満たされている．そのため，ここでは正規化のみを行う．正規化とは，各領域・各エネルギー群の全中性子束を並べたベクトルの L2 ノルム（大きさ）が 1 になるように規格化定数を決定することである．解析解の L2 ノルムは下式のように計算できる．

$$L_2^f = \sqrt{\int \phi_{n,1}^2 dx + \int \phi_{n,2}^2 dx} \quad (4.54)$$

$$L_2^a = \sqrt{\int \phi_{n,1}^{\dagger 2} dx + \int \phi_{n,2}^{\dagger 2} dx} \quad (4.55)$$

$L_2^f$  : forward 固有関数の L2 ノルム， $L_2^a$  : adjoint 固有関数の L2 ノルム  
拡散理論の場合，上式は(4.13)，(4.14)式を使い以下のように表せる．

$$L_2^f = f_{1,d} \sqrt{1 + \left(\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1 (D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2})}\right)^2} \sqrt{\int \cos^2\left(B_n\left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dx} \quad (4.56)$$

$$L_2^a = f_{1,d}^\dagger \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}\right)^2} \sqrt{\int \cos^2\left(B_n\left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dx} \quad (4.57)$$

$f_{1,d}$  : 拡散理論に基づく forward 固有関数の規格化定数

$f_{1,d}^\dagger$  : 拡散理論に基づく adjoint 固有関数の規格化定数

(4.56)，(4.57)式が 1 となるように規格化定数  $f_{1,d}$ ， $f_{1,d}^\dagger$  を決定する．

$$f_{1,d} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1 (D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2})}\right)^2} \cdot \sqrt{C}} \quad (4.58)$$

$$f_{1,d}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}}(D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}}\Sigma_{s,1\rightarrow 2}} \right)^2}} \cdot \sqrt{C} \quad (4.59)$$

$$C \equiv \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx = \begin{cases} H & (n = 0) \\ H/2 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (4.60)$$

ここで、(4.60)式に示すように、 $C$ の値は基本モードの場合とそれ以外の場合で結果が異なるので注意が必要である。

輸送理論の場合、 $L_2$  ノルムは(4.37), (4.44)式を使い以下のように表せる。

$$L_2^f = f_{1,t} \sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1\rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2}} \right)^2} \sqrt{\int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx} \quad (4.61)$$

$$L_2^a = f_{1,t}^\dagger \sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2} + \frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\nu\Sigma_{f,1}}\Sigma_{s,1\rightarrow 2}} \right)^2} \sqrt{\int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx} \quad (4.62)$$

$f_{1,t}$  : 輸送理論に基づく forward 固有関数の規格化定数

$f_{1,t}^\dagger$  : 輸送理論に基づく adjoint 固有関数の規格化定数

(4.61), (4.62)式が 1 となるように規格化定数 $f_{1,t}$ ,  $f_{1,t}^\dagger$ を決定する。

$$f_{1,t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1\rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1\rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2\rightarrow 2}} \right)^2}} \cdot \sqrt{C} \quad (4.63)$$

$$f_{1,t}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{v\Sigma_{f,2}}{v\Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{v\Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right)^2}} \cdot \sqrt{C}} \quad (4.64)$$

次に、 $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle = 1$ となるように規格化を行う。

今回の計算条件では、 $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle$ は以下のように書ける。

$$\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \psi_n \rangle = \left\langle \phi_{n,1}^\dagger \chi_1 (v\Sigma_{f,1} \phi_{n,1} + v\Sigma_{f,2} \phi_{n,2}) + \phi_{n,2}^\dagger \chi_2 (v\Sigma_{f,1} \phi_{n,1} + v\Sigma_{f,2} \phi_{n,2}) \right\rangle \quad (4.65)$$

ここで、Gram-schmidt 法により正規化された固有関数に、さらに規格化因子  $h_g$ ,  $h_g^\dagger$  を乗じて表す。

$$\begin{cases} \phi_{n,1} = h_1 f_1 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2} = h_2 f_2 \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\begin{cases} \phi_{n,1}^\dagger = h_1^\dagger f_1^\dagger \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \\ \phi_{n,2}^\dagger = h_2^\dagger f_2^\dagger \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (4.67)$$

(4.66), (4.53)式を代入して整理することで、下式を得る。

$$\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \psi_n \rangle = (\chi_1 h_1^\dagger f_1^\dagger + \chi_2 h_2^\dagger f_2^\dagger) (v\Sigma_{f,1} h_1 f_1 + v\Sigma_{f,2} h_2 f_2) \int \cos^2\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dx \quad (4.68)$$

拡散理論の場合について考える。

$h_1 f_1$  と  $h_2 f_2$ ,  $h_1^\dagger f_1^\dagger$  と  $h_2^\dagger f_2^\dagger$  の間にも (4.13), (4.14) 式の関係が成り立つため、(4.68) 式は以下のように整理できる。



$$\begin{aligned}
\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \psi_n \rangle &= h_{1,d}^\dagger f_{1,d}^\dagger \cdot h_{1,d} f_{1,d} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \\
&\cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right) \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$h_{1,d}$  : 拡散理論に基づく forward 固有関数の規格化定数

$h_{1,d}^\dagger$  : 拡散理論に基づく adjoint 固有関数の規格化定数

(4.69)式が 1 となるように  $h_{1,d}^\dagger$ ,  $h_{1,d}$  を決定する.  $h_{1,d}^\dagger$ ,  $h_{1,d}$  の比は任意であるため,  $h_{1,d}^\dagger = h_{1,d}$  として, 以下のように規格化因子を求める.

$$h_{1,d} = h_{1,d}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right) f_{1,d}^\dagger f_{1,d} C}} \tag{4.70}$$

(4.58), (4.59)式を代入することで, (4.70)式は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
h_{1,d} &= h_{1,d}^\dagger \\
&= \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right)^2}}{\sqrt{\left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\chi_1}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right)}}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

輸送理論の場合について考える.

$h_1 f_1$  と  $h_2 f_2$ ,  $h_1^\dagger f_1^\dagger$  と  $h_2^\dagger f_2^\dagger$  の間にも (4.37), (4.44) 式の関係が成り立つため, (4.68) 式は以下のように整理できる.

$$\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \psi_n \rangle = h_{1,t}^\dagger f_{1,t}^\dagger \cdot h_{1,t} f_{1,t} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \right) \quad (4.72)$$

$$\cdot \left( \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)}} \right) \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx$$

$h_{1,t}$  : 輸送理論に基づく forward 固有関数の規格化定数

$h_{1,t}^\dagger$  : 輸送理論に基づく adjoint 固有関数の規格化定数

(4.72)式が 1 となるように  $h_{1,t}^\dagger$ ,  $h_{1,t}$  を決定する.  $h_{1,t}^\dagger$ ,  $h_{1,t}$  の比は任意であるため,  $h_{1,t}^\dagger = h_{1,t}$  とし、以下のように規格化因子を求める.

$$h_{1,t} = h_{1,t}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \left( \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)}} \right) f_{1,d}^\dagger f_{1,d} C}} \quad (4.73)$$

(4.63), (4.64)式を代入することで, (4.73)式は以下ようになる.

$$h_{1,t} = h_{1,t}^\dagger =$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + \frac{\left( \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) \right)^2}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\left( \frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \right)^2}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}}} \right. \\
& \left. \sqrt{\chi_1 + \chi_2 \frac{\left( \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}} \right. \\
& \left. \cdot \sqrt{\nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\left( \frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}}} \right) \quad (4.74)
\end{aligned}$$

これまでに求めた規格化因子を用いることで、エネルギー2群・1次元無限平板体系の場合の領域積分値を計算することができる。拡散理論の場合を(4.75)式に、輸送理論の場合を(4.76)式に示す。

$$w_{n,v} = h_{1,d} f_{1,d} \left( 1 + \frac{\chi_2 (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right) \int_v \cos \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dV \quad (4.75)$$

$$w_{n,v} = h_{1,t} f_{1,t} \left( 1 + \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} \right) \int_v \cos \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dV \quad (4.76)$$

### 4.3 ノイズ項の分散

本節では, (3.69)式に示した統計誤差過小評価割合の理論式中のノイズ項の分散 $\sigma_{dn}^2$ について述べる. ノイズ項とは, 展開係数の世代推移を AR モデルに近似した際の誤差項である. 物理的なイメージは難しいが, 簡単に言えば展開係数の真値との差異 (誤差) を表すものである. この誤差は, 乱数を使うことにより発生する. すなわち, モンテカルロ計算中の中性子のランダムウォークが, ノイズ項が生じる原因である. モンテカルロ計算では, 中性子がランダムウォークをする度に乱数を使い飛行方向や飛行距離を決定している. そのため, ランダムウォークを行う度に統計的なノイズが発生していると考えられることができるだろう. 本節では, このような発想に立ち, このモデルを数式化することでノイズ項の理論式を導出する. なお, 本節の導出ではアナログモンテカルロ法を前提としている.

#### 4.3.1 ノイズ項の理論式の導出

中性子輸送方程式は, 消滅・生成演算子を用いて以下のように記述できる.

$$\mathbf{A}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.77)$$

$\mathbf{A}$ : 消滅演算子,  $\mathbf{F}$ : 生成演算子

べき乗法による反復計算では, 中性子の世代を考慮し, (4.77)式は以下のようになる.

$$\mathbf{A}\psi^{(i+1)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.78)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} - \mathbf{S} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{T} \equiv \vec{\Omega}\nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.80)$$

$$\mathbf{S} \equiv \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \quad (4.81)$$

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\chi(\vec{r}, E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu\Sigma_f(\vec{r}, E') \quad (4.82)$$

次に, 角度中性子束を(4.83)式のように固有関数展開できるとする.

$$\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_n a_n^{(i)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.83)$$

$a_n^{(i)}$ :  $i$ 世代目の $n$ 次モード展開係数

$\psi_n$ は以下の関係式を満たす.

$$\mathbf{A}\psi_n = \frac{1}{k_n} \mathbf{F}\psi_n \quad (4.84)$$

$$\langle \psi_m^\dagger \mathbf{F}\psi_n \rangle = k_n \langle \psi_m^\dagger \mathbf{A}\psi_n \rangle = \langle \psi_n^\dagger \mathbf{F}\psi_n \rangle \delta_{mn} \quad (4.85)$$

$$\langle \psi_m^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle = \langle \psi_m^\dagger \mathbf{S}\psi_n \rangle \quad (m \neq n) \quad (4.86)$$

$\langle \rangle$ は全位相空間の積分を表す。ここで、角度中性子束 $\psi^{(i)}$ を下式のように中性子が原子核に衝突した回数で成分分解する。

$$\psi^{(i)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(i,j)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.87)$$

$\varphi^{(i,j)}$  :  $j$ 回衝突した中性子束成分

アナログモンテカルロ計算の場合、 $\varphi^{(i,j)}$ の収支を考えることで以下のバランス式が得られる。

$$\mathbf{T}\varphi^{(i+1,0)} = \frac{1}{k_0} \mathbf{F}\varphi^{(i)} = \sum_n \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \mathbf{A}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.88)$$

$$\mathbf{T}\varphi^{(i+1,j+1)} = \mathbf{S}\varphi^{(i+1,j)} \quad (4.89)$$

(4.88), (4.89)式の両辺について、 $j = 0 \sim \infty$ までの和を取ると、中性子輸送方程式 ((4.77)式) に一致することがわかる。

ここで、 $\varphi^{(i,j)}$ が以下のように固有関数展開できると仮定する。

$$\varphi^{(i,j)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_n b_n^{(i,j)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.90)$$

$b_n^{(i,j)}$  :  $\varphi^{(i,j)}$ の $n$ 次モード展開係数

(4.90)式を(4.88), (4.89)式に代入し、左から随伴固有関数 $\psi_n^\dagger$ をかけて全位相積分することで次式を得る。

$$b_n^{(i+1,0)} \langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle + \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,0)} \langle \psi_m^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \langle \psi_n^\dagger \mathbf{A}\psi_n \rangle \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} b_n^{(i+1,j+1)} \langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle + \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j+1)} \langle \psi_m^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle \\ = b_n^{(i+1,j)} \langle \psi_n^\dagger \mathbf{S}\psi_n \rangle + \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j)} \langle \psi_m^\dagger \mathbf{S}\psi_n \rangle \end{aligned} \quad (4.92)$$

(4.91), (4.92)式を $b_n^{(i,j)}$ について整理する。

$$b_n^{(i+1,0)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle} - \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,0)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle} \quad (4.93)$$

$$b_n^{(i+1,j+1)} = b_n^{(i+1,j)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{S}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle} + \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{S}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle} - \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j+1)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T}\psi_n \rangle} \quad (4.94)$$

(4.93), (4.94)式について、全ての $j$ に対して和を取り整理することで、以下の式を得る。この時、(4.86)式の関係を利用した。

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_n^{(i+1,j)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \quad (4.95)$$

ここで、(4.87)式に(4.83)、(4.90)式を代入して両辺を比較することで、展開係数 $a_n^{(i)}$ と $b_n^{(i,j)}$ の関係が以下のように求まる。

$$a_n^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} b_n^{(i,j)} \quad (4.96)$$

(4.96)式を使えば、(4.95)式はべき乗法により得られる結果と一致することが分かる。

次に、モンテカルロ計算で発生する統計的なノイズが発生するタイミングについて考える。モンテカルロ計算中の中性子のランダムウォークでは乱数を使用して中性子の飛行方向や飛行距離を決定している。そのため、中性子が衝突する度に中性子束分布の結果に統計的なノイズが発生していると考えられることができる。中性子束分布の統計的な揺らぎは、ノイズにより高次モード展開係数が励起されることにより発生する。そこで、中性子の衝突により発生するノイズを(4.93)、(4.94)式に $\delta_n^{(i,j)}$ として導入する。

$$b_n^{(i+1,0)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} - \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,0)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} + \delta_n^{(i+1,0)} \quad (4.97)$$

$$b_n^{(i+1,j+1)} = b_n^{(i+1,j)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{S} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} + \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{S} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} - \sum_{m \neq n} b_m^{(i+1,j+1)} \frac{\langle \psi_m^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} + \delta_n^{(i+1,j+1)} \quad (4.98)$$

$\delta_n^{(i,j)}$  :  $j$ 回衝突した中性子束成分のノイズ

(4.97)、(4.98)式について、全ての $j$ に対して和を取り整理することで、以下の式を得る。この時、(4.86)式の関係を利用した。

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_n^{(i+1,j)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} + \sum_{j=0}^{\infty} b_n^{(i+1,j)} \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{S} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle} + \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \quad (4.99)$$

(4.99)式に(4.96)式を代入し整理することで、ARモデルの式に帰着することが分かる。

$$a_n^{(i+1)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} + \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \quad (4.100)$$

(4.101)式に示すARモデルの式と(4.100)式を比較することで、ノイズ項 $d_n^{(i)}$ は(4.102)式のようになる。

$$a_n^{(i+1)} = \frac{k_n}{k_0} a_n^{(i)} + d_n^{(i+1)} \quad (4.101)$$

$$d_n^{(i+1)} = \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \quad (4.102)$$

(4.102)式がノイズ項の理論式である．なお，導出した理論式はアナログモンテカルロ法のアルゴリズムを前提として導出している．後述の検証計算では非アナログモンテカルロコードを使用するため，厳密に言えば(4.102)式を適用することはできないが，今回はアナログ法と非アナログ法によるノイズ項の振る舞いに大きな差はないものとして(4.102)式を適用する．しかし，現在使われているモンテカルロコードでは，ほとんど非アナログ法が採用されているため，今後，非アナログ法の場合のノイズ項の理論式の導出が必要となるだろう．

(4.102)式を見ると，ノイズ項は衝突した中性子に対する吸収された中性子の割合の逆数に比例していることが分かる．このことから，ノイズ項の展開次数に対する依存性は体系の散乱比と深く関係していることが分かる．また，中性子束の婉曲の度合いを示すバックリングは高次のモードのなるにつれて大きいため，高次の中性子束ほど体系からの漏れ量が大きくなる．そのため，(4.102)式においても高次になるにつれて漏洩項の影響が大きくなり， $\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle \approx \langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle$ となる．このことから，ノイズ項は高次のモードになるにつれてある一定値に収束していくことが予想される．

### 4.3.2 ノイズ項の分散の評価手法

ノイズ項の分散は，期待値 $E$ を使って以下のように求められる．

$$\sigma_{d_n}^2 = E \left[ d_n^{(i)2} \right] - E \left[ d_n^{(i)} \right]^2 \quad (4.103)$$

AR モデルにおいて，ノイズ項 $d_n^{(i)}$ はホワイトノイズであるため，その期待値は0である．よって，(4.103)式は以下のようになる．

$$\sigma_{d_n}^2 = E \left[ d_n^{(i)2} \right] \quad (4.104)$$

上式に(4.102)式を代入することで，ノイズ項の分散は下式のように計算できる．

$$\sigma_{d_n}^2 = \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \right)^2 E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right] \quad (4.105)$$

ここで統計誤差過小評価割合の理論式を再掲する．

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E[S_{R_v}(l)]}{\sigma_{R_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{d_n}^2}{1 - \rho_n^2}}{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{d_n}^2 (1 + \rho_n)}{1 - \rho_n^2} (1 - \rho_n)}} \quad (4.1) \text{再掲}$$

上式より，ノイズ項の分散 $\sigma_{d_n}^2$ は，領域積分値 $w_{n,v}$ と共に固有値比に対する重みの役割を担っていることが分かる．統計誤差過小評価割合は全ての展開次数についての和で計算されており，固有値比が大きい（相関が強い）低次のモードの寄与が支配的であれば統計誤差過

小評価は強く評価され、固有値比が小さい（相関が弱い）高次のモードの寄与が大きくなるほど過小評価の効果は弱く評価される。仮に、低次モードのノイズ項の分散が高次モードに比べて大きい場合、低次モードの固有値比の寄与が大きくなり、統計誤差過小評価が強く起こる。このように、統計誤差過小評価割合の計算において重要なのは、ノイズ項の絶対値ではなく、次数に対する相対値である。

(4.105)式によれば、ノイズ項の分散を計算するには中性子の衝突により発生するノイズ  $\delta_n^{(i,j)}$  の2乗の期待値を計算する必要がある。しかし、現在のところ  $\delta_n^{(i,j)}$  を直接評価する手法は存在しないため、(4.105)式によりノイズ項の分散の絶対値を計算することはできない。そこで、 $\delta_n^{(i,j)}$  をホワイトノイズであると考え、中性子が衝突した時に発生するノイズによって、全ての高次モードで同じように展開係数が励起されると仮定する。つまり、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が全ての次数で一定であると仮定する。これにより、ノイズ項の分散に次数依存性があった場合、それは比例係数部分によって生じていると考えることができる。先述したように、統計誤差過小評価割合の計算で重要となるのはノイズ項の分散の次数に対する相対値であるため、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が全ての次数で一定であると仮定すれば、(4.105)式の比例係数部分のみでノイズ項の分散の次数に対する相対値を評価することができる。

$$\sigma_{d_n}^2 \propto \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \right)^2 \quad (4.106)$$

以降の検証では、(4.106)式を使ってノイズ項の分散を評価する。

#### 4.4 ノイズ項の分散の次数依存性についての検証

本節では、ノイズ項の分散の評価手法について検証を行う。前節で、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が全ての次数で一定であると仮定し、(4.106)式によりノイズ項の分散を評価することとした。解析解を使ってノイズ項の分散を評価することが可能である簡単な体系において、上記の仮定の妥当性について検証を行う。

##### 4.4.1 ノイズ項の分散の参照値の算出方法

3章の統計誤差過小評価割合の理論式の導出過程において、展開係数の世代推移がARモデルに従う場合、ノイズ項の分散  $\sigma_{d_n}^2$  と展開係数の分散  $\sigma_{a_n}^2$  の関係式が以下のように得られた。

$$\sigma_{a_n}^2 = \frac{\sigma_{d_n}^2}{1 - \rho_n^2} \quad (3.31)_{\text{再掲}}$$

上式を変形することで(4.107)式を得る。



$$\sigma_{dn}^2 = \sigma_{an}^2(1 - \rho_n^2) \quad (4.107)$$

(4.107)式より，展開係数の世代間の分散と固有値比の情報があれば，ノイズ項を直接求めることなくノイズ項の分散を求めることができる。

全中性子束の展開係数の評価手法について述べる． $i$ 世代目の全中性子束 $\phi^{(i)}$ を固有関数展開できるとする．

$$\phi^{(i)}(\vec{r}, E) = \sum_m a_m^{(i)} \phi_m(\vec{r}, E) \quad (4.108)$$

上式の両辺に左から生成演算子 $\mathbf{F}$ と $n$ 次モード随伴全中性子束 $\phi_n$ をかけて全位相積分する．

$$\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle = \sum_m a_m^{(i)} \langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_m \rangle \quad (4.109)$$

ここで，(4.48)式で示した forward/adjoint 固有関数の直交性を利用する．

$$\langle \phi_m^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle = \delta_{m,n} \langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle \quad (4.48)_{\text{再掲}}$$

$\delta_{m,n}$  : クロネッカーのデルタ

(4.48)式を(4.109)式に使うことにより，展開係数は以下のように計算できる．

$$a_n^{(i)} = \frac{\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle} \quad (4.110)$$

(4.110)式より，モンテカルロ計算における各世代の全中性子束と，高次モード固有関数の情報が分かれば，各世代の展開係数を計算することができ，その世代間の分散も求めることができる．そうして得られた展開係数の分散から，(4.107)式を使うことでノイズ項の分散を計算することができる．

4.2 節において，エネルギー-2 群・1 次元無限平板体系の場合の輸送理論に基づいた固有値・固有関数の解析解を導出した．この結果を使い，(4.110)式に従ってモンテカルロ計算における各世代の展開係数を計算する．(4.110)式中の分母 $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle$ については，解析解では $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi_n \rangle = 1$ となるように規格化しているため，分子 $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle$ のみ考えればよい．計算条件を以下に再掲する．

- 平板厚さ H
- 上方散乱なし
- 等方散乱を仮定
- 両面完全反射境界条件

この場合， $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle$ は下式のように書ける．

$$\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle = \left\langle \phi_{n,1}^\dagger \chi_1 (\nu_{\Sigma_{f,1}} \phi_1^{(i)} + \nu_{\Sigma_{f,2}} \phi_2^{(i)}) + \phi_{n,2}^\dagger \chi_2 (\nu_{\Sigma_{f,1}} \phi_1^{(i)} + \nu_{\Sigma_{f,2}} \phi_2^{(i)}) \right\rangle \quad (4.111)$$

$\phi_g^{(i)}$  :  $i$ 世代目の $g$ 群全中性子束

adjoint 固有関数の解析解である(4.53)式を代入して整理することで，下式を得る．

$$\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle = (\chi_1 h_1^\dagger f_1^\dagger + \chi_2 h_2^\dagger f_2^\dagger) \int (v \Sigma_{f,1} \phi_1^{(i)} + v \Sigma_{f,2} \phi_2^{(i)}) \cdot \cos \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \quad (4.112)$$

輸送理論に基づく場合、 $h_1^\dagger f_1^\dagger$ と $h_2^\dagger f_2^\dagger$ の間に(4.44)式の関係が成り立つため、(4.112)式は以下のように整理できる。

$$a_n^{(i)} = \langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle = h_{1,t}^\dagger f_{1,t}^\dagger \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{v \Sigma_{f,2}}{v \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{v \Sigma_{f,2}}{v \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \cdot \int (v \Sigma_{f,1} \phi_1^{(i)} + v \Sigma_{f,2} \phi_2^{(i)}) \cdot \cos \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \quad (4.113)$$

モンテカルロ計算の中で collision estimator に基づき展開係数を求める場合、ランダムウォークの過程で中性子が衝突する度に、(4.113)式に従い $\phi_g^{(i)}$ に $1/\Sigma_{t,g}$ を、 $x$ に衝突位置の $x$ 座標を代入し、それを加算していけばよい。この操作は、(4.113)式の積分項をモンテカルロ積分によって計算することに相当する。全ての中性子の追跡を終えた時の $\langle \psi_n^\dagger \mathbf{F} \phi^{(i)} \rangle$ の結果がその世代の展開係数 $a_n^{(i)}$ となる。全ての世代の計算が終了した後、展開係数の分散を求め、(4.107)式によりノイズ項の分散を計算することができる。本検証では、初期乱数を変えたモンテカルロ計算を1000回実施し、得られた1000個のノイズ項の分散のデータを統計処理して平均値と統計誤差を算出し、それを参照値として採用する。

#### 4.4.2 ノイズ項の分散の予測値の計算方法

4.3節で導出したノイズ項の分散の理論式((4.106)式)に従って、ノイズ項の分散の予測値を計算する。全中性子束を用いて計算する場合、(4.106)式は以下ようになる。

$$\sigma_{d_n}^2 \propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \mathbf{T} \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \mathbf{A} \phi_n \rangle} \right)^2 \quad (4.114)$$

演算子 $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{A}$ には、(4.79)、(4.80)式に示した定義のように微分項が含まれているため、(4.79)、(4.84)式の関係を用いることで微分項を含まない形に変形する。

$$\sigma_{d_n}^2 \propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} + \mathbf{S} \right) \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle} \right)^2 = \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle + \langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle} \right)^2 \quad (4.115)$$

4.2節で導出したエネルギー-2群・1次元無限平板体系の場合の解析解を使い、具体的に(4.115)式を計算する。先述の計算条件においては、(4.115)式中の各項は以下のように書ける。

$$\left\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \right\rangle = \frac{1}{k_n} \left\langle \phi_{n,1}^\dagger \chi_1 (v \Sigma_{f,1} \phi_{n,1} + v \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}) + \phi_{n,2}^\dagger \chi_2 (v \Sigma_{f,1} \phi_{n,1} + v \Sigma_{f,2} \phi_{n,2}) \right\rangle \quad (4.116)$$

$$\langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle = \left\langle \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \phi_{n,1}^\dagger \phi_{n,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_{n,2}^\dagger \phi_{n,1} + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \phi_{n,2}^\dagger \phi_{n,2} \right\rangle \quad (4.117)$$

forward/adjoint 固有関数の解析解である(4.66), (4.53)式を代入して整理することで, 下式を得る.

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \right\rangle &= \frac{1}{k_n} (\chi_1 h_1^\dagger f_1^\dagger + \chi_2 h_2^\dagger f_2^\dagger) (\nu \Sigma_{f,1} h_1 f_1 + \nu \Sigma_{f,2} h_2 f_2) \\ &\quad \cdot \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle &= (\Sigma_{s,1 \rightarrow 1} h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} h_2^\dagger f_2^\dagger h_1 f_1 + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} h_2^\dagger f_2^\dagger h_2 f_2) \\ &\quad \cdot \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.119)$$

拡散理論に基づく場合, 上式は(4.13), (4.14)式の関係を使い以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \right\rangle &= \frac{1}{k_n} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \\ &\quad \cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right) \\ &\quad \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle &= \left( \begin{array}{c} \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \\ + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \cdot \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right) \\ &\quad \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.121)$$

輸送理論に基づく場合, 上式は(4.37), (4.44)式の関係を使い以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle &= \frac{1}{k_n} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{v\Sigma_{f,2} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{v\Sigma_{f,1}}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{v\Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \right) \\
&\cdot \left( \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{v\Sigma_{f,1} + v\Sigma_{f,2} \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} \right) \tag{4.122} \\
&\cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle &= \\
&\left( \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{\frac{v\Sigma_{f,2} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{v\Sigma_{f,1}}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{v\Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}}{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{v\Sigma_{f,2} \left( \frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{v\Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}} \right) \tag{4.123} \\
&\cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

こうして求められた  $\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle$ ,  $\langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle$  を(4.115)式に代入することでノイズ項の分散の予測値を計算することができる。なお、(4.120)～(4.123)式中の規格化定数  $h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1$  と積分項  $\int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx$  は、(4.115)式に代入したときに分子分母でキャンセルされるため計算は不要である。

次節からは、前節で述べた手法を用いて算出したノイズ項の分散の参照値と、本節で導出したノイズ項の分散の予測値を比較することで、ノイズ項の理論式の妥当性について検証を行う。

### 4.4.3 エネルギー1群の場合

本節では、最も簡単なエネルギー1群・1次元無限平板体系 (Fig. 4.1) において、ノイズ項の理論式中の  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が全ての次数で一定であるという仮定の妥当性について検証を行う。

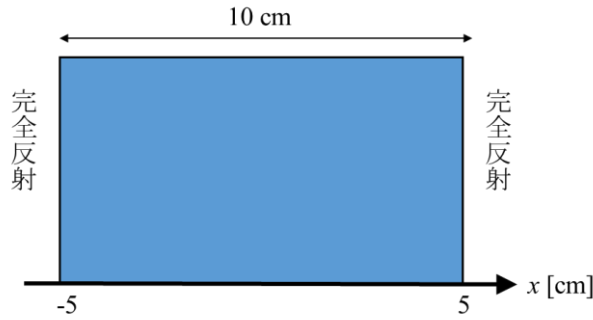


Fig. 4.1 1次元無限平板体系

エネルギー1群の場合のノイズ項の分散の参照値や予測値の計算は、(4.113), (4.116), (4.117)式において、 $\chi_2 = 0$ かつ2群断面積が全て0とすればよい。

本検証では、Table 4.1 に示す6通りの断面積セットを用いてノイズ項の分散の参照値と予測値を計算する。

Table 4.1 断面積セット[1/cm]

	$\Sigma_t$	$\Sigma_a$	$\nu\Sigma_f$	$\Sigma_s$
case 1	10.0	10.0	9.6	0.0
case 2	1.0	1.0	0.96	0.0
case 3	0.1	0.1	0.096	0.0
case 4	10.0	2.0	4.8	8.0
case 5	1.0	0.2	0.48	0.8
case 6	0.1	0.02	0.048	0.08

体系の無限増倍率は case 1~case 3 では 0.96, case 4~case 6 では 2.4 である。

Table 4.1 の断面積は、以下のようにまとめられる。

- case 1~case 3 散乱断面積なし, 断面積の大きさ case 1 > case 2 > case 3
- case 4~case 6 散乱断面積あり, 断面積の大きさ case 4 > case 5 > case 6

このように断面積の大きさを変えて検討を行うのは、中性子の世代間の相関がノイズ項の分散に与える影響について調べるためである。媒質中を飛行する中性子の平均的な飛行距離は  $1/\Sigma_t$  で与えられる。断面積が大きいほど中性子の飛行距離は短くなり、逆に断面積が小さいほど中性子の飛行距離は長くなる。中性子の飛行距離が短いと、中性子の発生位置と核

分裂反応を起こす位置（次世代の中性子源の位置）が近くなりやすいため、中性子源分布は世代を経てもあまり分布が変化しない。そのため、世代間の相関は強くなると考えられる。逆に、中性子の飛行距離が長いと、中性子は自身の発生位置をすぐに“忘れる”ため、世代間の相関は弱くなると考えられる。ここで重要なのは、中性子の飛行距離の絶対値ではなく、体系の大きさに対する相対値が相関の強さに影響を与える点である。Fig. 4.1 に示した体系は厚さ 10 cm の無限平板であり、それに対して中性子の飛行距離は case 1 では 0.1 cm, case 2 では 1.0 cm, case 3 では 10 cm となっている。よって、相関の強さは case 1 > case 2 > case 3 の順になっている。case 4~case 6 についても同様である。第 3 章において、体系の固有値比が世代間の相関の強さを表すパラメータに相当することを述べた。実際に、輸送理論に基づき解析的に計算した固有値比の結果を case 1~case 3 については Fig. 4.2 に、case 4~case 6 については Fig. 4.3 に示す。なお、高次モードは 100 次まで計算した。

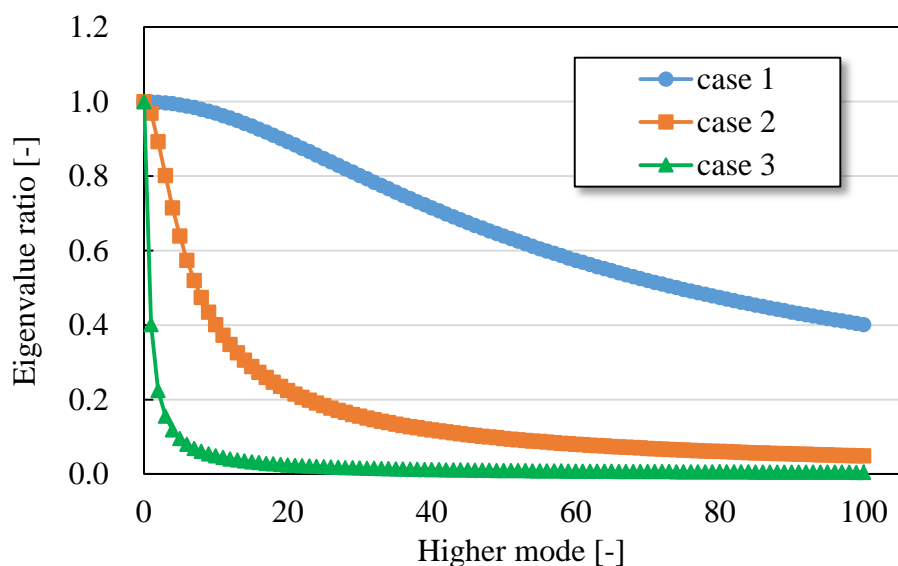


Fig. 4.2 固有値比の次数依存性 (case 1~case 3)

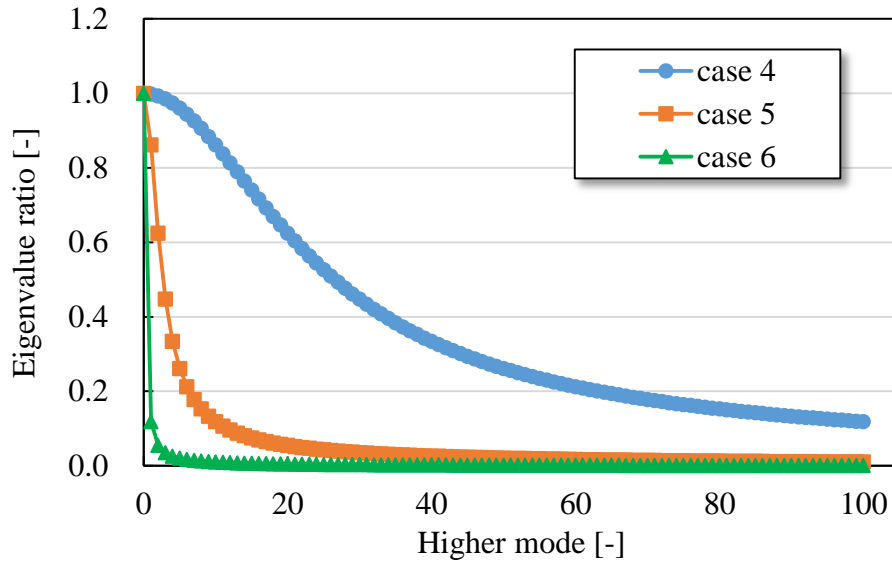


Fig. 4.3 固有値比の次数依存性 (case 4~case 6)

固有値比の大きさはそれぞれ case 1 > case 2 > case 3, case 4 > case 5 > case 6 の順になっており、世代間の相関の強さは断面積の大小関係と一致していることが確認できる. このように, case 1~case 3, case 4~case 6 の中で, それぞれ同じ無限増倍率で断面積の大きさを变化させることで, 固有値比の次数依存性を変えて検討を行う.

まずは, case 1~case 3 の断面積セットで検証を行う. case 1~case 3 は散乱断面積を 0 としている. これは, ノイズ項の理論式を変形した(4.115)式中の散乱を表す演算子  $\mathbf{S}$  を 0 とすることでノイズ項の理論式の比例係数部分を全ての次数で 1 にして,  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  を評価するためである. ノイズ項の分散の評価式 ((4.106)式) は,  $j$  回の衝突で発生する揺らぎ  $\delta_n^{(i,j)}$  をホワイトノイズであると考え,  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が全ての次数で一定であると仮定している. この仮定が成立するならば, ノイズ項の理論式の比例係数部分を全ての次数で 1 にすることで, ノイズ項の分散は次数に依らず一定となるはずである. その後, 散乱断面積ありのケースとして case 4~case 6 について検証を行う.

ノイズ項の分散の参照値の計算には, 自作モンテカルロコード SlabMC を用いた. SlabMC はエネルギー1群・1次元無限平板体系に特化したモンテカルロコードであり, アナログ法/非アナログ法を任意に選択できる機能がある. 本検証では非アナログモンテカルロ法を選択している. 計算条件は Table 4.2 に示すとおりである. なお, 表中の  $W_{\text{kill}}$  は非アナログモンテカルロ計算においてロシアンルーレットを実施する基準となるウェイト,  $W_{\text{survive}}$  はロシアンルーレットで生き残った中性子に与えるウェイトである.

Table 4.2 計算条件

	計算条件
ヒストリー数	1000
総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
境界条件	両面完全反射
$W_{\text{kill}}$	1.0E-5
$W_{\text{survive}}$	1.0E-4

まず, case 1~case 3 の結果について, Fig. 4.4~Fig. 4.6 に示す. なお, 展開次数は 100 次モードまで計算した. 参照値については, 初期乱数を変えたモンテカルロ計算を 1000 回実施し, 得られた 1000 個のノイズ項の分散のデータを統計処理して平均値と統計誤差を算出し, それを参照値として採用した. 以下のグラフでは $1\sigma$ の範囲を示した. また, 本検証ではノイズ項の絶対値ではなく, 次数に対する依存性に着目するため, 予測値, 参照値共にノイズ項の分散がある一定値に収束していると思われる 91~100 次モードの分散の平均値を使い全体を規格化している.

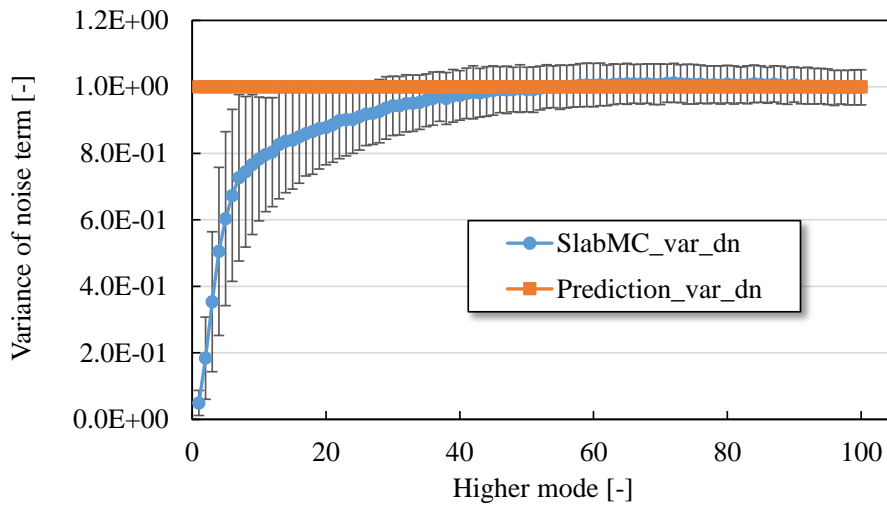


Fig. 4.4 case 1 のノイズ項の分散の次数依存性



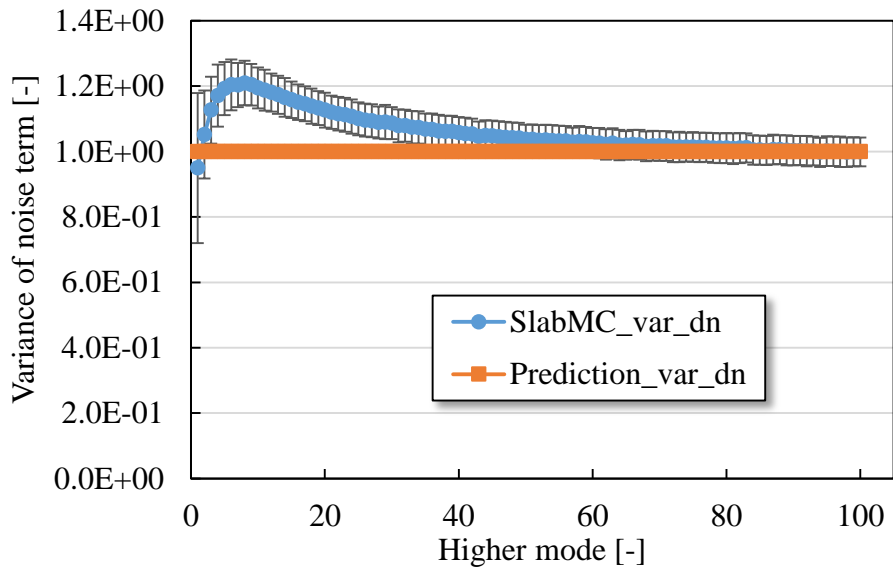


Fig. 4.5 case2 のノイズ項の分散の次数依存性

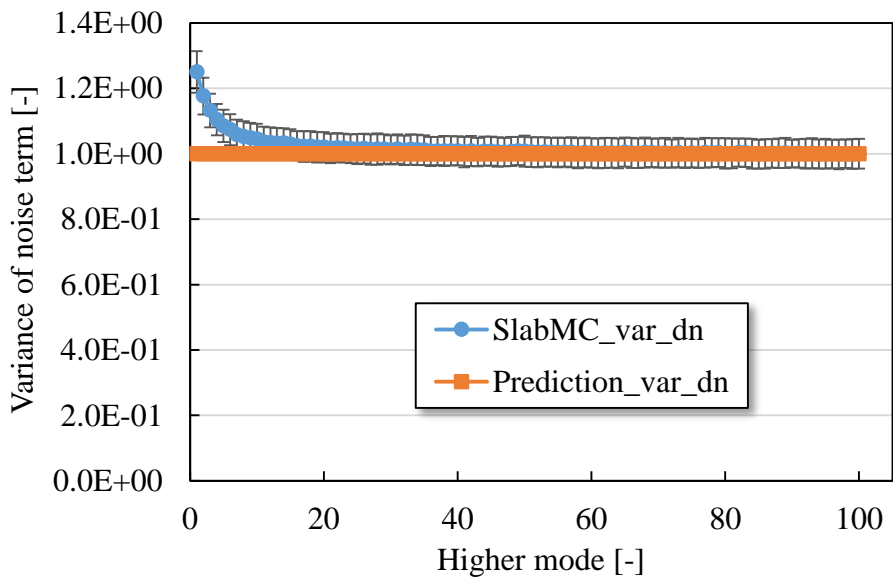


Fig. 4.6 case3 のノイズ項の分散の次数依存性

散乱断面積が 0 であるため、ノイズ項の分散の予測値は輸送理論、拡散理論にかかわらず全ての次数で 1 となっている。そのため、予測値は 1 つしか示していない。また、参照値のノイズ項の分散は  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  に等しい。Fig. 4.4 ~ Fig. 4.6 の結果から、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  は次数依存性を持っており、一定ではないことが分かった。また、断面積が大きくなるほど、つまり、世代間の相関が強くなるほど低次のノイズ項の分散が小さくな

る傾向が見られた。また、統計誤差の大きさについては相関が強くなるほど大きくなり、特に低次のモードでは統計誤差が大きくなった。

次に、case 4~case 6 の結果について、Fig. 4.7~Fig. 4.9 に示す。

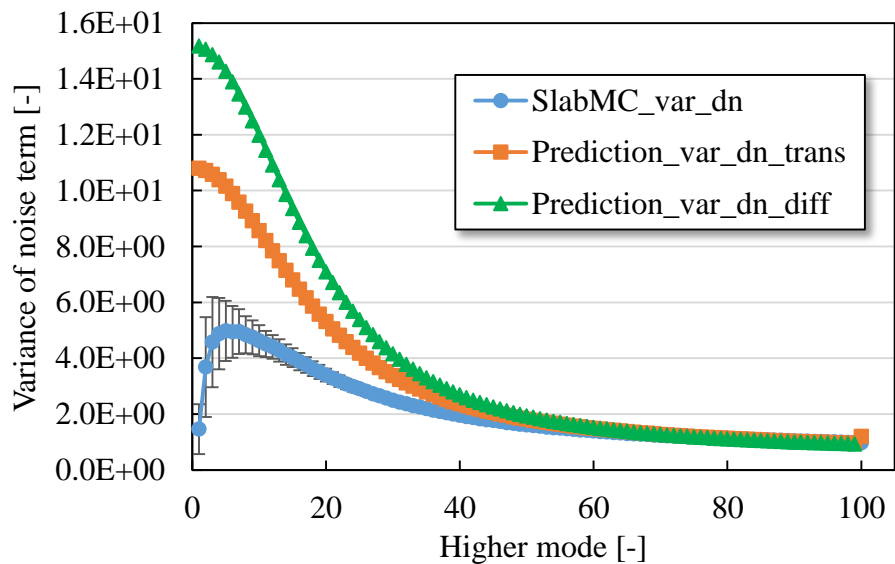


Fig. 4.7 case4 のノイズ項の分散の次数依存性

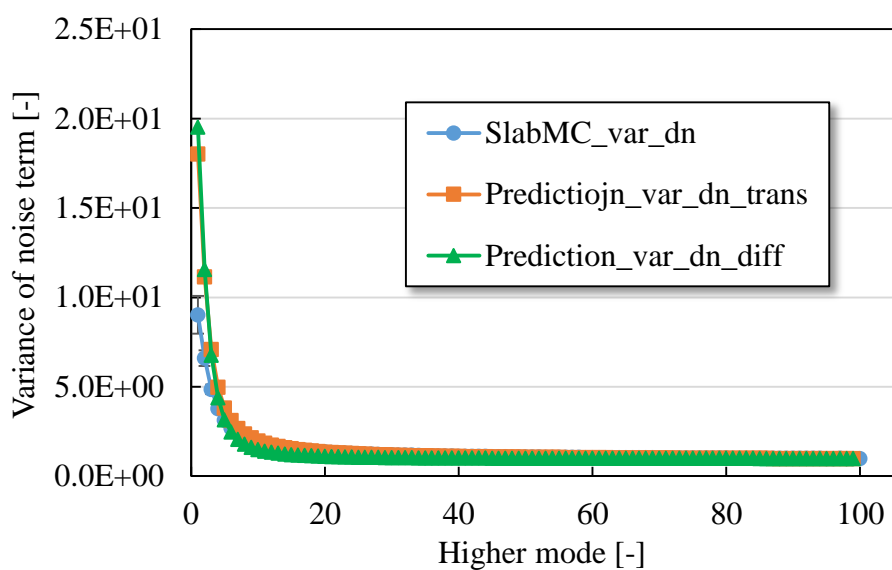


Fig. 4.8 case5 のノイズ項の分散の次数依存性

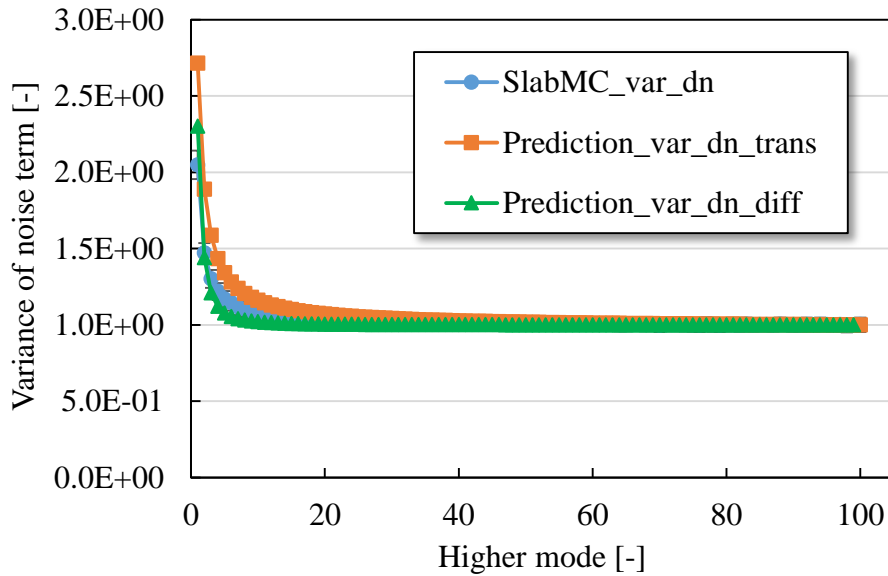


Fig. 4.9 case6 のノイズ項の分散の次数依存性

散乱がある場合では，case 4 を除き，予測値と参照値は概ね一致した．ただし，case 5 においても，1 次モード，2 次モードについては参照値と予測値で差異が見られた．統計誤差の傾向については散乱なしのケースである case 1~case 3 と同様であった．また，case 4 では輸送理論に基づいた解析解を使用した予測値と拡散理論に基づいた解析解を使用した予測値で差異が見られた．

エネルギー1 群の場合では， $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が次数に依らず一定であるという仮定は成り立たなかったが，世代間の相関が強い場合を除き，理論式によってノイズ項の分散の次数依存性を評価することができた．

#### 4.4.4 エネルギー2 群の場合

本節では，前節の検証をエネルギー2 群に拡張した検証を行い，ノイズ項の理論式がエネルギーを多群にしても成り立つかどうかについて検証を行う．

本検証で用いる case 1~case 6 の断面積セットを Table 4.3~Table 4.8 に示す．

Table 4.3 case 1 の 2 群断面面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	10.00	20.00				
$\Sigma_a$	10.00	20.00				
$v\Sigma_f$	9.60	19.20				

$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.70	0.30

Table 4.4 case 2 の 2 群断面面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	1.00	2.00				
$\Sigma_a$	1.00	2.00				
$v\Sigma_f$	0.96	1.92				

$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.70	0.30

Table 4.5 case 3 の 2 群断面面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	0.10	0.20				
$\Sigma_a$	0.10	0.20				
$v\Sigma_f$	0.096	0.192				

$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.70	0.30

Table 4.6 case 4 の 2 群断面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	10.00	20.00				
$\Sigma_a$	2.00	12.00				
$\nu\Sigma_f$	4.80	14.40				
$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$	
3.00	5.00	8.00	0.00	1.00	0.00	

Table 4.7 case 5 の 2 群断面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	1.00	2.00				
$\Sigma_a$	0.20	1.20				
$\nu\Sigma_f$	0.48	1.44				
$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$	
0.30	0.50	0.80	0.00	1.00	0.00	

Table 4.8 case 6 の 2 群断面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	0.10	0.20				
$\Sigma_a$	0.02	0.12				
$\nu\Sigma_f$	0.05	0.14				
$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$	
0.03	0.05	0.08	0.00	1.00	0.00	

体系の無限増倍率は case 1~case 3 では 0.96, case 4~case 6 では 1.54 である.

断面積の傾向は前節の検討と同様に設定した.

- case 1~case 3 散乱断面積なし, 断面積の大きさ case 1 > case 2 > case 3
- case 4~case 6 散乱断面積あり, 断面積の大きさ case 4 > case 5 > case 6

散乱なしのケースである case 1~case 3 について, 核分裂スペクトルが 1 群は 0.7, 2 群は 0.3 と設定している. これは, あまり現実に即した設定ではないが, 核分裂中性子が 1 群のみで発生するような設定にすると, 散乱がないために実質 1 群の計算になってしまうため, このような核分裂スペクトルを設定している.

前節の検討と同様に、断面積の大きさと世代間の相関（固有値比）の関係を確認するために、各ケースの固有値比を計算した。その結果を case 1~case 3 については Fig. 4.10 に、case 4~case 6 については Fig. 4.11 に示す。なお、展開次数は 100 次まで計算した。

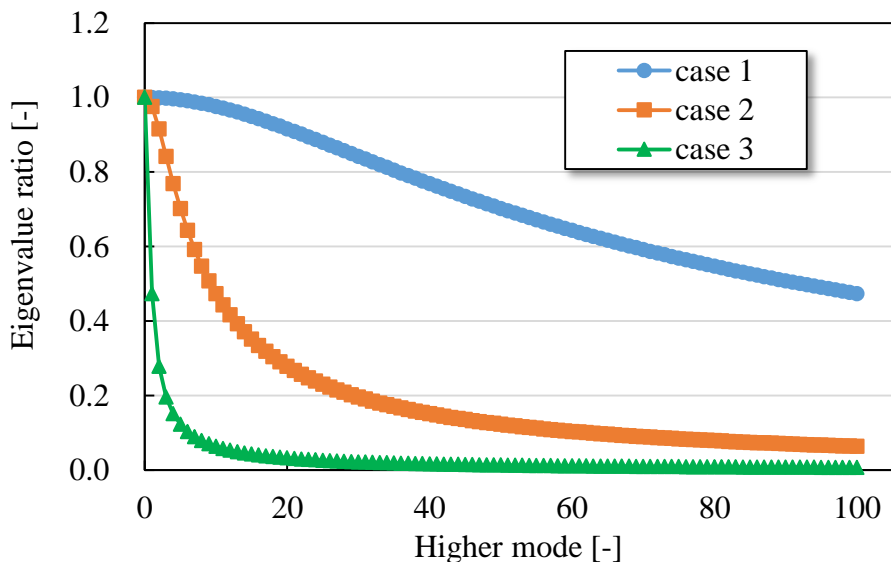


Fig. 4.10 固有値比の次数依存性 (case 1~case 3)

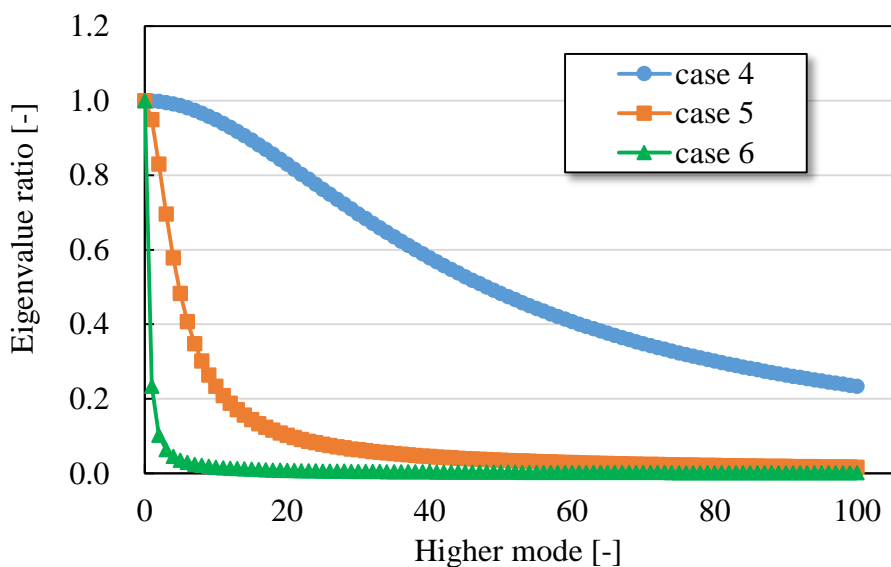


Fig. 4.11 固有値比の次数依存性 (case 4~case 6)

固有値比の大きさはそれぞれ case 1 > case 2 > case 3, case 4 > case 5 > case 6 の順になっており、世代間の相関の強さは断面積の大小関係と一致していることが確認できる。エネルギー1群の検討と同様に、case 1~case 3, case 4~case 6 の中で、それぞれ同じ無限増倍率で断面積の大きさを変化させることで、固有値比の次数依存性を変えて検討を行う。

ノイズ項の分散の参照値の計算には、SlabMC をエネルギー2群に拡張した SlabMC2E を

使用した。計算条件は前節の検証と同様である。

Table. 4.2 計算条件(再掲)

	計算条件
ヒストリー数	1000
総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
境界条件	両面完全反射
$W_{\text{kill}}$	1.0E-5
$W_{\text{survive}}$	1.0E-4

前節と同様に、まずは散乱なしのケースである case 1~case 3 の結果について、Fig. 4.12~Fig. 4.14 に示す。展開次数は 100 次モードまで計算した。参照値については、初期乱数を変えたモンテカルロ計算を 1000 回実施し、得られた 1000 個のノイズ項の分散のデータを統計処理して平均値と統計誤差を算出し、それを参照値として採用した。以下のグラフでは  $1\sigma$  の範囲を示した。また、予測値、参照値共に 91~100 次モードのノイズ項の分散の平均値を使い全体を規格化している。

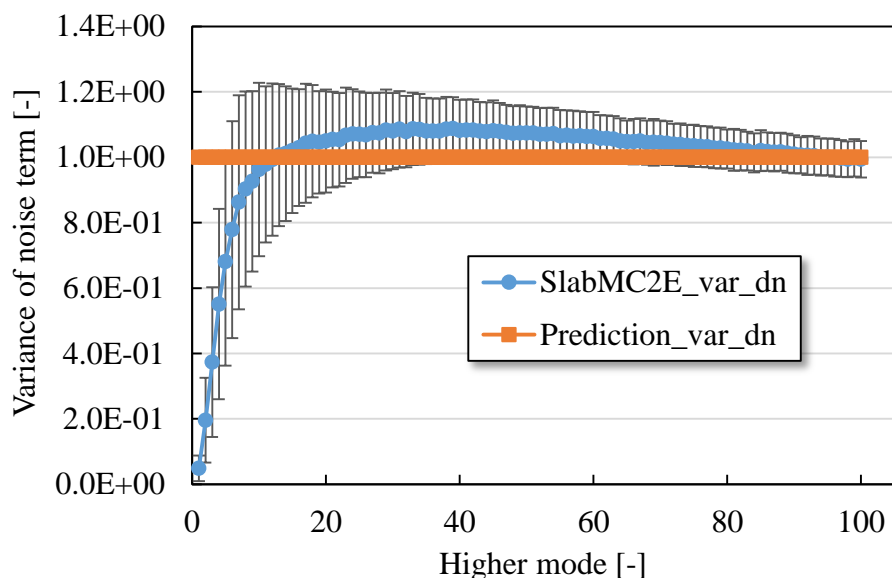


Fig. 4.12 case1 のノイズ項の分散の次数依存性

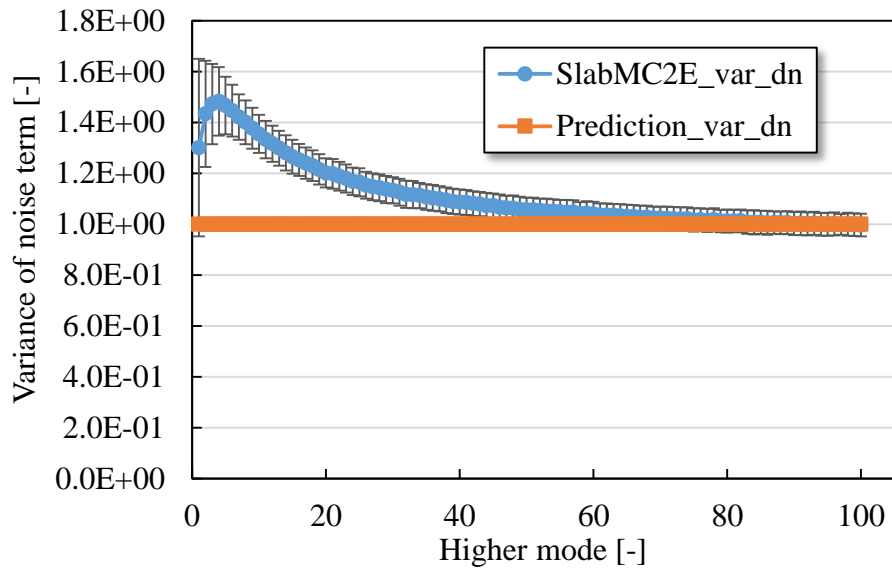


Fig. 4.13 case2 のノイズ項の分散の次数依存性

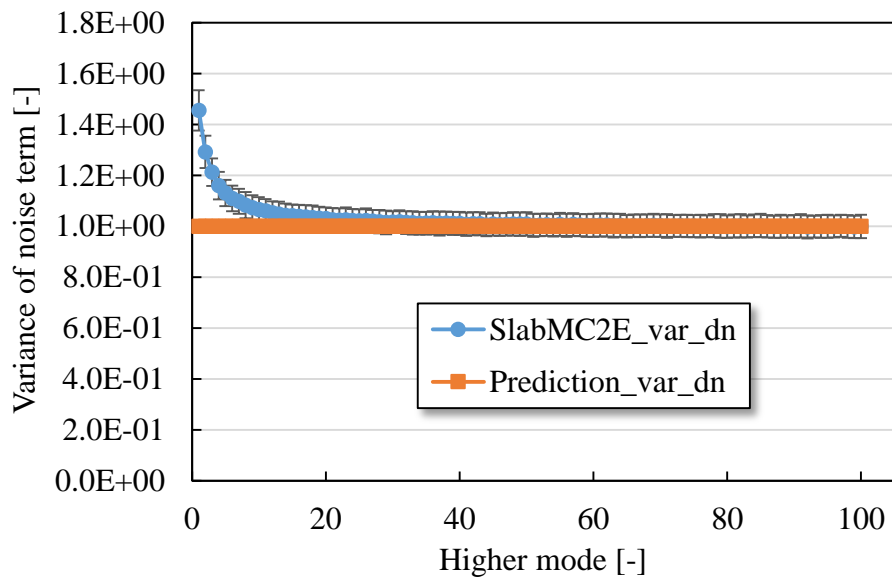


Fig. 4.14 case3 のノイズ項の分散の次数依存性

世代間の相関が強くなるほど低次のノイズ項の分散が小さくなる傾向が見られた。また、統計誤差の大きさについては世代間の相関が強くなるほど大きくなり、特に低次のモードでは統計誤差が大きくなった。この傾向はエネルギー1群での検討の結果と同じであった。

次に、散乱ありのケースである case 4~case 6 の結果について、Fig. 4.15~Fig. 4.17 に示す。



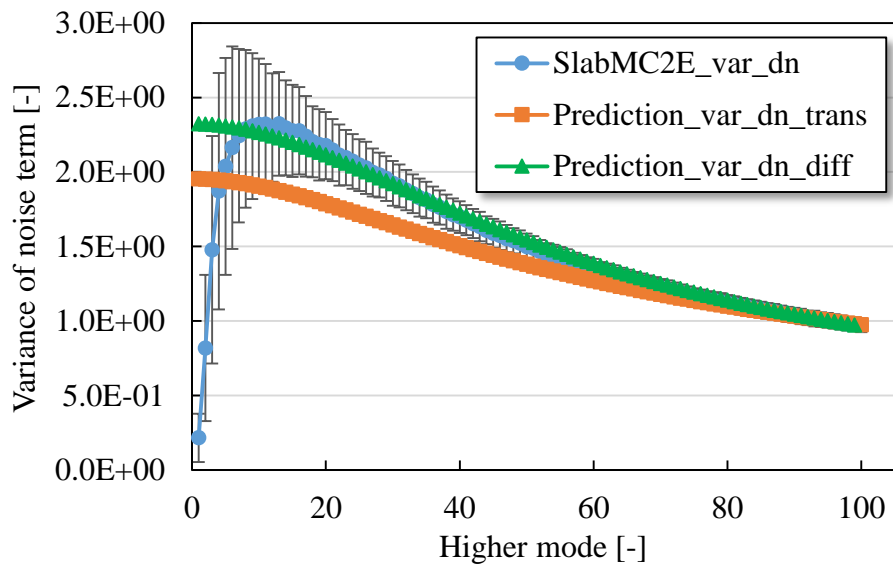


Fig. 4.15 case4 のノイズ項の分散の次数依存性

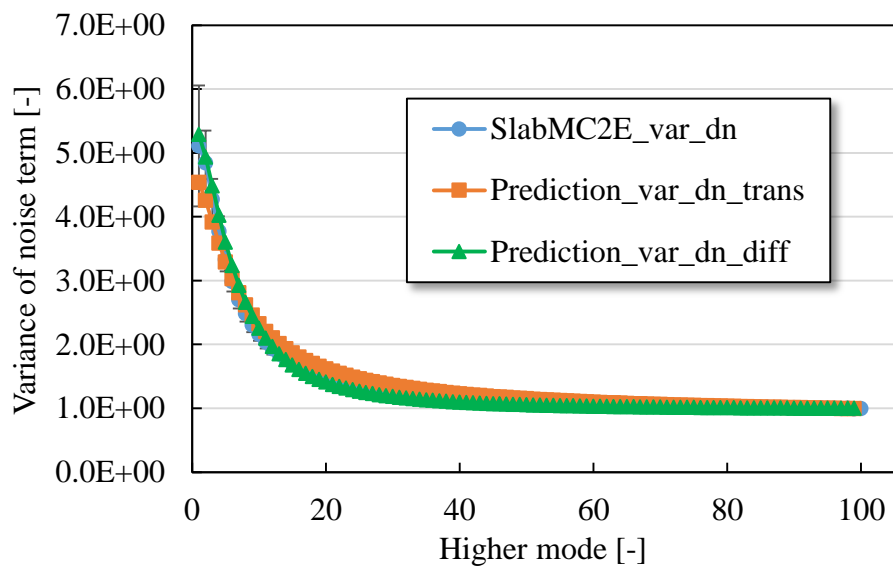


Fig. 4.16 case5 のノイズ項の分散の次数依存性

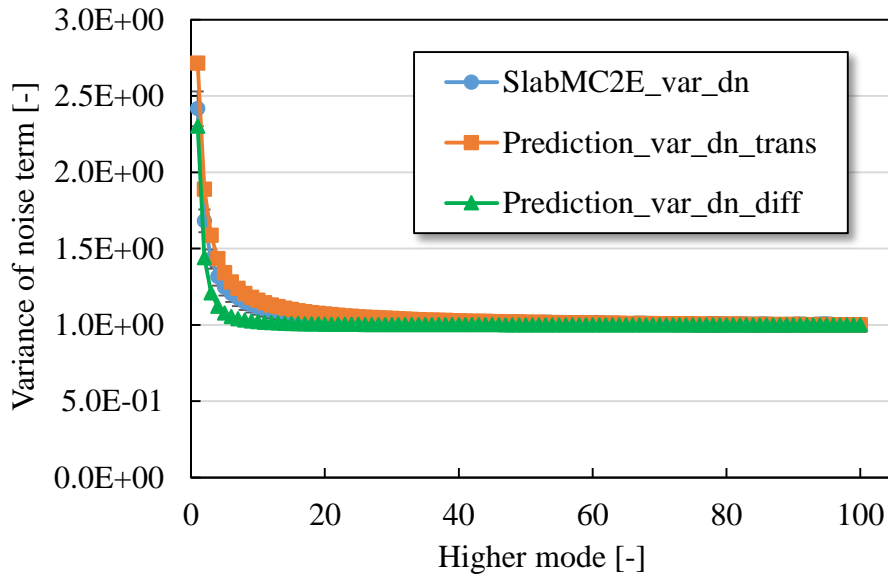


Fig. 4.17 case6 のノイズ項の分散の次数依存性

エネルギー1群の検討の結果と同様に、case 4 を除き予測値と参照値は概ね一致した。統計誤差の大きさについてもエネルギー1群の結果と同じ傾向を示した。

エネルギー2群の検討においても、相関が強い場合を除き、理論式によりノイズ項の分散の次数依存性を評価することができた。

#### 4.4.5 考察

- ・世代間の相関と  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性の関係について

エネルギー1群・2群いずれの検討においても、case 1~case3 では世代間の相関が強くなるほど低次のノイズ項の分散が小さくなる傾向が見られた。世代間の相関が強いと、核分裂源分布の高次モードの収束が遅くなり、特に低次のモードはかなりの世代を経ても収束しない。これにより、低次モードの展開係数の世代間のばらつき、ひいては低次のノイズ項のばらつきが比較的小さくなる。case 1 において、低次モードの分散が極端に小さくなっているのはこのためである。

- ・散乱比がノイズ項分散の次数依存性に与える影響について

体系の全断面積に対する散乱断面積の比（散乱比）は、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性に影響を与えると考えられる。case 1~case 3 のように散乱比が 0 の場合、中性子は衝突時に必ず吸収反応を起こし消滅する。それに対し、散乱比が 0 ではなく、散乱反応が起こった場合、中性子はランダムウォークを続行し、中性子発生位置からの移動距離が長くなる可能性が高くなるため、次世代の中性子源位置がばらつき、世代間の相関が弱くなると考えられる。

このことは、体系の固有値比を比較することで確かめることができる。エネルギー1 群の case 2 と case 5 は、全断面積は同じであるが、散乱比が異なっている。散乱比は case 2 では 0、case 5 では 0.8 である。各ケースの固有値比を比較した結果を Fig. 4.18 に示す。

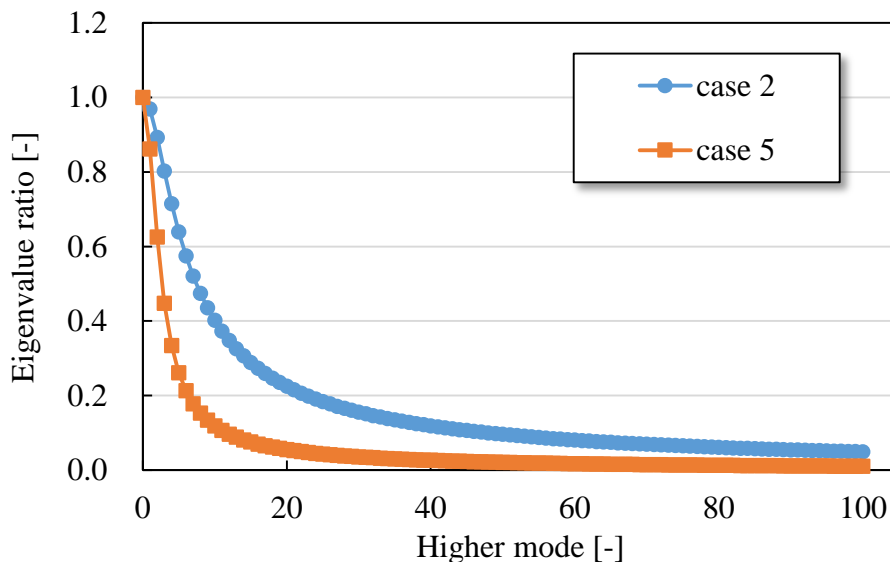


Fig. 4.18 散乱比と固有値比の次数依存性の関係

散乱比が小さい case 2 の方が固有値比が大きく、世代間の相関が強いことが確認できた。なお、case 2 と case 5 では生成断面積の値が異なっているが、エネルギー1 群の時の固有値比は(4.124)式に示すように生成断面積に依存しない。

$$\rho_n = \frac{\frac{v \Sigma_f}{\frac{B_n}{\text{atan}(B_n/\Sigma_t)} - \Sigma_s}}{\frac{v \Sigma_f}{\frac{B_0}{\text{atan}(B_0/\Sigma_t)} - \Sigma_s}} = \frac{\Sigma_t - \Sigma_s}{\frac{B_n}{\text{atan}(B_n/\Sigma_t)} - \Sigma_s} \quad (4.124)$$

case 1~case 3 では、 $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  は次数依存性を有しており、これは現在のノイズ項の分散の評価手法では無視されている。それにもかかわらず、同じ全断面積の case 5, case 6 では理論式はノイズ項の分散を概ね再現することができている。エネルギー1 群の case 4~case 6 では散乱比が 0.8 と比較的 1 に近い値となっており、散乱反応が多く起こっているために世代間の相関が弱くなり、case 1~case 3 に比べて  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性が弱まっていると考えられる。そのため、理論式によりノイズ項の分散を評価することができたと考えられる。これを確かめるために、エネルギー1 群の case 2 と case 5 について、両者の  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性を比較する。case 2 では、散乱断面積が 0 であるた

め、モンテカルロ法により計算したノイズ項の分散は $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ と等価であるため、Fig. 4.5の結果をそのまま用いることができる。一方、case 5ではモンテカルロ法により計算したノイズ項の分散には比例係数部分 $\left(\frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle}\right)^2$ が含まれているため、Fig. 4.8の結果を用いることはできない。そこで、case 5のノイズ項の分散を $\left(\frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle}\right)^2$ で割ることで $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ を計算した。case 2とcase 5の $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ の次数依存性を比較した結果をFig. 4.19に示す。

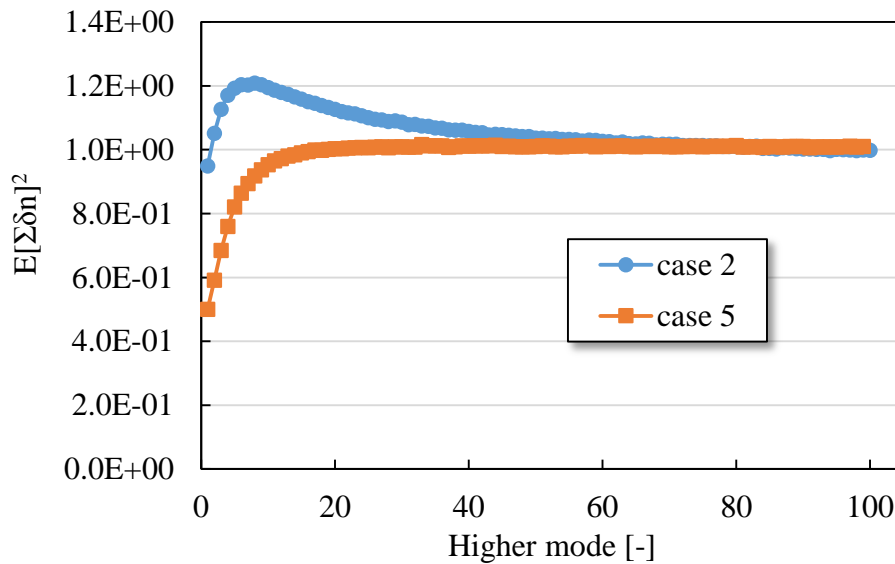


Fig. 4.19 散乱比と $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ の次数依存性の関係

散乱比が1に近いcase 5の方がcase 2より低次のモードで $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ がある一定値に収束していることが分かる。つまり、同じ断面積でも散乱比が1に近い方が $E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}\right)^2\right]$ の次数依存性は弱くなる。そのため、case 5, case 6では4.3.2節で提案したノイズ項の分散の評価手法を適用することができた。

・統計誤差の大きさについて

エネルギー1群の検討において、初期乱数を変えた多数回のモンテカルロ計算を行い、得られた多数のノイズ項の分散からその平均値と標準偏差を求め、中心極限定理によりノイズ項の分散の統計誤差を推定した。その結果、低次のモードほど統計誤差が大きくなる傾向が見られた。case 1~case 3の相対誤差をまとめた図をFig. 4.20に示す。

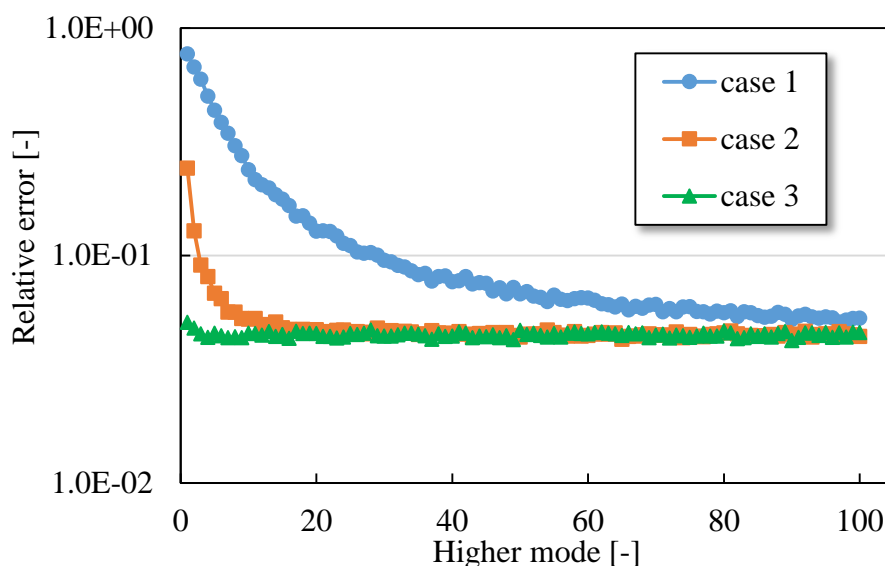


Fig. 4.20 エネルギー1群のノイズ項の分散の相対誤差 (case 1~case 3)

低次のモードほど相対誤差は大きくなり、世代間の相関が強い場合ほどその傾向が顕著に表れていることが分かる。なお、Fig. 4.20 に示した相対誤差は、ノイズ項の世代間のばらつきを示すものではなく、初期乱数を変えた多数回の計算を行った時のノイズ項の分散のばらつきを示すものであることに注意されたい。高次のモードの展開係数は世代を減ることですぐに 0 へと収束するため、初期乱数が異なってもすぐに同じ値へ収束する。そのため、展開係数の分散、ひいてはノイズ項の分散の平均値のばらつきは小さくなる。それに対して、低次のモードの展開係数は世代を経ても初期値周辺で推移し、なかなか収束しないため、展開係数の分散やノイズ項の分散は初期乱数によって大きくばらつく。そのため、低次のモードでは初期乱数を変えることによるばらつきが大きくなっている。

・ case 4 の結果について

case 4 においては、エネルギー1群、2群のいずれの検討でも、輸送理論に基づいた解析解を使用したノイズ項の分散の予測値と、拡散理論に基づいた解析解を使用したノイズ項の分散の予測値の間に差異が見られた。この原因は、予測値や参照値の規格化の方法にある。前節の検討では、ノイズ項の分散がある一定値に収束していると思われる 91~100 次モードのノイズ項の分散の平均値を使い全体を規格化した。しかし、Fig. 4.7, Fig. 4.15 を見ると、case 4 においては 100 次モードではまだノイズ項の分散は収束しておらず、減衰を続けていることが分かる。また、91~100 次モードにおけるノイズ項の分散の平均値も輸送理論と拡散理論の間で差異がある。輸送理論と拡散理論のノイズ項の分散に差異が生じたのはこのためである。そこで、エネルギー1群の case 4 について、ノイズ項の分散を確実に収束していると思われる 1000 次モードまで計算し、991 次~1000 次モードのノイズ項の分散の平均値を使い、全体を規格化した。その結果を Fig. 4.21 に示す。

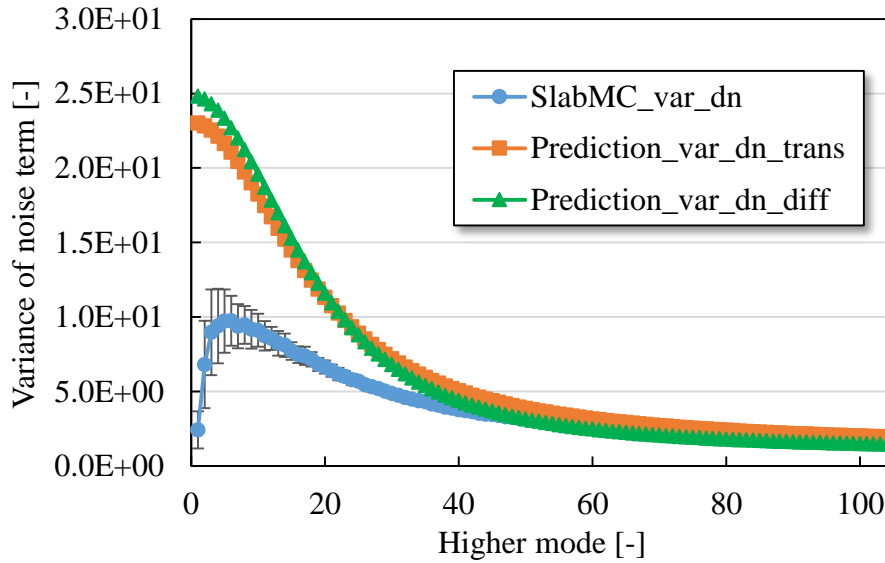


Fig. 4.21 case4 のノイズ項の分散の次数依存性 (1000 次モード)

確実に収束しているモードのノイズ項の分散で規格化することで，輸送理論と拡散理論の結果はほぼ一致した。

#### 4.5 本章のまとめ

本章では，統計誤差過小評価割合の予測値の計算に必要な各パラメータの計算手法について述べた。4.2 節では，固有値比，領域積分値の計算に必要な固有値・固有関数を，エネルギー2 群・1 次元無限平板体系において解析的に導出した。また，固有値・固有関数を数値的に計算する Diffusion XY コードについて説明した。4.3 節では，モンテカルロ計算における統計的なノイズは，中性子が原子核と衝突する度に生じるというモデルを提案し，これを基にノイズ項を理論的に導出した。また，導出した理論式中の  $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  が次数に依存しないという仮定を置くことで，ノイズ項の分散を評価できることを説明した。4.4 節では，世代間の相関の強さを変えた検証計算を行った。世代間の相関が強い場合を除き，導出した理論式によりノイズ項の分散を評価することが可能であることが分かった。しかし，相関が強い場合は低次のモードでノイズ項の分散が小さくなる傾向が見られ，これはノイズ項の理論式では説明できない傾向である。

## 第5章 統計誤差過小評価割合の予測モデルの検証

### 5.1 本章の概要

本章では、第3章で導出した統計誤差過小評価割合の理論式の妥当性について検証を行う。5.2節では、統計誤差過小評価割合の参照値を算出する手法について述べる。5.3節では、最も簡単なエネルギー1群・1次元均質平板体系において、統計誤差過小評価割合の理論式を用いて計算した予測値とモンテカルロコードを使い算出した参照値を比較し、統計誤差過小評価割合の理論式の妥当性について検証する。5.4節では、体系を2次元に拡張した場合について、同様の検証を行う。5.5節では、エネルギー群を2群に拡張した場合についての検証を行う。5.6節では、実機体系を模擬した集合体系において、本研究の提案手法の実用性について検証を行う。

### 5.2 統計誤差過小評価割合の参照値

#### 5.2.1 参照値の算出手法

過小評価されていない“真の統計誤差”を求める方法の一つに、初期乱数を変えた多数回のモンテカルロ計算を実施し、その結果を統計処理する手法がある。本検討ではこの手法を用いて統計誤差過小評価割合の参照値を計算する。

モンテカルロ計算で出力される結果（中性子束、実効増倍率など）は、「各世代の計算結果の平均値」である。しかし、出力される統計誤差は世代間の相関を無視した中心極限定理により推定されたものであり、真の統計誤差に比べて過小評価されている場合がある。そこで、初期乱数を変えて多数回モンテカルロ計算を実施する。これにより、「各世代の計算結果の平均値」が計算回数の数だけ得られるが、これらの結果は互いに独立（無相関）である。よって、初期乱数の異なる多数回のモンテカルロ計算の結果を使えば、無相関の中心極限定理により真の統計誤差を推定することができる。

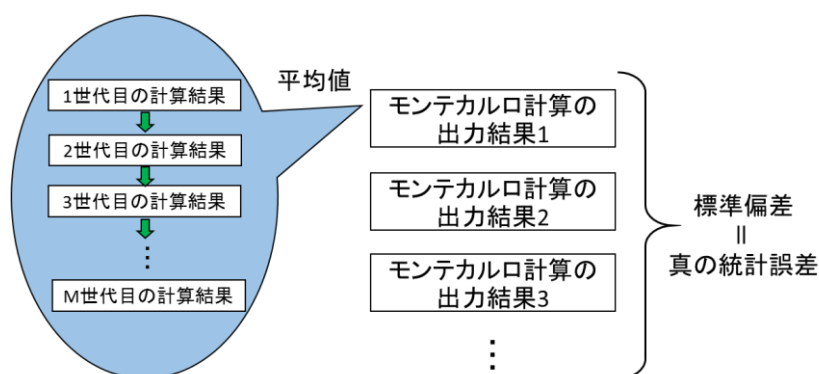


Fig. 5.1 真の統計誤差の計算方法

また、モンテカルロ計算で出力される結果には統計誤差が付随する。初期乱数を変えて多数回モンテカルロ計算を実施することで、統計誤差も計算回数の数だけ得られる。その平均

値を“見かけの統計誤差”とする。

こうして求めた真の統計誤差と見かけの統計誤差の比をとり，統計誤差過小評価割合の参照値とした。本検討では 1000 回のモンテカルロ計算を実施し，統計誤差過小評価割合の参照値を計算した。参照値の計算には JAEA が開発した多群モンテカルロコード GMVP を使用した[8]。なお，GMVP では非アナログ法を採用している。

### 5.2.2 統計誤差過小評価割合の不確かさ

本検証では，Jack-knife 法[28] を用いて統計誤差過小評価割合の統計的な不確かさ（統計誤差）を推定した。具体的な手順は以下の通りである。

- (1) 初期乱数の異なる  $N$  回のモンテカルロ計算の結果から対象とする統計量とその統計誤差（過小評価されたもの）を抽出する。
- (2) 抽出したデータから  $i$  番目のデータを除き，統計誤差過小評価割合を計算しサンプル  $\theta_i$  を得る。この操作を全てのデータに対して行い， $N$  個の統計誤差過小評価割合のサンプルを得る。
- (3) (5.1)式により，Jack-knife 法による統計誤差過小評価割合の統計誤差  $\sigma_{JK}$  を推定する。

$$\sigma_{JK} = \sqrt{\frac{(N-1)}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_i - \bar{\theta})^2} \quad (5.1)$$

$N$  : サンプル数,  $\theta_i$  : サンプル  $i$  の値,  $\bar{\theta}$  : サンプルの平均値

## 5.3 エネルギー 1 群・1 次元均質平板体系

本節では，最も簡単な体系において検証を行い，統計誤差過小評価割合の性質についてこう考察する。

### 5.3.1 計算条件

本節では，エネルギー 1 群・1 次元均質平板体系を 10 分割した各領域の全中性子束の統計誤差過小評価割合を対象とし，統計誤差過小評価割合の理論式を用いて計算した予測値と GMVP を使い算出した参照値を比較する。エスティメータは collision estimator を用いる。計算体系の模式図を Fig. 4.1 に示す。



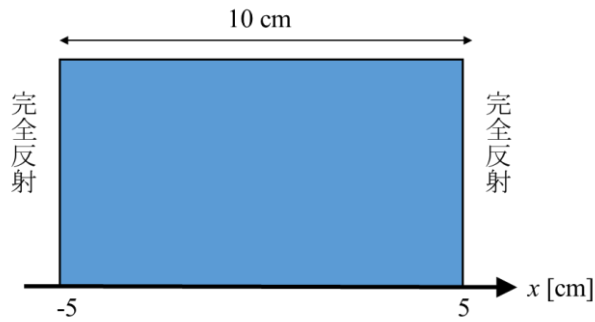


Fig. 5.2 1次元無限平板体系

使用する断面積は以下の2ケースである.

Table 5.1 断面積セット[1/cm]

	$\Sigma_t$	$\Sigma_a$	$\nu\Sigma_f$	$\Sigma_s$
case 1	10.0	2.0	4.8	8.0
case 2	1.0	0.2	0.48	0.8

case 1 と case 2 の固有値比を輸送理論に基づき解析的に計算した結果を Fig. 5.3 に示す.

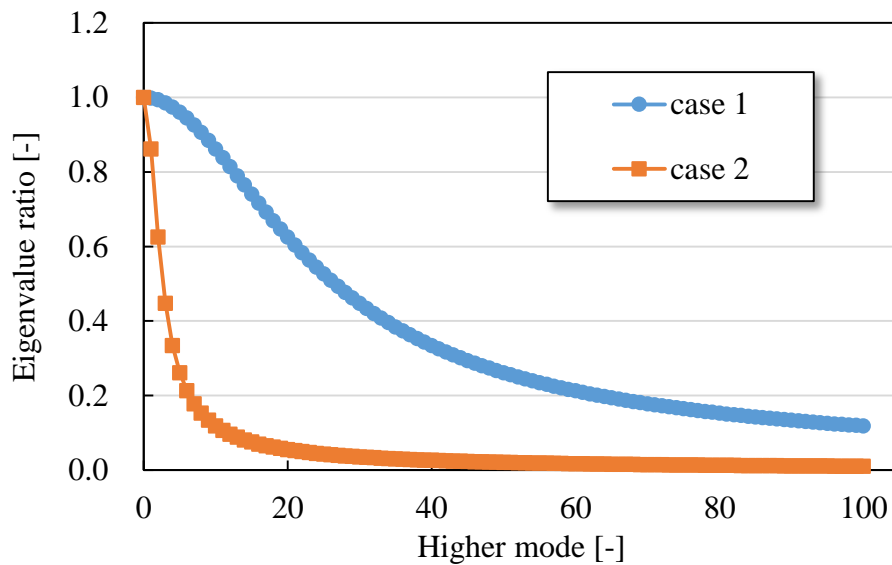


Fig. 5.3 固有値比の次数依存性

断面積が大きい case 1 は、段目積が小さい case 2 に比べ固有値比が大きい。固有値比は AR モデルにおける世代間の相関係数に相当するパラメータであるため、固有値比の大小は世代間の相関の強弱に対応する。よって、世代間の相関の強さは case 1 > case 2 となっている。

GMVP による参照値の計算の計算条件は Table 4.2 の通りである。なお、表中の  $W_{kill}$  は非アナログモンテカルロ計算においてロシアンルーレットを実施する基準となるウェイ

ト,  $W_{\text{survive}}$ はロシアンルーレットで生き残った中性子に与えるウェイト,  $W_{\text{gtf}}$ は核分裂で発生した中性子に与えるウェイトである[8] .

Table 5.2 計算条件

	計算条件
ヒストリー数	case 1:10000 case 2:1000
総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
領域分割数	10
境界条件	両面完全反射
$W_{\text{kill}}$	1.0E-5
$W_{\text{survive}}$	1.0E-4
$W_{\text{gtf}}$	1.0

上記の条件下において, 5.2 節で述べた手法により統計誤差過小評価割合の参照値を計算した. 統計誤差過小評価割合の予測値は理論式を使い計算した.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E[S_{R_v}(l)]}{\sigma_{R_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2}}{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{dn}^2}{1 - \rho_n^2} \left( \frac{1 + \rho_n}{1 - \rho_n} \right)}} \quad (5.2)$$

$$\rho_n \equiv \frac{k_n}{k_0} \quad (5.3)$$

$$w_{n,v} \equiv \int_v \phi_n(\vec{r}) dV \quad (5.4)$$

高次モード固有値は, 拡散理論に基づく場合は(5.5)式, 輸送理論に基づく場合は(5.6)式によって求められる.

$$k_n = \frac{v \Sigma_f}{DB_n^2 + \Sigma_a} \quad (5.5)$$

$$k_n = \frac{v \Sigma_f}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_t}\right)} - \Sigma_s} \quad (5.6)$$

また, 本検討はエネルギー-1 群であるため, 領域積分値は拡散理論, 輸送理論にかかわらず(5.7)式により求められる.

$$\begin{aligned}
w_{n,v} &= \int_v \cos\left(B_n\left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dV \\
&= \frac{1}{B_n} \left\{ \sin\left(B_n\left(x_{max} - \frac{H}{2}\right)\right) - \sin\left(B_n\left(x_{min} - \frac{H}{2}\right)\right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$x_{max}$  : 領域 $v$ の右端の $x$ 座標,  $x_{min}$  : 領域 $v$ の左端の $x$ 座標

ノイズ項の分散は拡散理論, 輸送理論にかかわらず(5.8)式により求められる.

$$\begin{aligned}
\sigma_{d_n}^2 &= \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger T \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger A \psi_n \rangle} \right)^2 E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right] \\
&\propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle + \langle \phi_n^\dagger S \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle} \right)^2 = \left( \frac{\frac{\nu \Sigma_f}{k_n} + \Sigma_s}{\frac{\nu \Sigma_f}{k_n}} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.8}$$

(5.5)~(5.8)式は, 第4章で導出したエネルギー2群・1次元体系の解析解に,  $\chi_1 = 1.0$ ,  $\chi_2 = 0.0$ かつ2群断面積に全て0を代入することで求めることができる. なお, (5.7)式については規格定数を省いているが, これは, エネルギー1群では規格化定数が次数に依存しないためである. ノイズ項の分散と同様に, 領域積分値も(5.2)式において固有値比の重みの役割を担っている. そのため, 絶対値ではなく, 次数に対する相対値が重要となる.

(5.2)~(5.8)式を用いることで, 統計誤差過小評価割合の予測値を計算した. なお, 展開次数は1次モードから100次モードまで考慮した.

### 5.3.2 計算結果

拡散理論に基づく解析解を使用した予測値, 輸送理論に基づく解析解を利用した予測値, GMVPで算出した参照値の3つを比較した結果をcase 1についてはFig. 5.4に, case 2についてはFig. 5.5に示す. なお, 統計誤差はJack\_knife法により推定した.

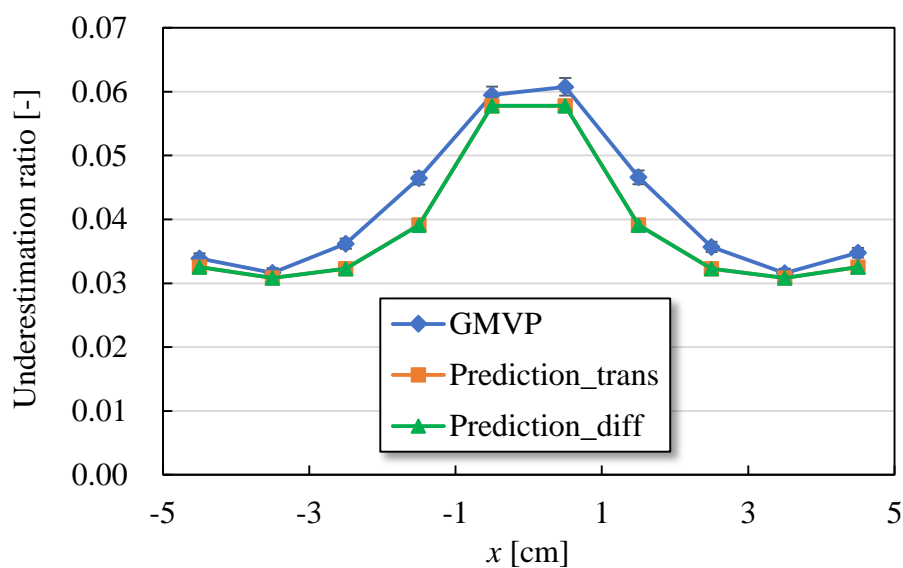


Fig. 5.4 case 1 の統計誤差過小評価割合 (エネルギー1 群・1 次元)

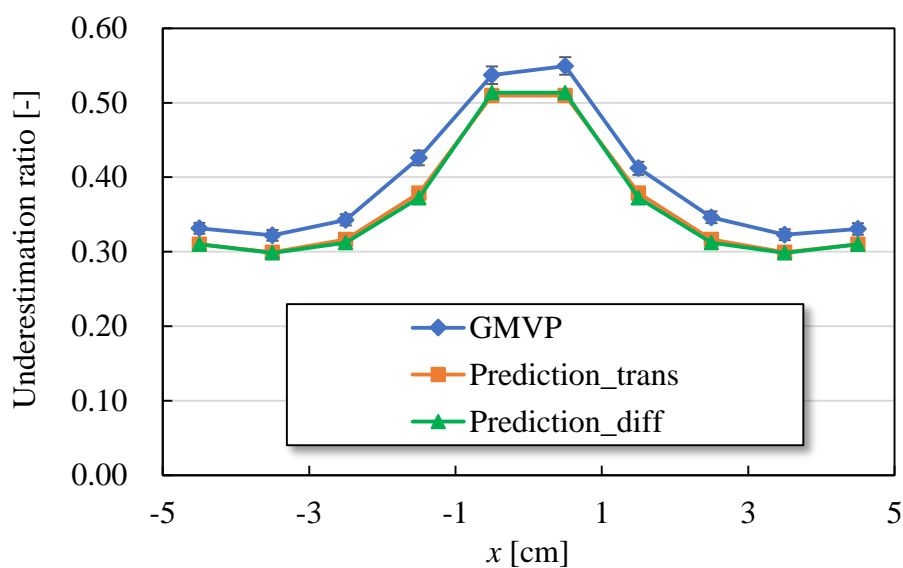


Fig. 5.5 case 2 の統計誤差過小評価割合 (エネルギー1 群・1 次元)

参照値の誤差バーは Jack\_knife 法により推定した $1\sigma$ の統計誤差を示している。Fig. 5.4 と Fig. 5.5 では縦軸のスケールが異なることに注意されたい。case 1 と case 2 の過小評価割合を比較すると、case 1 では真の統計誤差の 2.7%~4.3%程度に過小評価されているのに対し、case 2 では真の統計誤差の 21%~40%程度に過小評価されている。このことから、世代間の相関が強い(固有値比が大きい)ほど、統計誤差が過小評価されることが確認できた。また、case 1 については予測値と参照値はよく一致しており、case 2 でも 0.02~0.04 程度の差異は見られるものの、概ね一致した。

### 5.3.3 考察

#### ・統計誤差過小評価割合の位置依存性について

case 1, case 2 のいずれにおいても, 統計誤差過小評価割合は体系端の領域で小さく, 体系中央の領域で大きくなっていった. 統計誤差過小評価割合がこのような位置依存性を持つのは, 各領域の領域積分値 $w_{n,v}$ の振る舞いに起因する. (4.75)式に従い, 体系端と体系中央の領域積分値の2乗値を計算し, 次数に対する依存性を調べた結果を Fig. 5.6 に示す. なお, 展開次数は50次まで計算した.

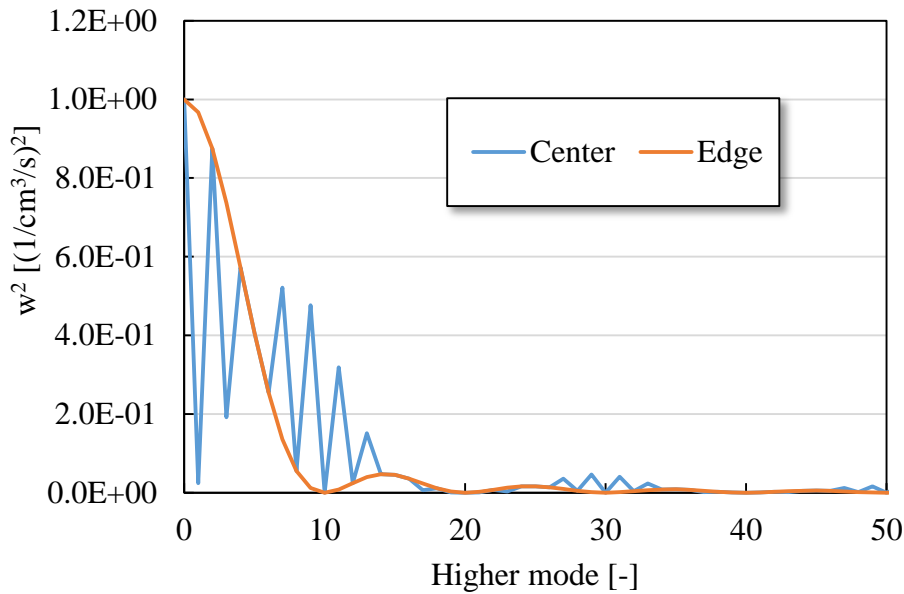


Fig. 5.6 領域積分値の2乗値の次数依存性

体系端と体系中央の領域積分値を比較すると, 体系端では低次のモードで $w_{n,v}^2$ が大きくなっており, 高次のモードでは小さくなっている. それに対し, 体系中央では $w_{n,v}^2$ が大きく振動しており, 低次でも $w_{n,v}^2$ が小さいモードもある. また, 高次のモードを見ると, 30次付近や50次付近で体系端の $w_{n,v}^2$ が体系中央の $w_{n,v}^2$ より大きくなっている.

統計誤差過小評価割合の理論式 ((3.69)式) において, 領域積分値はノイズ項の分散と共に, 固有値比に対する重みになっている. Fig. 5.6 では, 体系端の領域積分値は低次のモードに重みが偏っており, 統計誤差過小評価の効果が強い低次の固有値比の影響が支配的となる. 一方, 体系中央の領域積分値は, 体系中央に比べ高次のモードの寄与が大きくなっており, 相対的に低次の固有値の影響が小さくなる. このため, 統計誤差過小評価割合は体系中央で大きく, 体系端で小さくなるような位置依存性を持つ.

#### ・予測値と参照値の差異について

case 1, case 2 共に, 予測値と参照値の間にわずかながら差異が見られた. この原因は, ノイズ項の分散の次数依存性を正しく考慮できていないことにある. 予測値の計算では, ノイズ項の分散は(4.115)式により評価した. この際, (4.115)式中の $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}$ がホワイトノイズ

であり、その2乗の期待値が次数に依存しないと仮定した。第4章の検証により、世代間の相関が非常に弱い場合を除きこの仮定は成り立たず、特に低次のノイズ項の分散が小さくなることが判明した。そこで、case 1 と case 2 のノイズ項の分散を、SlabMC を使って100次モードまで計算した。なお、ここで示すノイズ項の分散は、4.4.1 節で述べたように、初期乱数を変えた1000回のモンテカルロ計算の結果の平均値である。得られた参照値と、(4.115)式を使い計算したノイズ項の分散の予測値を比較したものを case 1 については Fig. 5.7 に、case 2 については Fig. 5.8 に示す。なお、それぞれの結果は91~100次のノイズ項の分散の平均値を使い全体を規格化してある。

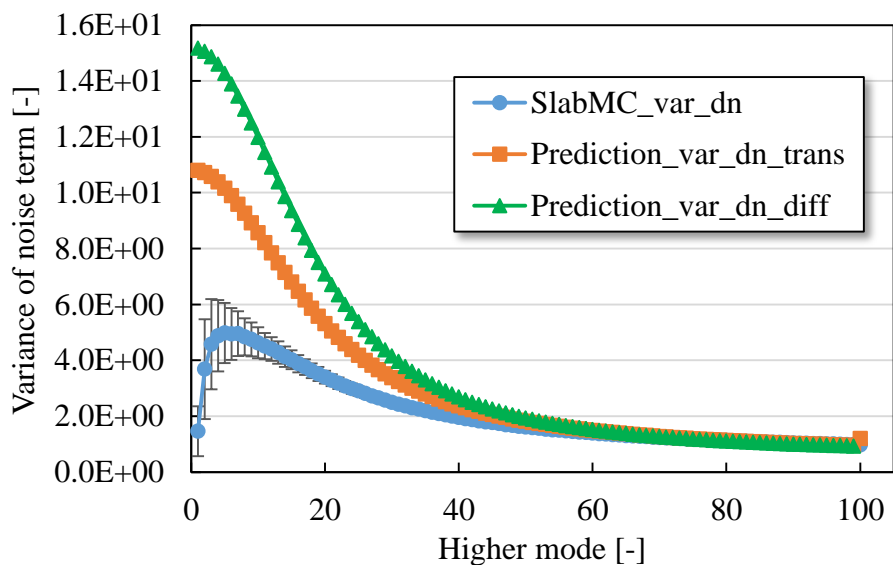


Fig. 5.7 case 1 のノイズ項の分散の次数依存性

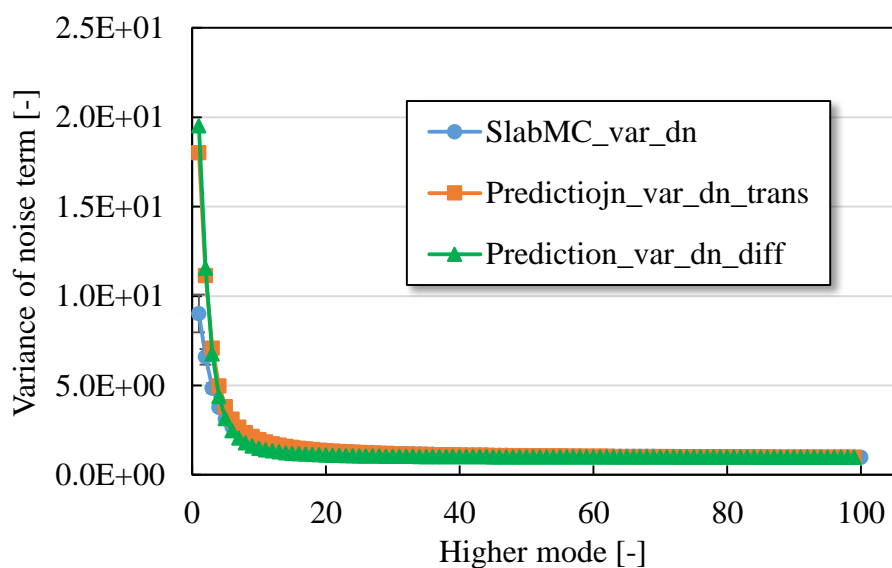


Fig. 5.8 case 2 のノイズ項の分散の次数依存性

参照値は低次のモードでノイズ項の分散が小さくなっているが、予測値はそれを再現できていない。ノイズ項の分散は、統計誤差過小評価割合の理論式において、固有値比に対する重みの役割を担っている。Fig. 5.7, Fig. 5.8 では、ノイズ項の分散の予測値は、参照値よりも低次のモードの重みを大きく評価している。これにより、本来は重みが小さく過小評価割合にあまり寄与しない低次の固有値比が、予測値では過小評価割合に対して支配的な影響を持つため、過小評価の効果が強く見積もられた。Fig. 5.4, Fig. 5.5 で過小評価割合の予測値が参照値よりも小さくなったのはこのためである。より差異が大きかった case 2 について、理論式により計算したノイズ項の分散の代わりに、SlabMC2E で計算したノイズ項の分散を用いて統計誤差過小評価割合の予測値を計算した結果を Fig. 5.9 に示す。

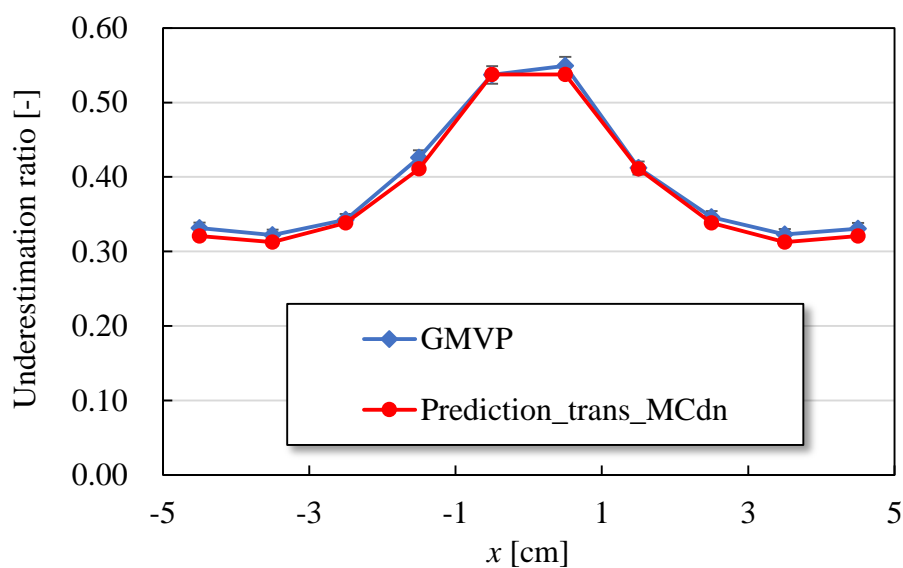


Fig. 5.9 SlabMC のノイズ項の分散で計算した統計誤差過小評価割合 (case 2)

ノイズ項の分散の次数依存性を正確に考慮することで、予測値と参照値は良く一致した。

## 5.4 エネルギー2群・1次元均質平板体系

本節では、体系をエネルギー2群に拡張する。これにより、エネルギーを多群に拡張した場合の統計誤差過小評価割合の理論式やノイズ項の理論式の妥当性について検証する。

### 5.4.1 計算条件

本節では、エネルギー2群・1次元均質平板体系を10分割した各領域のエネルギー積分した全中性子束の統計誤差過小評価割合を対象とし、統計誤差過小評価割合の理論式を用いて計算した予測値とGMVPを使い算出した参照値を比較する。計算体系の模式図はFig. 4.1と同じである。

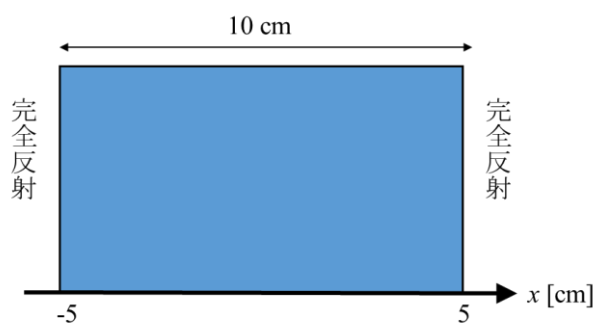


Fig. 5.2 1次元無限平板体系(再掲)

使用する断面積は以下の2ケースである。



Table 5.3 case 1 の 2 群断面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	10.0	20.0				
$\Sigma_a$	2.0	12.0				
$\nu\Sigma_f$	4.8	14.4				
$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$	
3.0	5.0	8.0	0.0	1.0	0.0	

Table 5.4 case 2 の 2 群断面積セット

	1 群	2 群				
$\Sigma_t$	1.0	2.0				
$\Sigma_a$	0.2	1.2				
$\nu\Sigma_f$	0.48	1.44				
$\Sigma_{s,1\rightarrow 1}$	$\Sigma_{s,1\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 2}$	$\Sigma_{s,2\rightarrow 1}$	$\chi_1$	$\chi_2$	
0.3	0.5	0.8	0.0	1.0	0.0	

5.3 節の検討と同様に、case 1 と case 2 の固有値比を輸送理論に基づき解析的に計算した結果を Fig. 5.10 に示す。

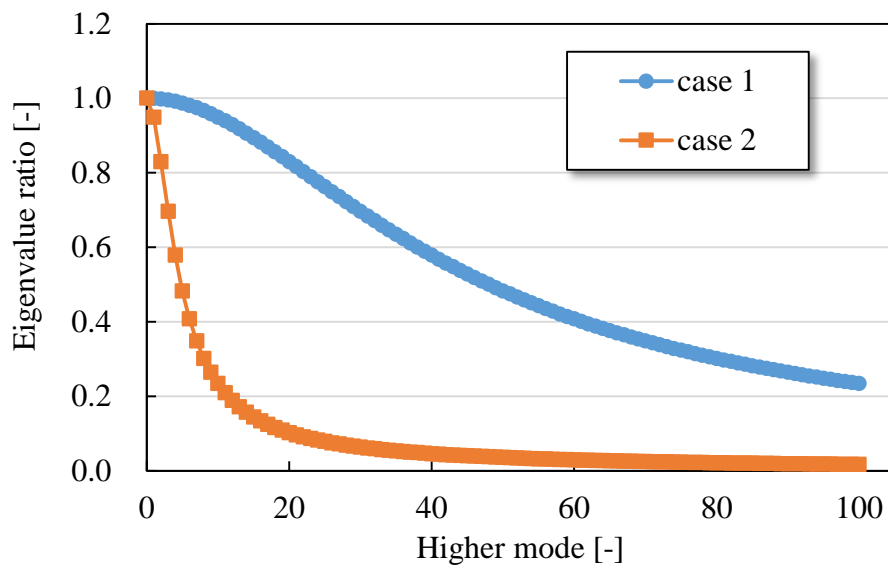


Fig. 5.10 固有値比の次数依存性

Fig. 5.10 より、世代間の相関の強さは case 1>case 2 となっている。計算条件は Table 5.5 の

通りである。

Table 5.5 計算条件

	計算条件
ヒストリー数	case 1:100000 case 2:1000
総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
領域分割数	10
境界条件	両面完全反射
$W_{\text{kill}}$	1.0E-5
$W_{\text{survive}}$	1.0E-4
$W_{\text{gtf}}$	1.0

統計誤差過小評価割合の予測値は(5.2)式を使い計算した。高次モード固有値は、拡散理論に基づく場合は(5.9)式，輸送理論に基づく場合は(5.10)式によって求められる。

$$k_n = \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,1}}{D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}} + \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f,2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} + \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{(D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2})} \quad (5.9)$$

$$k_n = \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,1}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}} + \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f,2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} \quad (5.10)$$

$$+ \frac{\chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\left(\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,1}}\right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}\right) \left(\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}\right)}$$

また、領域積分値は拡散理論の場合は(5.11)式，輸送理論の場合は(5.12)式により求められる。

$$w_{n,v} = h_{1,d} f_{1,d} \left( 1 + \frac{\frac{\chi_2}{k_n} \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} \nu \Sigma_{f,2}} \right) \int_v \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dV \quad (5.11)$$

$$w_{n,v} = h_{1,t} f_{1,t} \left( 1 + \frac{\frac{\chi_2}{k_n} \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} \nu \Sigma_{f,2}} \right) \int_v \cos\left(B_n \left(x - \frac{H}{2}\right)\right) dV \quad (5.12)$$

規格化定数はそれぞれ以下のようになる。

$$h_{1,d} = \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_1}{k_n} v \Sigma_{f,2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2}}{\sqrt{\left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\chi_1}{k_n} v \Sigma_{f,2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right) \cdot \left( v \Sigma_{f,1} + v \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)}} \quad (5.13)$$

$$f_{1,d} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2} \cdot \sqrt{C}} \quad (5.14)$$

$$h_{1,t} = \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_1}{k_n} v \Sigma_{f,2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2}}{\sqrt{\left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\chi_1}{k_n} v \Sigma_{f,2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right) \cdot \left( v \Sigma_{f,1} + v \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)}} \quad (5.15)$$

$$f_{1,t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan\left(\frac{B_n}{\Sigma_{t,2}}\right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} - \frac{\chi_2}{k_n} v \Sigma_{f,2}} \right)^2} \cdot \sqrt{C}} \quad (5.16)$$

$$C \equiv \int \cos^2 \left( B_n \left( x - \frac{H}{2} \right) \right) dx \quad (5.17)$$

ノイズ項の分散は(5.18)式により求められる。

$$\sigma_{d_n}^2 = \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \right)^2 E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

$$\propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle + \langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle} \right)^2$$

(5.18)式の各項は、拡散理論に基づく場合は式、輸送理論に基づく場合は式により求められる。

$$\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle = \frac{1}{k_n} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2}} \right) \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 C \quad (5.19)$$

$$\langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle = \left( \begin{array}{c} \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1})}{D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \\ \frac{\chi_2}{\chi_1} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \quad \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} (D_1 B_n^2 + \Sigma_{r,1}) \\ + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \quad D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} \quad D_2 B_n^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \end{array} \right) \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 C \quad (5.20)$$

$$\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} \mathbf{F} \right) \phi_n \rangle = \frac{1}{k_n} \left( \chi_1 + \chi_2 \frac{\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right)}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \right) \cdot \left( \nu \Sigma_{f,1} + \nu \Sigma_{f,2} \frac{\frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} \right) \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 C \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n^\dagger \mathbf{S} \phi_n \rangle = & \\
& \left( \begin{array}{c} \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) \\ \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \\ \frac{\chi_2}{\chi_1} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \left( \frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1} \right) \\ + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} \frac{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}} \cdot \frac{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,1}} \right)} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}}{\frac{B_n}{\arctan \left( \frac{B_n}{\Sigma_{t,2}} \right)} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2} + \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\nu \Sigma_{f,1}} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right) \quad (5.22) \\
& \cdot h_1^\dagger f_1^\dagger h_1 f_1 C
\end{aligned}$$

これらの式を使い統計誤差過小評価割合の予測値を計算した。

#### 5.4.2 計算結果

拡散理論に基づく解析解を使用した予測値，輸送理論に基づく解析解を利用した予測値，GMVP で算出した参照値の3つを比較した結果を case 1 については Fig. 5.11 に，case 2 については Fig. 5.12 に示す。

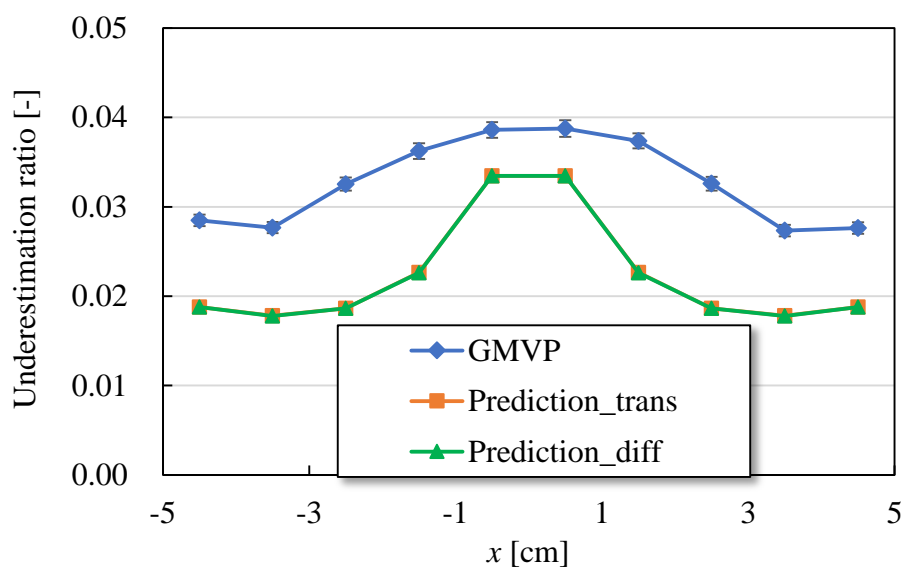


Fig. 5.11 case 1 の統計誤差過小評価割合 (エネルギー2群・1次元)

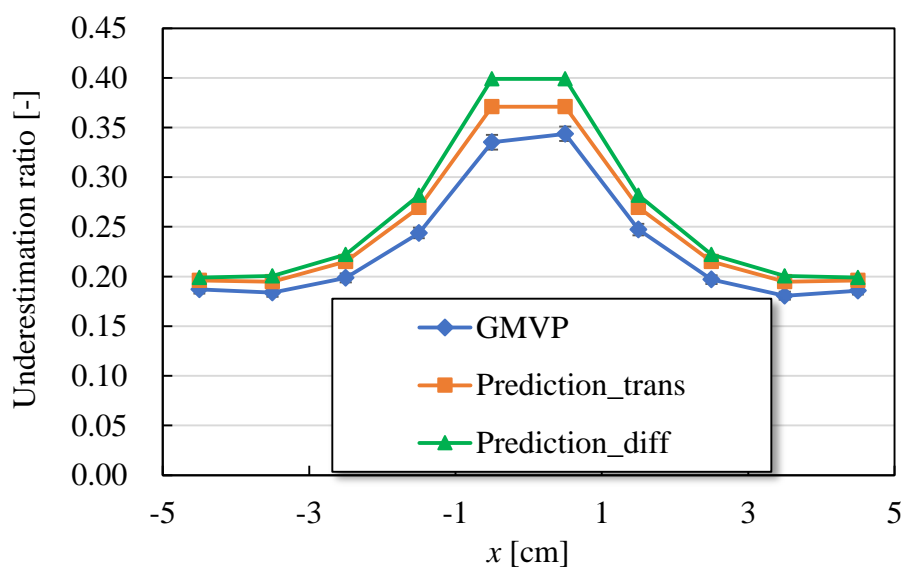


Fig. 5.12 case 2 の統計誤差過小評価割合 (エネルギー2群・1次元)

参照値の誤差バーは Jack\_knife 法により推定した $1\sigma$ の統計誤差を示している. case 1 では予測値は参照値よりも統計誤差過小評価割合が小さくなり, 空間分布の傾向も再現できていなかった. それに対し, case 2 では体系の中央に近づくにつれて予測値が参照値より大きくなっていった. また, case 2 では, 拡散理論に基づく解析解を使用した予測値は, 輸送理論に基づく解析解を利用した予測値よりも過小評価割合が大きくなった.

### 5.4.3 考察

- 統計誤差過小評価割合の位置依存性について

case 1, case 2 のいずれにおいても, 統計誤差過小評価割合は体系端の領域で小さく, 体系中央の領域で大きくなっていった. この傾向はエネルギー1 群の検討と同様であり, 領域積分値の次数依存性が空間分布の支配的な要因である.

- case 1 の結果について

case 1 では, 予測値は参照値を再現することができなかった. この原因は, エネルギー1 群の検討の時と同様に, ノイズ項の分散の次数依存性を正しく考慮できていないためである. case 1 のノイズ項の分散を, SlabMC を使って 1000 次モードまで計算した. なお, ここで示すノイズ項の分散は, 初期乱数を変えた 1000 回のモンテカルロ計算の結果を平均したものである. また, 991 次~1000 次モードのノイズ項の分散の平均値を使い, 全体を規格化している. 得られた参照値と, 拡散理論・輸送理論に基づいた解析解を使い計算したノイズ項の分散の予測値を比較したものを Fig. 5.13 に示す.

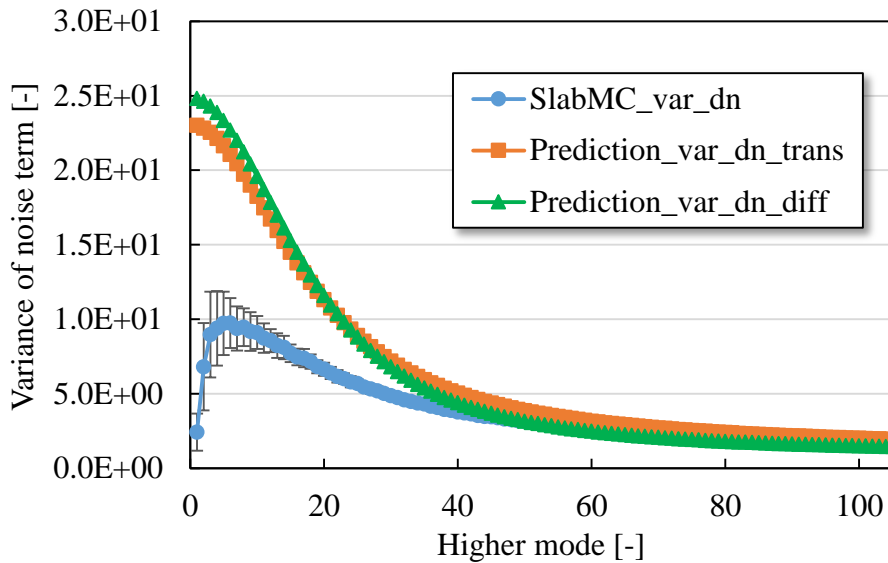


Fig. 5.13 case 1 のノイズ項の分散の次数依存性

Fig. 5.13 では, ノイズ項の分散の予測値は, 参照値よりも低次のモードの重みを大きく評価している. これにより, 本来は重みが小さく過小評価割合にあまり寄与しない低次の固有値比が, 予測値では過小評価割合に対して支配的な影響を持つため, 過小評価の効果が強く見積もられた. Fig. 5.11 で過小評価割合の予測値が参照値よりも小さくなったのはこのためである. case 1 について, 理論式により計算したノイズ項の分散の代わりに, SlabMC2E で計算したノイズ項の分散を用いて統計誤差過小評価割合の予測値を計算した結果を Fig. 5.14 に示す. なお, 領域積分値や固有値比は輸送理論に基づいた解析解を使用した.

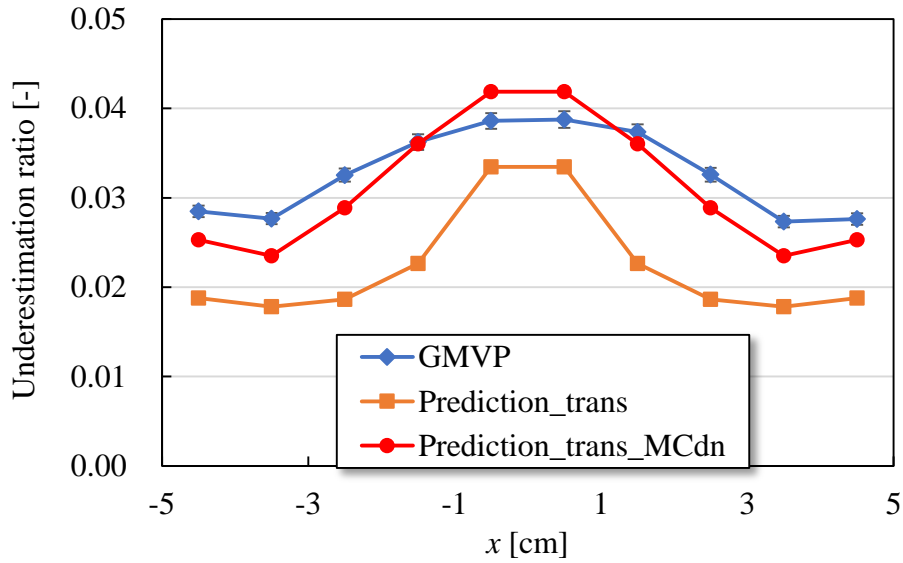


Fig. 5.14 SlabMC のノイズ項の分散で計算した統計誤差過小評価割合(case 1)

モンテカルロ計算によって得られたノイズ項の分散の参照値を用いて統計誤差過小評価割合を計算することで、予測値を使用した場合よりも GMVP の結果をより再現することができた。同様に、case 2 についても SlabMC2E で計算したノイズ項の分散を用いて統計誤差過小評価割合の予測値を計算した。その結果を Fig. 5.15 に示す。

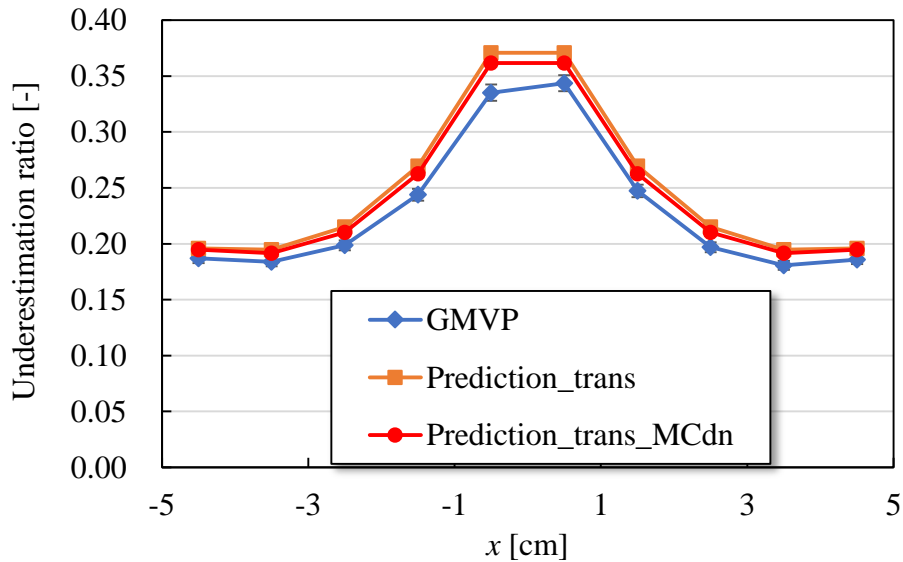


Fig. 5.15 SlabMC のノイズ項の分散で計算した統計誤差過小評価割合(case 2)

case 2 については、わずかに参照値に近づいたものの、ノイズ項の分散を理論式により計算した場合とほとんど変わらなかった。このことから、ノイズ項の次数依存性以外の原因で差異が生じていることが分かった。



・ 輸送理論の予測値と拡散理論の予測値の差異について

Fig. 5.12 に示したように、case 2 では輸送理論に基づく解析解を使用した予測値と、拡散理論に基づく解析解を使用した予測値の間に差異が生じた。この原因は、輸送理論と拡散理論それぞれの場合の固有値比によって説明することができる。case 2 における輸送理論、拡散理論それぞれの固有値比と次数の関係を Fig. 5.16 に示す。

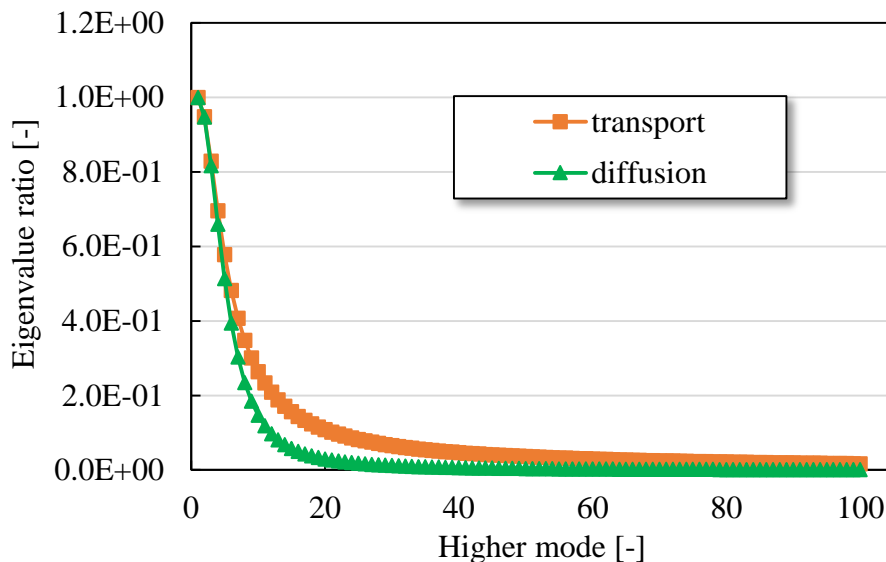


Fig. 5.16 輸送理論と拡散理論の固有値比の次数依存性

拡散理論の場合に比べ、輸送理論の場合では固有値比の次数に対する減衰が遅くなっている。このため、輸送理論に基づく解析解を使用する場合は、高次のモードの過小評価の効果が拡散理論の場合に比べて強くなる。その結果、輸送理論に基づいて計算した統計誤差過小評価割合は拡散理論に基づいて計算したものより小さくなる。（過小評価の効果が強く表れる。） Fig. 5.12 で輸送理論の場合と拡散理論の場合の過小評価割合に差異が生じたのはこのためである。

## 5.5 エネルギー1群・2次元均質平板体系

本節では、対象とする体系を2次元体系へ拡張する。これにより、統計誤差過小評価割合の理論式を多次元体系へ適用できるか検証を行う。

### 5.5.1 計算条件

本検討では、エネルギー1群2次元均質平板体系 (Fig. 5.17) を対象とし、collision estimator で評価した全中性子束の統計誤差過小評価割合について考える。体系は一辺 10 cm の正方形で、10×10 に分割をした。境界は完全反射で、図中の数字は領域番号である。

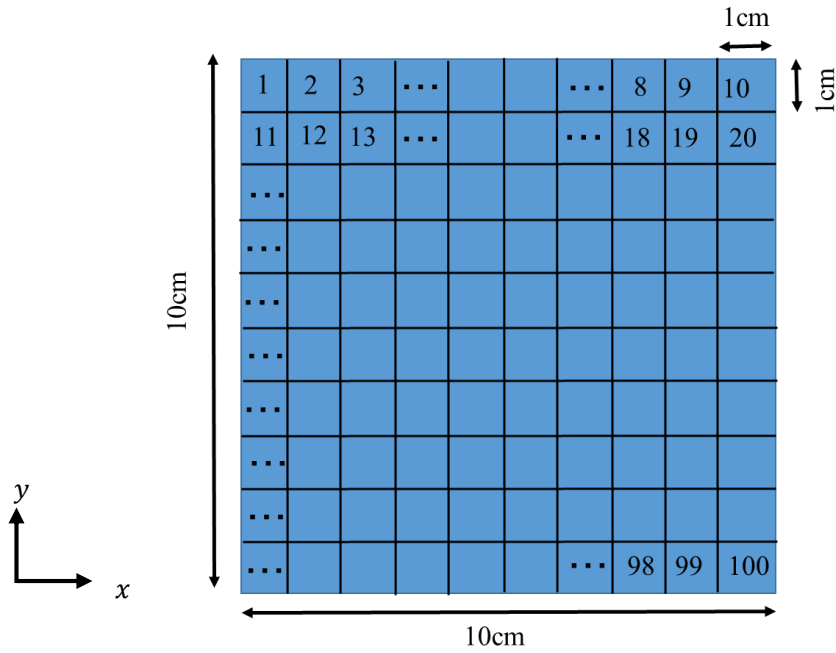


Fig. 5.17 2次元均質平板体系

使用する断面積を Table 5.6 に、計算条件を Table 5.7 に示す.

Table 5.6 断面積

$\Sigma_t$	$\Sigma_a$	$\nu\Sigma_f$	$\Sigma_s$
1.0	1.0	0.48	0.0

Table 5.7 計算条件

	計算条件
ヒストリー数	10000
総バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
領域数	$10 \times 10 = 100$
境界条件	完全反射
$W_{kill}$	0.01
$W_{survive}$	0.1
$W_{gtf}$	1.0

これまでの検討で、輸送理論と拡散理論の違いが統計誤差過小評価割合に与える影響は小さいことが分かった。そこで本検討では、固有値比、領域積分値、ノイズ項の分散の各パラメータは導出が容易な拡散理論に基づいた結果を用いる。エネルギー1群の拡散方程式を

下式に示す.

$$-D\nabla^2\phi(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \frac{1}{k_0}v\Sigma_f\phi(\vec{r}) \quad (5.23)$$

(5.23)式より,  $n$ 次モード固有値は(5.24)式のように求まる.

$$k_n = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a + DB_n^2} \quad (5.24)$$

ここで, バックリング $B_n$ は $x$ 方向と $y$ 方向のバックリング $B_x, B_y$ を用いて以下のように表せる.

$$B_n = B_{nx,ny} = \sqrt{B_{nx}^2 + B_{ny}^2} \quad (5.25)$$

添え字 $nx, ny$ は $x$ 方向と $y$ 方向の高次モードの次数を表す. 本来は, (5.24)式で求められる固有値が大きい順に1次モード, 2次モード, ...,  $n$ 次モードとなるが, 以降では $(nx, ny)$ の組み合わせで高次モードの次数を表すこととする. なお, Fig. 5.17の体系では, 各方向のバックリングは以下で与えられる.

$$\begin{cases} B_{nx} = \frac{n_x\pi}{H_x} \\ B_{ny} = \frac{n_y\pi}{H_y} \end{cases} \quad (5.26)$$

$H_x, H_y$ :  $x$ 方向と $y$ 方向の長さ (今回はどちらも 10 cm)

(5.24)式より,  $(nx, ny)$ 次の固有値比 $\rho_{nx,ny}$ は次式のようなになる.

$$\rho_{nx,ny} = \frac{k_{nx,ny}}{k_{0,0}} = \frac{\Sigma_a + DB_{0,0}^2}{\Sigma_a + DB_{nx,ny}^2} \quad (5.27)$$

領域積分値は下式で求めた.

$$\begin{aligned} w_{nx,ny,v} &= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \phi_{nx,ny}(x, y) dx dy \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{nx,0}}{H_x}} \cos\left(B_{nx}\left(x - \frac{H_x}{2}\right)\right) dx \\ &\quad \times \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{ny,0}}{H_y}} \cos\left(B_{ny}\left(y - \frac{H_y}{2}\right)\right) dy \\ &= \sqrt{\frac{2 - \delta_{nx,0}}{H_x}} \frac{1}{B_{nx}} \left\{ \sin\left(B_{nx}\left(x_{\max} - \frac{H_x}{2}\right)\right) - \sin\left(B_{nx}\left(x_{\min} - \frac{H_x}{2}\right)\right) \right\} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2 - \delta_{ny,0}}{H_y}} \frac{1}{B_{ny}} \left\{ \sin\left(B_{ny}\left(y_{\max} - \frac{H_y}{2}\right)\right) - \sin\left(B_{ny}\left(y_{\min} - \frac{H_y}{2}\right)\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$nx = 0$ または $ny = 0$ の時には, (5.28)式の $x$ に関する項と $y$ に関する項は, それぞれ極限を取ることによって以下のように求められる.

$$\lim_{B_{nx} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(B_{nx}\left(x_{\max} - \frac{H_x}{2}\right)\right)}{B_{nx}} - \frac{\sin\left(B_{nx}\left(x_{\min} - \frac{H_x}{2}\right)\right)}{B_{nx}} = x_{\max} - x_{\min} \quad (5.29)$$

$$\lim_{B_{ny} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(B_{ny}\left(y_{\max} - \frac{H_y}{2}\right)\right)}{B_{ny}} - \frac{\sin\left(B_{ny}\left(y_{\min} - \frac{H_y}{2}\right)\right)}{B_{ny}} = y_{\max} - y_{\min} \quad (5.30)$$

ノイズ項の分散は(5.31)式により評価する。

$$\begin{aligned} \sigma_{d_{nx,ny}}^2 &= \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger T \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger A \psi_n \rangle} \right)^2 E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right] \\ &\propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle + \langle \phi_n^\dagger S \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle} \right)^2 = \left( \frac{\frac{\nu \Sigma_f}{k_{nx,ny}} + \Sigma_s}{\frac{\nu \Sigma_f}{k_{nx,ny}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

(5.27)~(5.31)式で計算したパラメータを用いて、(3.69)式に示した統計誤差過小評価割合の理論式により予測値を計算した。

### 5.5.2 計算結果

予測値と参照値を比較したものを Fig. 5.18 に示す。予測値の計算では、高次モードはx方向とy方向それぞれ50次（全部で $50 \times 50 = 2500$ 次）まで考慮した。

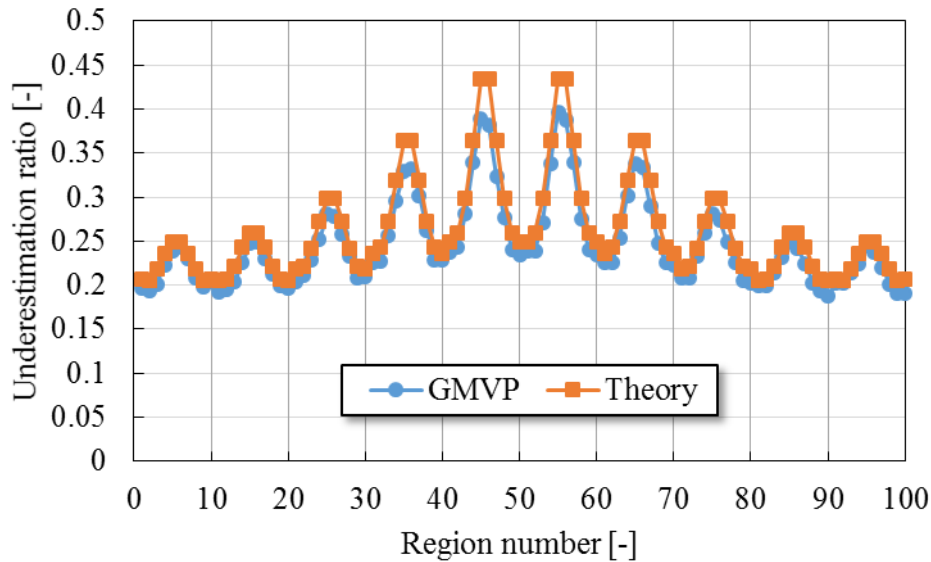


Fig. 5.18 統計誤差過小評価割合（エネルギー1群・2次元）

横軸の数字は Fig. 5.17 の領域番号に対応している。Fig. 5.18 のように、GMVP の結果をよく再現することができた。

### 5.5.3 考察

- ・統計誤差過小評価割合の位置依存性について

Fig. 5.18 より、統計誤差過小評価割合の空間分布は体系端で過小評価割合が小さく、体系中央で、過小評価割合が大きくなっている。これは1次元体系の結果と同様であり、領域積分値の次数依存性が支配的な要因である。これにより、空間分布の傾向は多次元体系であっても1次元の場合と同じであることが確認できた。今回は体系が均質な物質で構成されているため、1次元均質平板体系の結果をx方向とy方向で重ね合わせたような結果が得られたと考えられる。

- ・ノイズ項の分散が過小評価割合に与える影響について

本検証では、ノイズ項の分散の次数依存性は(5.31)式で考慮した。この時、ノイズ項の理論式中の $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}$ がホワイトノイズであり、次数に依存しないことを仮定している。Table 5.6 に示した断面積を(5.31)式に代入すると、全ての次数で1になる。この場合、ノイズ項の分散は $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)}$ の分散に等しく、これがホワイトノイズの場合には、ノイズ項の分散は次数依存性を持たないはずである。

ノイズ項の分散を調べるために、エネルギー1群・1次元無限平板の計算に特化したSlabMCを、2次元平板を計算できるように拡張したSlabMC2Dを使い、以下のようにノイズ項の分散を計算した。

中性子束を固有関数展開した際の展開係数は(5.32)式で求めることができる。

$$a_{nx,ny}^{(i)} = \frac{\langle \phi_{nx,ny}^{\dagger} \phi^{(i)} \rangle}{\langle \phi_{nx,ny}^{\dagger} \phi_{nx,ny} \rangle} \quad (5.32)$$

$\phi^{(i)}$  : i世代目の全中性子束

$\phi_{nx,ny}$  : (nx, ny)次モードの中性子束

$\phi_{nx,ny}^{\dagger}$  : (nx, ny)次モードの随伴中性子束

上式によって求めた各世代の展開係数からその分散 $\sigma_{a_{nx,ny}}^2$ を求め、下式によってノイズ項の分散 $\sigma_{d_{nx,ny}}^2$ を得る。

$$\sigma_{d_{nx,ny}}^2 = (1 - \rho_{nx,ny}^2) \sigma_{a_{nx,ny}}^2 \quad (5.33)$$

最初に、作成したSlabMC2DコードがGMVPの計算結果を再現できるか確認するため、それぞれで初期乱数を変えた1000回の計算結果を統計処理して統計誤差過小評価割合を算出した。その結果を比較したものをFig. 5.19に示す。

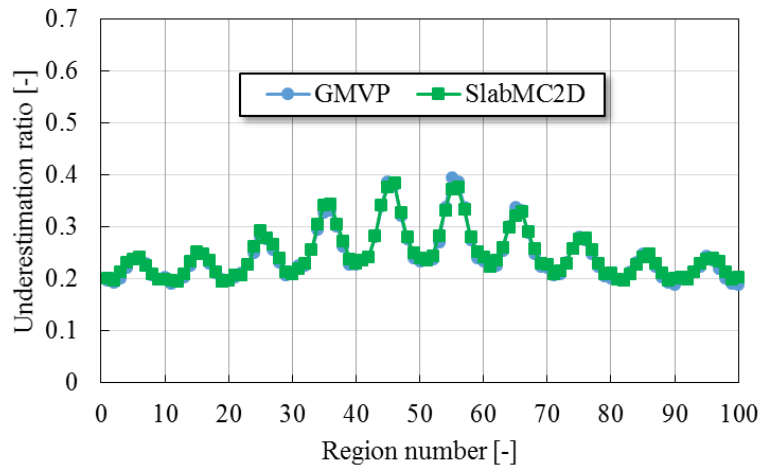


Fig. 5.19 SlabMC2D と GMVP の統計誤差過小評価割合

Fig. 5.19 より, 作成した SlabMC2D は GMVP と同様の計算を行っていることが確認できた. このことから, GMVP のノイズ項の分散を SlabMC2D で評価することは妥当であると判断した.

次に, SlabMC2D で計算したノイズ項の分散を Fig. 5.20 に示す.

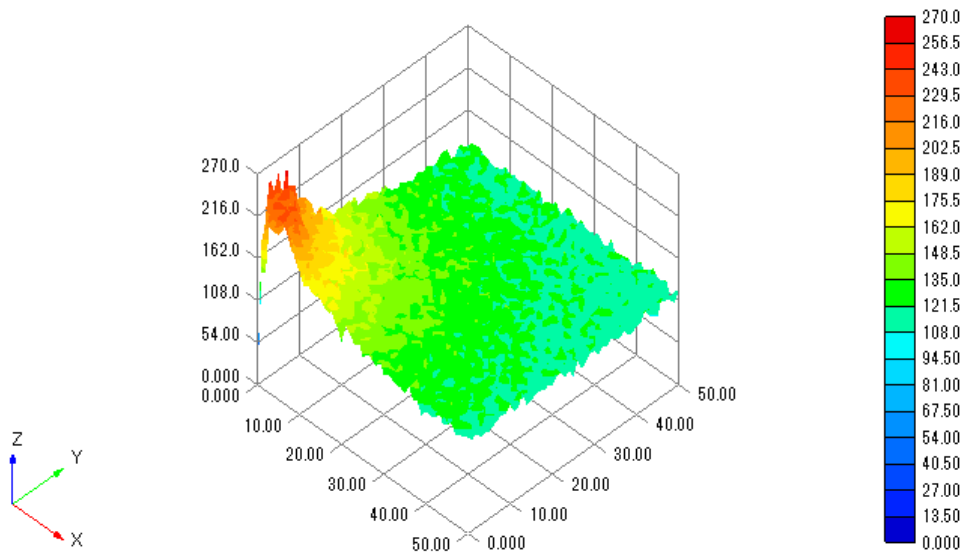


Fig. 5.20 ノイズ項の分散の次数依存性

$x$ 軸,  $y$ 軸はそれぞれ $x$ 軸方向の次数,  $y$ 軸方向の次数,  $z$ 軸はノイズ項の分散である. Fig. 5.20 を見ると, 2次元体系におけるノイズ項の分散は $x$ ,  $y$ 各方向に次数依存性を持つことが分かる. 先述したように, Fig. 5.20 に示したのは実質的には $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$ の分散である. このこと

から,  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$  はホワイトノイズではないことが分かる.

次に, 計算したノイズ項の分散を使って, 統計誤差過小評価割合を計算した. なお, 高次モードは 50 次まで考慮した. SlabMC2D の結果を用いた予測値と GMVP の結果を比較したものを Fig. 5.21 に示す.

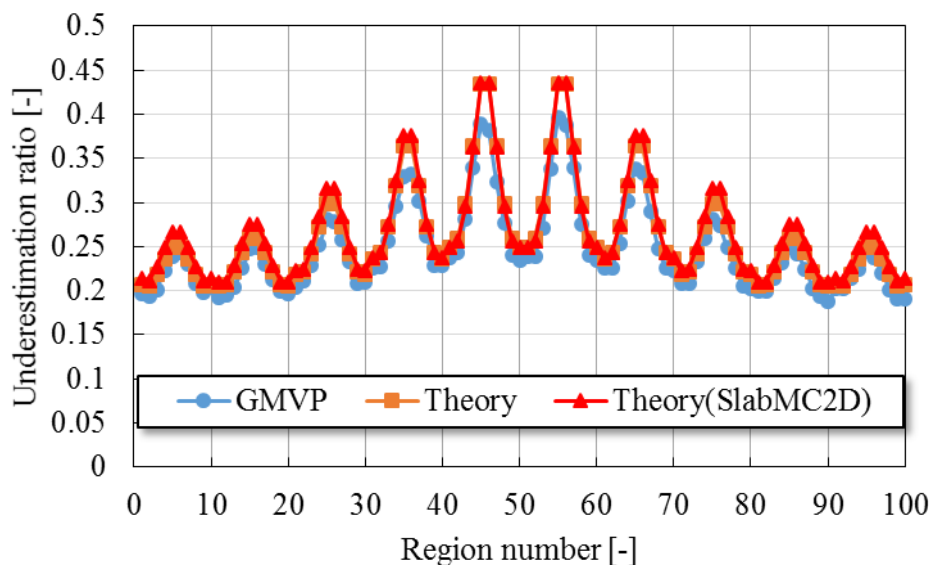


Fig. 5.21 統計誤差過小評価割合

SlabMC2D で計算したノイズ項の分散を利用した場合の過小評価割合は, 比例係数部分のみで次数依存性を考慮した場合の結果とほとんど変わらなかった. Fig. 5.20 では, ノイズ項の分散 ( $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$  の分散) は各方向におよそ 40 次程度で収束している. これを固有値に対応した順番に 1 次元的に並べた場合, およそ 1600 次程度までかけてゆっくりと収束していることになる. この場合, 次数依存性は弱く, ほぼフラットと見なすことができるだろう.  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$  の分散の次数依存性が過小評価割合に影響を与えなかったのはこのためである. ただし, 前章で述べたように, 世代間の相関が非常に強い (固有値比が 1 に近い) 体系の場合,  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$  の次数依存性は強まるので注意が必要である.

## 5.6 統計誤差過小評価割合の予測モデルの炉心体系への適用

本節では, 統計誤差過小評価割合の理論式をエネルギー多群・2次元非均質体系へ適用する. 実機炉心に近い体系で検証を行い, 非均質体系に本手法を適用することの妥当性について調べる.

### 5.6.1 C5G7 ベンチマーク問題

本検討では, C5G7 ベンチマーク問題[29] を参考に,  $\text{UO}_2$  燃料と MOX 燃料を組み合わせた  $2 \times 2$  集合体体系について, エネルギー積分した全中性子束の統計誤差過小評価割合を

計算する.  $\text{UO}_2$  燃料と MOX 燃料の集合体模式図を Fig. 5.22 に示す.

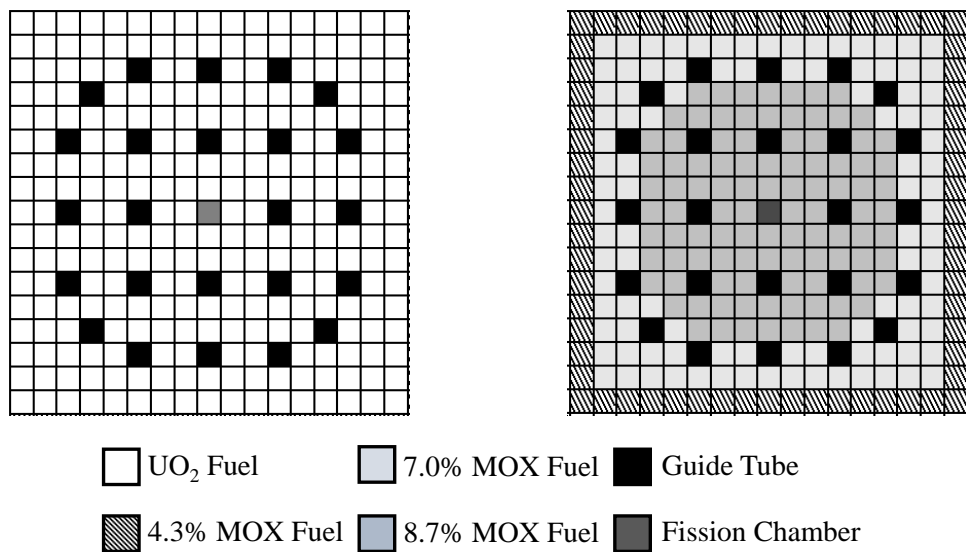


Fig. 5.22 集合体模式図 (左 :  $\text{UO}_2$  燃料, 右 : MOX 燃料)

集合体を構成する各セルの形状を Fig. 5.23 に示す.

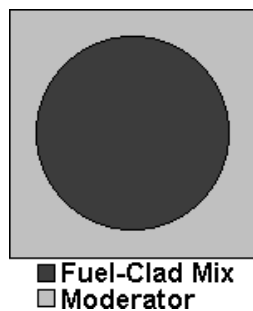


Fig. 5.23 燃料セルの模式図

燃料セルは1辺 1.26 cm の正方形であり, 内部に半径 0.54 cm の円がある. 円内部は燃料領域 (もしくは案内管) であり, 円外部は減速材領域 (水) である. 被覆管の厚さなどは考慮していない.

次に, 本検討で対象とする炉心の模式図を Fig. 5.24 に示す.



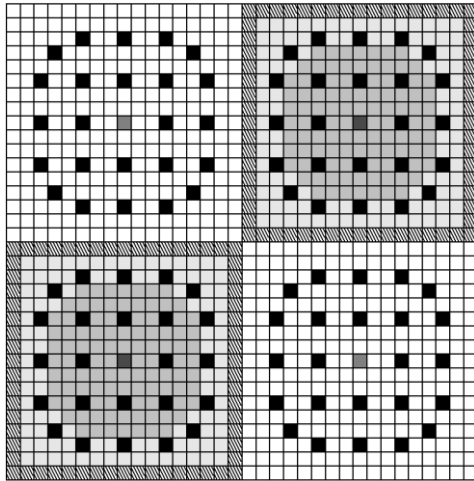


Fig. 5.24 UO<sub>2</sub>MOX2×2 集合体体系

全ての境界は完全反射条件である．参照値の計算条件を Table 5.8 に示す．

Table 5.8 計算条件

	計算条件
ヒストリー数	50000
有効バッチ数	500
領域数	34 × 34 = 1156
境界条件	完全反射
$W_{\text{kill}}$	0.2
$W_{\text{survive}}$	1.0

上記の条件で初期乱数を変えた 1000 回のモンテカルロ計算を GMVP を用いて実施し，その結果を統計処理することで統計誤差過小評価割合の参照値を得た．

予測値の計算に用いる断面積は，下式に従い各集合体ごとに空間均質化を行い，Fig. 5.25 に示す 4 領域それぞれの 7 群断面積を作成した．

$$\Sigma_{\text{homo}} = \frac{\langle \Sigma_{\text{hetero}}(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E) \rangle}{\langle \phi(\vec{r}, E) \rangle} \quad (5.34)$$

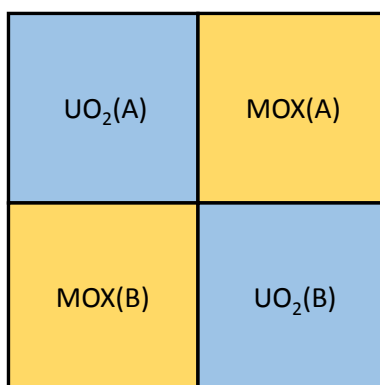


Fig. 5.25 UO<sub>2</sub>MOX2×2 集合体系（集合体ごとに空間均質化）

均質化断面積の作成には，Characteristics 法に基づいた 2 次元非均質輸送計算コード AEGIS[30] の結果を利用した．AEGIS の計算条件を Table 5.9 に示す．

Table 5.9 AEGIS の計算条件

方位角分点数	極角分点数	レイトレース方法	レイトレース幅
128	3	Material region Macroband	0.02 cm
$k_{eff}$ 収束条件	中性子束収束条件	角度中性子束収束条件	
1.0e-6	1.0e-5	1.0e-3	

作成した断面積を使い，高次モード計算コード Diffusion XY で高次モード固有値・固有関数を計算した．これにより，1156 次までの固有値・固有関数を得た．Fig. 5.24 に示す体系では，核分裂が発生するメッシュは，全体のメッシュから案内管のメッシュを除いた 1060 個あるが，Fig. 5.25 のように均質化した結果，案内管領域でも核分裂が発生するようになるため，全体のメッシュ数 1156 個に相当する 1156 次までの固有値・固有関数が計算される．また，ノイズ項の分散も，得られた固有値・固有関数を用いて下式により計算した．

$$\sigma_{d_n}^2 = \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger \Gamma \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \Delta \psi_n \rangle} \right)^2 E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right] \quad (5.35)$$

$$\propto \left( \frac{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle + \langle \phi_n^\dagger S \phi_n \rangle}{\langle \phi_n^\dagger \left( \frac{1}{k_n} F \right) \phi_n \rangle} \right)^2$$

こうして求めた固有値・固有関数，ノイズ項の分散を用いて，(3.69)式に従い統計誤差過小評価割合の予測値を計算した．

## 5.6.2 計算結果

参照値を Fig. 5.26 に，予測値を Fig. 5.27 に示す.

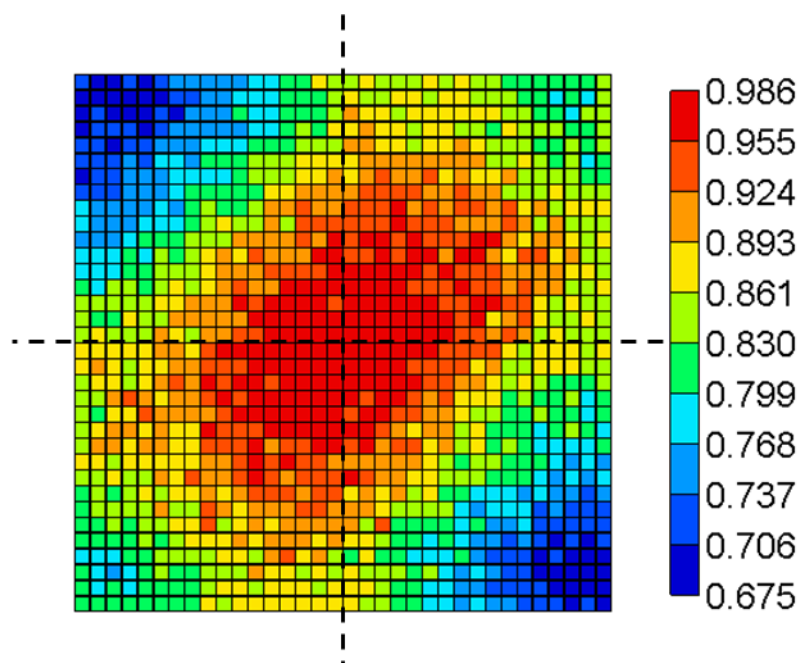


Fig. 5.26 統計誤差過小評価割合 (GMVP)

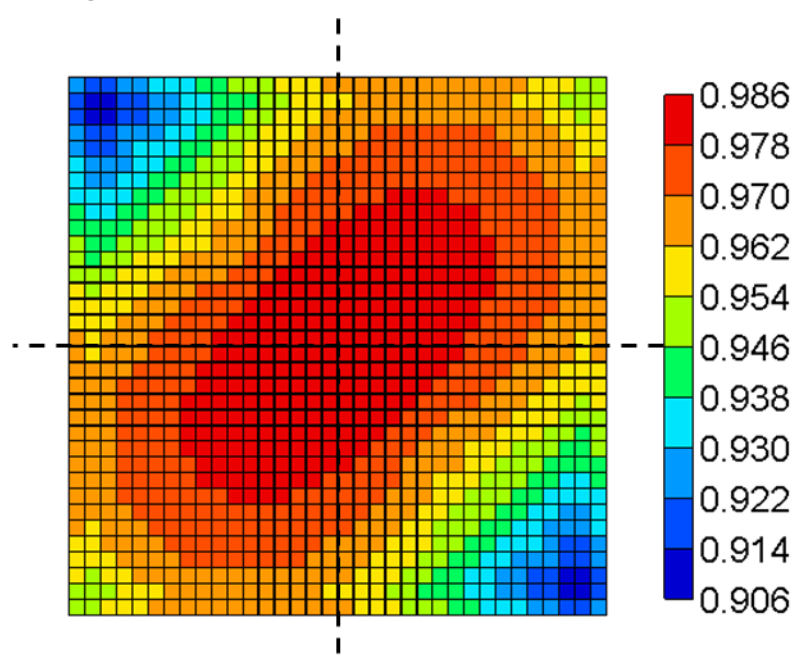


Fig. 5.27 統計誤差過小評価割合 (予測値)

Fig. 5.26 と Fig. 5.27 で凡例の範囲が異なることに注意されたい. 赤色は統計誤差過小評価割合が 1 に近い，すなわち，過小評価されていないことを示しており，青色は過小評価の効果が強く表れていることを示している. 予測値と参照値を比較すると，両者ともに体系中央で過小評価の効果は弱く，体系端で過小評価の効果が強く表れており，相対的な空間分布は

一致している。一方で、体系端の過小評価が強く起きている領域では、過小評価割合の値に 0.1~0.25 程度の差異が生じており、絶対値については正しく予測できていないことが分かった。

### 5.6.3 考察

- ・統計誤差過小評価割合の位置依存性について

Fig. 5.26 を見ると、統計誤差過小評価割合の空間分布は斜め右の対角線上に沿って歪んでいる。この原因は、体系の核分裂率分布を調べることで説明できる。高次モード計算コード Diffusion XY で計算した基本モードの核分裂率分布を Fig. 5.28 に示す。

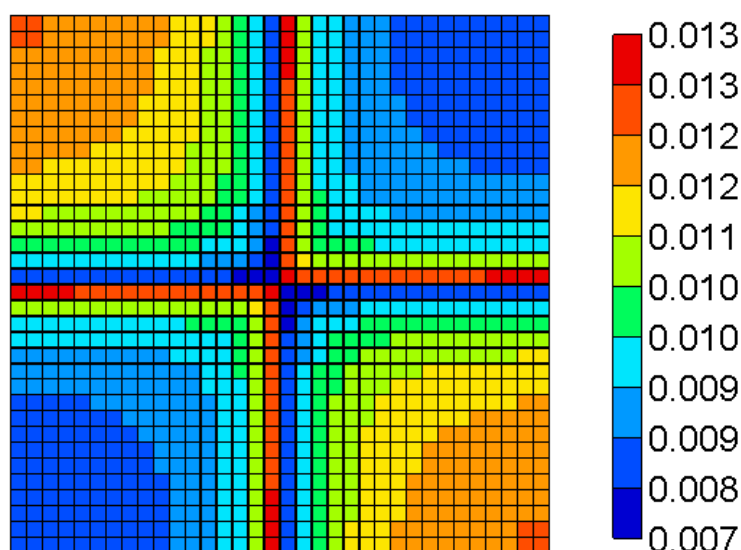


Fig. 5.28 核分裂率分布

核分裂反応は  $\text{UO}_2$  燃料の集合体において多く起こっていることが分かる。核分裂が多く発生する領域では、核分裂を介した世代間の相関が強くなる。このため  $\text{UO}_2$  燃料の集合体では統計誤差過小評価が強く起こり、過小評価割合は小さくなった。

- ・過小評価割合の絶対値の差異について

予測値と参照値の差異の絶対値を取った結果を Fig. 5.29 に示す。

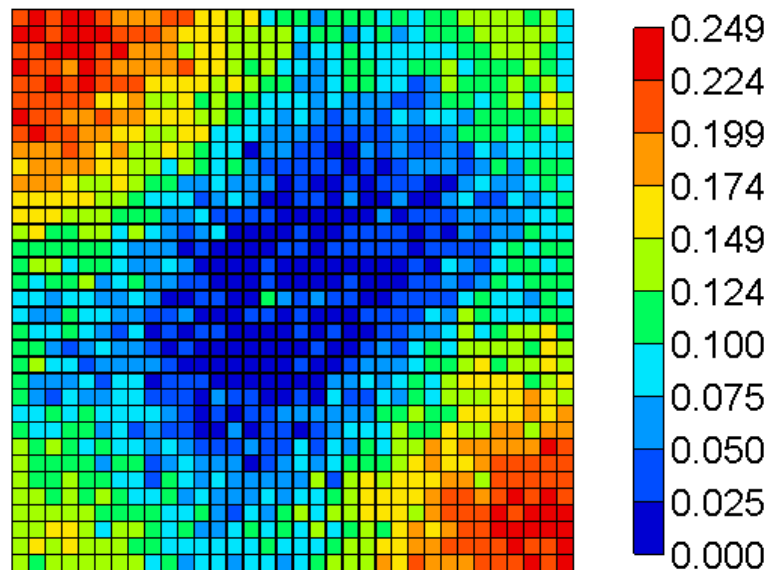


Fig. 5.29 予測値と参照値の差異

赤色は差異が大きいことを表しており、青色は差異が小さいことを表している。体系中央では予測値と参照値は良く一致しているが、体系端では0.1~0.25程度の差異が見られた。この原因としては、高次モード計算やノイズ項の分散の計算に使用した断面積を均質化したことによる影響や、(5.35)式における $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$ が次数に依存しないという仮定が成り立っていないこと、高次モード計算における拡散近似の影響などが考えられる。断面積均質化とノイズ項の分散の評価手法に起因する誤差の影響について、それぞれ検証を行った。拡散近似に起因する誤差の影響については未解明であるため、今後検討が必要である。

・断面積の空間均質化に起因する誤差の影響について

本検証では、Fig. 5.25 に示したように集合体ごとに断面積を均質化した。この時、均質化断面積は(5.34)式に示したように反応率が保存されるように作成した。しかし、この手法では中性子流の保存については考慮されていないため、均質化前と均質化後の体系では中性子の漏れ量が異なる。このため、均質化後の断面積を使用した計算結果には誤差が生じる。ここでは、この均質化誤差が統計誤差過小評価割合に与える影響について考察する。

高次モード計算コード Diffusion XY では長方形、または正方形の幾何形状しか取り扱うことができないため、Fig. 5.23 に示したような燃料ピンの形状を表現することができず、体系の非均質形状を忠実に模擬することはできない。よって、Diffusion XY コードで固有値・固有関数を計算する手法として次の2通りが考えられる。

①燃料ピンを正方形で近似する.

②燃料セルごとに断面積を空間均質化する.

①では, Fig. 5.23 に示した燃料セルを 9 領域に分割し, 中心の領域を燃料ピンとして扱うことで幾何形状を模擬する. しかし, この手法では体系全体のメッシュ数が 9 倍になるため, 計算メモリが不足し計算することができなかった. そこで, 今回は②の手法で固有値・固有関数を計算した.

②の手法では, 燃料セルごとに断面積を均質化する. 集合体ごとに均質化する場合に比べて体系の非均質性を模擬することができるため, 均質化誤差は低減される. そのため, 非均質性の異なる 2 種類の体系で計算した統計誤差過小評価割合の予測値を比較することで, 断面積均質化に伴う誤差の影響を評価することができる.

断面積の均質化は 5.6.1 節で述べた方法で行い, 1156 個の 7 群断面積セットを作成した.

この均質化断面積を用いて高次モード計算コード Diffusion XY で高次モード固有値・固有関数を計算した. これにより核分裂が発生するメッシュの数に相当する 1060 次までの固有値・固有関数を得た. また, ノイズ項の分散も, 得られた固有値・固有関数を用いて(5.35)式により計算した. こうして求めた固有値・固有関数, ノイズ項の分散を用いて, (3.69)式に従い統計誤差過小評価割合の予測値を計算した.

燃料セルごとに空間均質化した断面積を用いて予測値を計算した結果を Fig. 5.30 に示す.

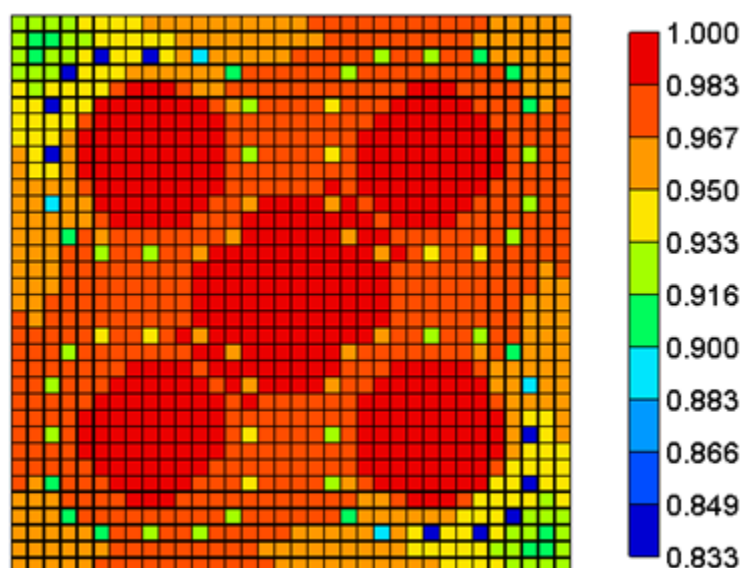


Fig. 5.30 統計誤差過小評価割合 (予測値: 燃料セルごとに均質化)

集合体ごとに均質化した断面積を使用した場合と異なり, 参照値の空間分布の傾向とは異なる傾向が見られた. 具体的には, 各集合体の中央部分で過小評価割合が大きくなり, 案内管の領域で局所的に過小評価割合が小さくなっている.

まず、各集合体の中央部分で過小評価割合が大きくなった原因について考察する。体系全体を俯瞰した時の過小評価割合の空間分布の傾向としては、参照値のように、中心部で過小評価割合が大きくなり、端の部分で小さくなる。この理由については 5.3.3 節で考察した。

それに対して、Fig. 5.30 では体系中心以外に各集合体の中心部で過小評価割合が 1 に近くなっている。この原因は高次モード中性子束の影響によるものである。各集合体の中心部の燃料セル (Fig. 5.31 の赤い部分) の中性子束の次数依存性を調べた。

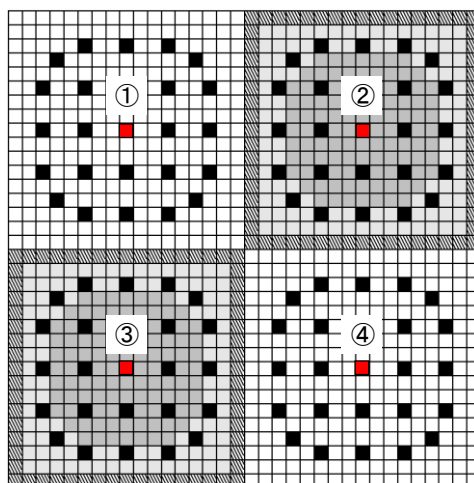


Fig. 5.31 UO<sub>2</sub>-MOX2x2 集合体体系

pin-by-pin で均質化した断面積を用いて高次モード計算をした時の  $w_{n,v}^2$  の次数依存性を Fig. 5.32 に示す。

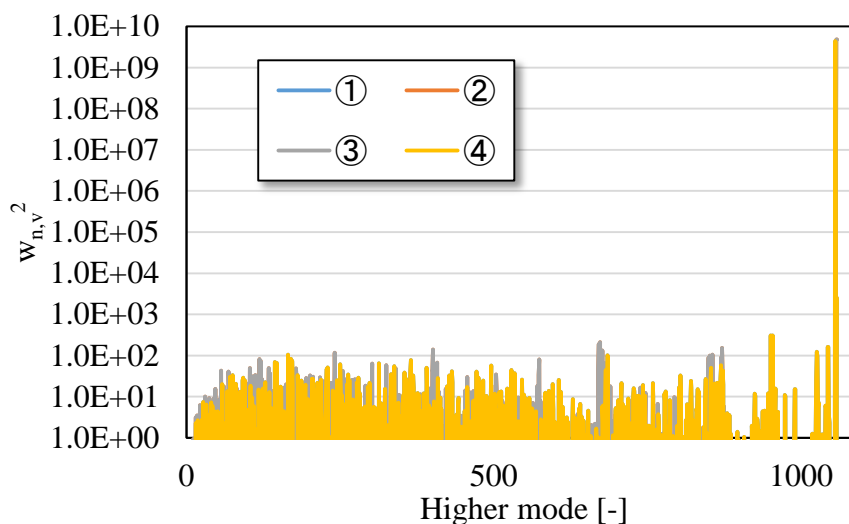


Fig. 5.32 各集合体中央の領域積分値の次数依存性

いずれの領域においても、1000 次以降のモードにおいて  $w_{n,v}^2$  が不自然に大きくなっていることが分かる。このため、5.3.3 節で考察したように、各集合体の中心部では高次の固有値比の影響が支配的になり、過小評価割合が 1 に近い値になったと考えられる。なお、①～

④の周囲の燃料セルについても調べたところ、同様の結果が得られた。次に 1050 次以降の高次のモードを拡大したグラフを Fig. 5.33 に示す。

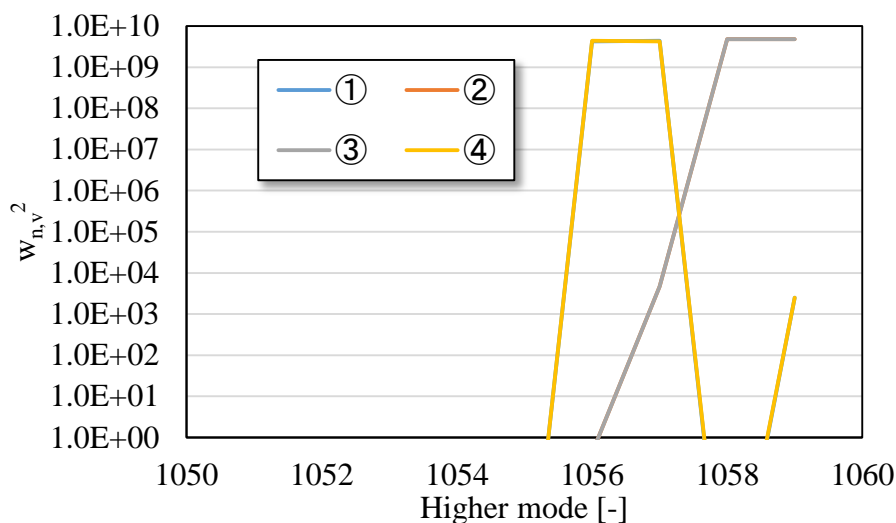


Fig. 5.33 各集合体中央の領域積分値の次数依存性（一部拡大）

詳しく見ると高次モード計算で得られた  $w_{n,v}^2$  は 1055 次以降のモードで不自然に大きな値を取っている。この原因は未解明であるが、Diffusion XY コードの数値計算誤差などが考えられる。そこで、1055 次以降のモードを除外して 1054 次までの高次モードを考慮して統計誤差過小評価割合を計算した。その結果を Fig. 5.34 に示す。

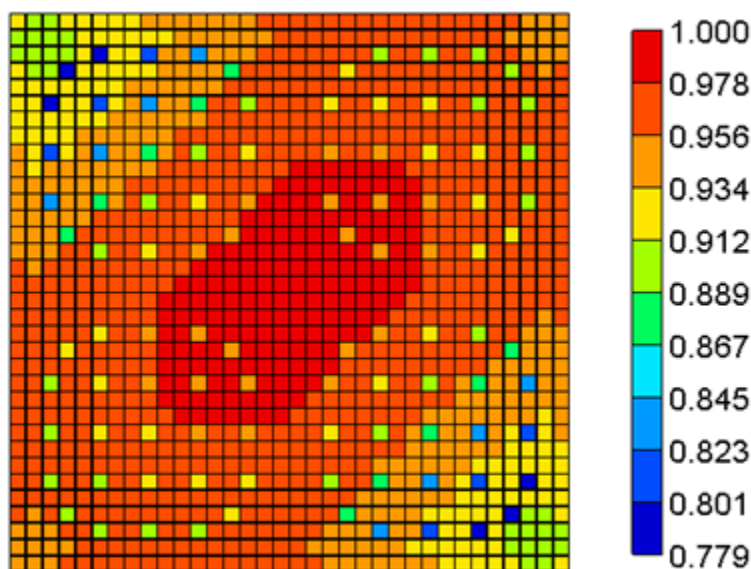


Fig. 5.34 統計誤差過小評価割合（1055 次モード以降を除外）

1055 次以降のモードを除外することで、案内管部分を除き参照値の空間分布を再現することができた。また、非均質性の取り扱いを変えても、集合体ごとに均質化した場合の結果



(Fig. 5.27) と比較して空間分布の傾向に大きな差異が生じなかったことから、断面積の均質化は過小評価割合の予測値と参照値の差異の原因ではないことが分かった。

しかし、依然として案内管部分では統計誤差過小評価割合が局所的に小さくなっている。この領域についても先程と同様に $w_{n,v}^2$ の次数依存性を調べた。Fig. 5.35 に赤色で示した領域①～④における $w_{n,v}^2$ の結果を Fig. 5.36 に示す。

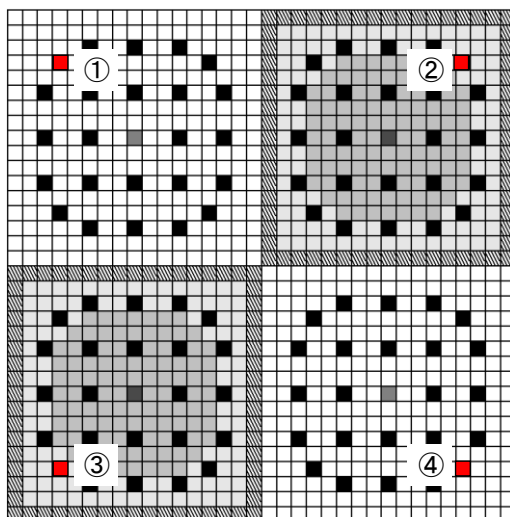


Fig. 5.35 UO<sub>2</sub>-MOX2x2 集合体体系

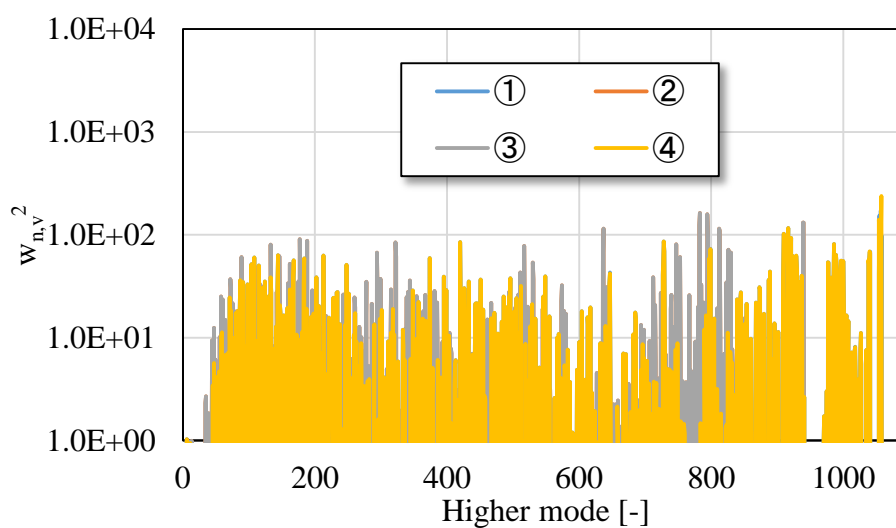


Fig. 5.36 案内管部分の領域積分値の次数依存性

Fig. 5.36 を見る限り、極端に大きな値を取る次数はなかった。よって、案内管領域で過小評価割合が小さくなる理由は、高次モードの $w_{n,v}^2$ の影響ではないことが分かった。この原因の解明は今後の課題となる。

- ・ノイズ項の分散の評価手法に起因する誤差の影響について

$E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性についての仮定の影響は、体系の固有値比を調べることで議論することができる。

高次モード計算コード Diffusion XY により計算した C5G7 ベンチマーク問題の体系の固有値比と、5.4 節のエネルギー2 群・1 次元平板体系の検討における case 2 の固有値比を比較した結果を Fig. 5.37 に示す。

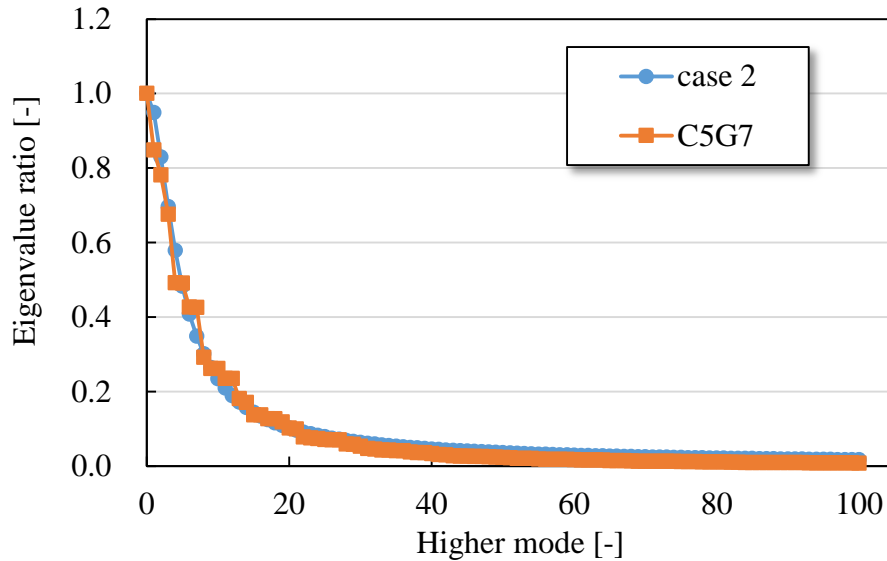


Fig. 5.37 固有値比の次数依存性

C5G7 ベンチマーク問題の固有値比は、エネルギー2 群の検討における case 2 の固有値比と類似した次数依存性を示している。このことから、両者の体系の世代間の相関の強さも同程度であると考えられる。次に、case 2 の場合のノイズ項の分散の参照値と予測値を比較した結果を Fig. 4.8 に示す。参照値は 4.4.1 節で述べた方法で算出し、予測値は(5.18)式により計算した。

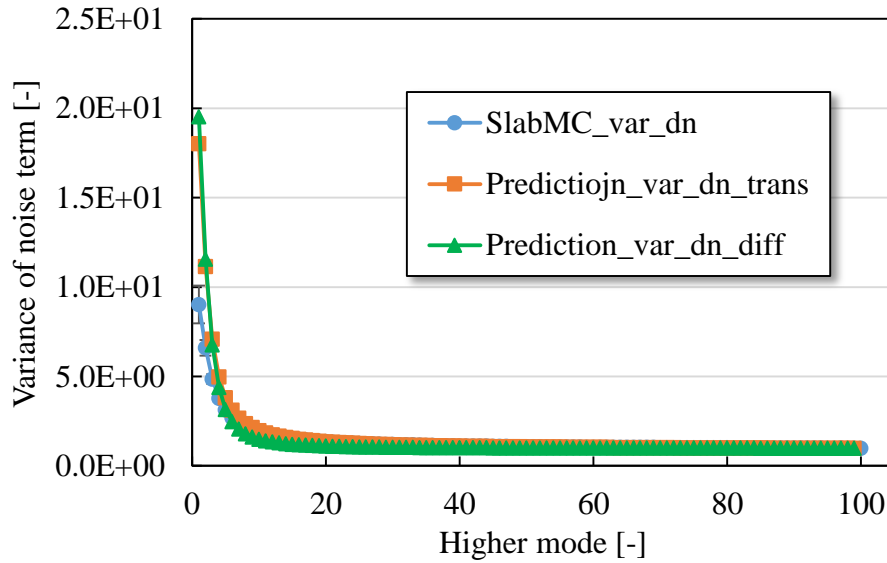


Fig. 5.38 case2 のノイズ項の分散の次数依存性

ノイズ項の分散の予測値と参照値は 1 次モードと 2 次モードを除き良く一致しており、case 2 の世代間の相関の強さにおいては、ノイズ項の分散の予測手法 ( $E \left[ \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \right)^2 \right]$  の次数依存性についての仮定) が適用できることが分かる。したがって、世代間の相関の強さが同程度である C5G7 ベンチマーク問題に対しても、この手法は適用できると考えられる。これを確かめるためにはノイズ項の理論式に依らずノイズ項の分散を評価する必要があり、それには、モンテカルロ計算における各世代の中性子束分布の情報が必要となる。この情報があれば、Diffusion XY で計算した高次モード固有値・固有関数を用いることで、下式により各世代の展開係数が計算できる。

$$a_n^{(i)} = \frac{\langle \phi_n^\dagger F \phi^{(i)} \rangle}{\langle \phi_n^\dagger F \phi_n \rangle} \quad (5.36)$$

ただし、Diffusion XY は拡散理論に基づいた計算コードであり、計算される固有値・固有関数には拡散近似や空間離散化による誤差が含まれているので注意が必要である。各世代の展開係数からその分散を求めれば、式によりノイズ項の分散を評価することができる。

$$\sigma_{dn}^2 = \sigma_{an}^2 (1 - \rho_n^2) \quad (5.37)$$

上記の方法でノイズ項の分散を評価するには、最初に述べたように各世代の中性子束分布の情報が必要となる。しかし、GMVP ではこの情報は出力されないため、GMVP のノイズ項の分散を計算することはできない。よって、その代替手段として各世代の中性子束分布を出力する別の計算コードを用いてノイズ項の分散の参照値を計算することが今後の課題となる。

## 5.7 本章のまとめ

本章では、統計誤差過小評価割合の理論式の妥当性について検証を行った。5.2 節では、統計誤差過小評価割合の参照値、およびその統計誤差を算出する手法について述べた。5.3 節では、最も簡単なエネルギー1群・1次元均質平板体系において、統計誤差過小評価割合の理論式を用いて計算した予測値とモンテカルロコードを使い算出した参照値を比較した。その結果、わずかな差異が見られるものの、予測値は参照値を概ね再現することができた。また、理論式で計算したノイズ項の分散の代わりに、モンテカルロ計算で得たノイズ項の分散を使用して統計誤差過小評価割合を計算することで、ノイズ項の分散を正確に考慮できるため、参照値を良く再現できることを示した。5.4 節では、エネルギー群を2群に拡張した場合について検証を行った。エネルギー1群の場合に比べ、予測値と参照値の差異は大きくなり、相関が大きい場合では過小評価割合の空間分布の傾向も異なっていた。こちらについても、ノイズ項の分散を正しく考慮することで予測値と参照値は概ね一致した。ただし、過小評価割合の予測値と参照値の差異には、ノイズ項の次数依存性以外の原因も影響していることが分かった。5.5 節では、体系を2次元に拡張した場合についての検証を行った。この場合でも、統計誤差過小評価割合の理論式は参照値を良く再現することができた。ノイズ項の分散について検証したところ、次数依存性は見られるものの、1600 次程度までかけてゆっくりと収束しているため、ノイズ項の分散の次数依存性はほぼないものと見なせることが分かった。5.6 節では、C5G7 ベンチマーク問題を参考にした  $\text{UO}_2\text{MOX}2 \times 2$  集合体体系において検証を行った。結果として、過小評価割合の予測値は参照値の相対的な空間分布を再現することができたが、体系端において 0.1~0.25 程度の差異が生じた。この原因として、高次モード計算やノイズ項の分散の計算に使用した断面積を均質化したことによる影響や、ノイズ項の分散の評価手法に起因する誤差の影響、高次モード計算における拡散近似の影響などが考えられる。断面積の均質化による誤差の影響については、非均質性をより忠実に取り扱った場合の結果と比較したところ、案内管部分を除き同じ傾向の結果が得られたことから、均質化誤差が過小評価割合の差異の主要因ではないことが分かった。ノイズ項の分散の評価手法に起因する誤差の影響については、体系の世代間の相関の強さ（固有値比）を調べたところ、世代間の相関は強くないため、第4章で述べたノイズ項の分散の評価手法は適用可能であり、誤差の主要因ではないことが分かった。他の原因として、高次モード計算における拡散近似の影響などが挙げられる。これについては今後検討が必要である。

## 第6章 結論

### 6.1 まとめ

原子炉の安全性評価は、数値シミュレーションを利用した炉心解析によって予測された特性を評価することで行われる。その計算手法として、近年ではモンテカルロ法が注目されており、大型体系の炉心解析にもモンテカルロ法を用いることが増えてきた。

炉心解析におけるモンテカルロ法は、乱数を用いて中性子の振る舞いを確率的に再現し、その挙動を追跡して物理量を評価する手法であり、計算結果には必ず統計誤差が付随する。既存のモンテカルロコードでは、統計誤差は各世代を無相関と仮定した中心極限定理により推定されることが多いため、追跡する中性子数の平方根に反比例して小さくなることが期待されている。しかし、大型の体系など、核分裂中性子源分布の収束が遅く世代間の相関が強くなるような体系では、世代間の相関を無視できなくなるため、無相関の中心極限定理によって計算される統計誤差が過小に評価される場合がある。モンテカルロ法は極力近似を排した計算が可能のため、様々な問題の参照解を計算するために用いられている。その参照解に付随する統計誤差が過小に評価されることは、計算結果の信頼性を担保するにあたり非常に重要な問題となる。

先行研究では、統計誤差過小評価割合の理論式を導出し、過小評価割合の予測に必要なとなるパラメータが解析的に計算できるような簡易な体系を対象として理論式の妥当性を検証した。加えて、本研究では過小評価割合の予測に必要なパラメータを計算する手法を開発し、解析解が得られないような複雑な問題に対しても理論式を適用し、過小評価割合の予測を行った。

各章のまとめと、得られた結論を以下に示す。

第2章では、固有値計算の概要と、それをモンテカルロ法で解く際に導入される“世代”の概念について説明し、核分裂中性子源を介して世代間に相関が生じることを述べた。また、アナログ法と非アナログ法における中性子のランダムウォークについて説明し、核分裂中性子源のサンプリング方法の違いが世代間の相関に影響を及ぼすことを説明した。さらに、モンテカルロ法において物理量を評価する手法であるエスティメータについて述べた。最後に、世代間の相関が統計誤差過小評価を引き起こすメカニズムについて、誤差伝播式に基づいて、無相関の中心極限定理では共分散項を無視しているために統計誤差が過小評価されることを説明した。

第3章では、モンテカルロ法で計算される統計量に対する統計誤差過小評価割合の理論式を導出した。先行研究で導出した理論式は核分裂中性子源分布の統計誤差過小評価割合についての理論式であったが、本研究では、これを一般的な局所タリー統計量を対象とするように拡張した。こうして導出した理論式で統計誤差過小評価割合を計算する場合、着目す

る統計量の領域積分値が必要となる。この領域積分値の計算には、着目する統計量に対応した反応率を適用しなければならない点に注意が必要である。

第4章では、統計誤差過小評価割合の予測値の計算に必要な高次モード固有値・旧関数、ノイズ項の分散の計算手法について述べた。固有値比、領域積分値の計算に必要な固有値・固有関数を、エネルギー2群・1次元無限平板体系において解析的に導出した。また、解析解が得られないような体系の固有値・固有関数を数値的に計算する Diffusion XY コードについて説明した。ノイズ項の分散については、ノイズ項を理論的に導出することでモンテカルロ計算を行うことなくノイズ項の分散を評価する手法を開発した。モンテカルロ計算における統計的なノイズは、中性子が原子核と衝突する度に生じるというモデルを提案し、これを基にノイズ項を理論的に導出した。また、導出した理論式に対して、中性子が原子核と衝突する時に発生するノイズ成分がホワイトノイズであり、その分散が展開次数に依存しないという仮定を置くことで、ノイズ項の分散を近似的に評価することができる。提案したノイズ項の分散の評価手法について検証計算を行った。この検証計算では体系の断面積を変えることで世代間の相関の強さを変化させた。その結果、世代間の相関が強い場合を除き、導出した理論式によりノイズ項の分散を評価することが可能であることが分かった。しかし、世代間の相関が強い（体系の固有値比が1に近い）場合は低次のモードでノイズ項の分散が小さくなる傾向が見られ、これは今回導出したノイズ項の理論式では説明できない傾向であった。

第5章では、第4章で示した手法で計算した各パラメータを用いて統計誤差過小評価割合の理論式の妥当性について検証を行った。最も簡単なエネルギー1群・1次元均質平板体系では、解析的に求めた固有値・固有関数を用いて固有値比、領域積分値、ノイズ項の分散を計算し、統計誤差過小評価割合の理論式を用いて予測値を求めた。モンテカルロコードを使い算出した参照値と比較した結果、わずかな差異は見られるものの予測値は参照値を概ね再現することができた。また、理論式で計算したノイズ項の分散の代わりに、モンテカルロ計算で得たノイズ項の分散を使用して統計誤差過小評価割合を計算することで、ノイズ項の分散を正確に考慮できるため、参照値を良く再現できることを示した。エネルギー群を2群に拡張した検証では、エネルギー1群の場合に比べ、予測値と参照値の差異は大きくなり、相関が大きい場合では過小評価割合の空間分布の傾向も異なっていた。こちらについても、理論式で計算したノイズ項の分散の代わりに、モンテカルロ計算で得たノイズ項の分散を使用して統計誤差過小評価割合を計算することで予測値と参照値の差異は小さくなった。しかし、その場合であっても過小評価割合の予測値と参照値には差異が残っており、ノイズ項の次数依存性以外の原因も影響していることが分かった。この原因の解明が今後の課題となる。次に、体系をエネルギー1群・2次元均質体系に拡張した場合についての検証を行った。この場合でも、統計誤差過小評価割合の理論式は参照値を良く再現することができた。ノイズ項の分散について検証したところ、次数依存性は見られるものの、1600次程度までかけてゆっくりと収束しているため、ノイズ項の分散の次数依存性はほぼないものと見な

せることが分かった。そのため、このケースにおいてはノイズ項の分散の次数依存性を考慮しなくとも統計誤差過小評価割合を予測できることが分かった。最後に、C5G7 ベンチマーク問題を参考にした  $\text{UO}_2\text{MOX}2\times 2$  集合体体系において検証を行った。結果として、非均質な体系においては過小評価割合の予測値は参照値の相対的な空間分布を再現することができたが、体系端において 0.1~0.25 程度の差異が生じた。この原因としては、過小評価割合の予測値を計算するために必要なパラメータ（固有値、固有関数、ノイズ項の分散）に含まれる誤差が原因と考えられる。固有値・固有関数の計算では、体系の断面積を集合体ごとに空間均質化した際の均質化誤差や、拡散近似に起因する誤差が考えられる。断面積の均質化による誤差の影響については、非均質性をより忠実に取り扱った場合の結果と比較したところ、案内管部分を除き同じ傾向の結果が得られたことから、均質化誤差が過小評価割合の差異の主要因ではないことが分かった。ノイズ項の分散の計算では、ノイズ項の理論式中の  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m,n}^{(i+1,j)}$  の分散が次数に依らず一定であるという仮定してノイズ項の分散を評価することに起因する誤差が考えられる。そこで、ノイズ項の分散の評価手法に起因する誤差について検討を行った。体系の世代間の相関の強さ（固有値比）を調べた結果、C5G7 ベンチマーク問題の体系の世代間の相関は強くはないため、ノイズ項の分散の評価手法を適用できることが分かった。このため、統計誤差過小評価割合の誤差の原因は拡散近似に起因する誤差であると考えられる。本検証により、提案手法は非均質体系において統計誤差過小評価割合の相対的な空間分布（どの領域で統計誤差過小評価が起きやすいのか）を予測できることが示された。しかし、絶対値の再現はできていないため、誤差の原因を解明する必要がある。

## 6.2 今後の課題

今後の課題として、以下の点が挙げられる。

- 中性子の衝突時に発生する統計的ノイズの次数依存性

第 4 章で導出したノイズ項の理論式により、ノイズ項は次数に対して依存性を持つことが理論的に示された。また、本研究では、理論式中に登場する「中性子の衝突時に発生する統計的なノイズ」が次数に依存せず一定と仮定することで、実際のモンテカルロ計算を行わずにノイズ項の分散を予測する手法を開発した。しかし、検証計算の結果、「中性子の衝突時に発生する統計的なノイズ」が次数に依存せず一定であるという仮定は、世代間の相関が弱い（固有値比が小さい）場合でしか成り立たないことが判明した。このため、「中性子の衝突時に発生する統計的なノイズ」が次数依存性を持つ原因を理論的に解明し、正確にノイズ項の分散を予測できるようにすることが望ましい。また、本研究で使用した多群モンテカルロコード GMVP は、世代ごとの中性子束の情報を出力しないため、ノイズ項の分散を算出することができない。このため、GMVP のノイズ項の分散とノイズ項の理論式による予測値との比較はできていない。解析解が得られないような複雑な体系に置いてもノイズ項の分散の参照値を得るために、世代ごとの中性子束の情報を出力するような別の計算コードを用いて検討を行うことも今後の課題となるだろう。

- 体系の非均質性が統計誤差過小評価割合に与える影響

本研究では、エネルギー2群・1次元体系でエネルギーを多群化することの影響について、エネルギー1群・2次元体系で多次元化の影響について検証を行った。しかし、非均質体系については検証を行っておらず、体系の非均質性がノイズ項の分散や統計誤差過小評価割合にどのような影響を及ぼすのかについては未解明である。非均質体系における検証では、提案手法により過小評価割合の相対的な空間分布は再現できたが、特に過小評価の効果が強い体系端での絶対値に差異が生じた。この一因として、体系の非均質性が影響している可能性があるため、非均質性の影響について検討が必要である。

- 固有値・固有関数の計算手法が統計誤差過小評価割合に与える影響

本研究では、解析解を求められないような複雑な体系に対しては、Diffusion XY コードを用いて高次モード固有値・固有関数を計算した。しかし、Diffusion XY は拡散理論に基づいた計算コードであり、その計算結果には拡散近似に起因する誤差が含まれている。第5章で非均質体系に統計誤差過小評価割合の理論式を適用した結果、体系端で予測値と参照値に差異が生じた。この原因の一つとして、固有値・固有関数に含まれる誤差が考えられる。そのため、拡散近似が統計誤差過小評価割合に与える影響について検証を行う必要がある。なお、エネルギー1群・1次元均質平板体系については過去に検証を行い、拡散近似が固有値比の次数依存性に影響を与え、結果として統計誤差過小評価割合に誤差が生じることを突き止めた。また、エネルギー1群においては、固有関数は輸送理論でも拡散理論でも同じ結果になるため、統計誤差過小評価割合の誤差要因ではないことも判明した。しかし、エネルギー多群の場合は輸送理論と拡散理論で固有関数の結果に差異が生じる。固有関数の差異が統計誤差過小評価割合に与える影響については検討が行われていないため、今後の課題となる。



## 参考文献

- [1] F. B. Brown, "A Review of Monte Carlo Criticality Calculations – Convergence, Bias, Statistics", *Proc. M&C 2009*, NY, US, May, 3-7, 2009 (2009).
- [2] H. J. Shim, C. H. Kim, "Elimination of Variance Bias in Monte Carlo Eigenvalue Calculations," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **97**, pp. 653-655 (2007).
- [3] A. Yamamoto, R. Nakamura, "Examination of Pin-by-pin Fission Rate Distribution in Large Geometry Evaluated by the Monte Carlo Method," *Ann. Nucl. Energy*, **36**, p. 1726 (2009).
- [4] M. J. Lee, et al., "Multigroup Monte Carlo Eigenvalue Calculation with Coarse Mesh Finite Difference Formulation for Real Variance Reduction," *Proc. J. Int. Conf. on Supercomputing in Nuclear Applications and Monte Carlo 2010*, Tokyo, Japan, Oct. 17–21, 2010 (2010).
- [5] A. Yamamoto, K. Sakata, T. Endo, "Prediction on Underestimation of Variance for Fission Rate Distribution in Monte-Carlo Calculation," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **110**, p. 515 (2014).
- [6] T. Endo, A. Yamamoto, K. Sakata, "Theoretical Prediction on Underestimation of Statistical Uncertainty for Fission Rate Tally in Monte Carlo Calculation," *Proc. Physor2014*, Kyoto, Japan, Sep 28-Oct 3, 2014, (2014). (CD-ROM).
- [7] 長家康展, -粒子輸送モンテカルロ計算の基礎原理とそこに潜む不確かさ- 第44回炉物理夏期セミナーテキスト, pp. 65-99, 日本原子力学会 (2012).
- [8] Y. NAGAYA, K. OKUMURA, T. MORI, et al., "MVP/GMVP II: General Purpose Monte Carlo Codes for Neutron and Photon Transport Calculations Based on Continuous Energy and Multigroup Methods," 1348, JAERI (2005).
- [9] 山本俊弘, -Boltzmann 方程式の解法-確率論的手法による解法- 第34回炉物理夏期セミナーテキスト, pp. 79-91, 日本原子力学会 (2002).
- [10] T. Ueki, F. B. Brown, "Stationarity Diagnostics Using Shannon Entropy in Monte Carlo Criticality Calculation I:F Test," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **87**, p. 156 (2002).
- [11] T. Ueki, F. B. Brown, "Stationarity Modelling and Informatics-based Diagnostics in Monte Carlo Criticality Calculations," *Nucl. Sci. Eng.*, **149**, pp. 38-50, (2005).
- [12] E. Dumonteil, et al., "Source Convergence Diagnostics Using Boltzmann Entropy Criterion Application to Different OECD/NEA Criticality Benchmark with the 3-D Monte Carlo Code Tripoli-4," *Proc. PHYSOR-2006*, Vancouver, Canada, Sep. 10-14, 2006, ISBN 0-89448-697-7 (2006). [CD-ROM].
- [13] 坂田 光太郎, "高次モード展開によるモンテカルロ計算の統計誤差評価に関する検討," 修士論文, 名古屋大学 (2014).
- [14] T. Ueki, T. Mori, M. Nakagawa, "Error Estimations and Their Biases in Monte Carlo Eigenvalue Calculations," *Nucl. Sci. Eng.*, **125**, 1 (1997).
- [15] 植木 太郎, "直交規格化加重に基づく標準化時系列法による統計誤差評価," 日本原子

- 力学会 2016 秋の大会, 久留米, 福岡, 9 月 7-9 日 (2016).
- [16] H. J. Shim, S. H. Choi, "History-Based Batch Method Preserving Tally Means," *Transactions of the Korean Nuclear Society Autumn Meeting*, Gyeongju, Korea, October, 25-26, (2012).
- [17] F. Brown, "Wielandt Acceleration for MCNP5 Monte Carlo Eigenvalue Calculations," *Proc. M&C 2007*, California, US, April, 15-19, 2007 (2007). (CD-ROM).
- [18] T. M. Sutton, "Application of a Discretized Phase Space Approach to The Analysis of Monte Carlo Uncertainties," *Proc. ANS MC2015*, Nashville TN, US, Apr 19-23, 2015, (2015). [CD-ROM].
- [19] 林 幸司, "炉心解析におけるモンテカルロ法の統計誤差過小評価に関する研究," 卒業論文, 名古屋大学 (2015).
- [20] K. Hayashi, T. Endo, A. Yamamoto, "Underestimation of Statistical Uncertainty of Monte Carlo Method with Non-Analog of Fission Source Sampling," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **113**, pp. 1153-1157 (2015).
- [21] 大久保 卓哉, "GPU を用いたモンテカルロ計算の高速化に関する研究," 修士論文, 名古屋大学 (2016).
- [22] 刈屋 武昭, 矢島 美寛, 田中 勝人, 竹内 啓, *経済時系列の統計-その数理的基礎*, 岩波書店, SBN 4-00-006848-2 (2004).
- [23] P. J. BROCKWELL, R. A. DEVIS, *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd Ed., Springer-Verlag Inc., NY (2002).
- [24] 遠藤 知弘, 林 幸司, 山本 章夫, "2 次元非均質体系におけるモンテカルロ法の統計誤差過小評価の予測-(1) 高次モード計算コードの開発-," 日本原子力学会 2016 秋の大会, 久留米, 福岡, 9 月 7-9 日 (2016).
- [25] 山本 章夫, -*拡散方程式の数値解法の基礎*- 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, pp. 47-102, 日本原子力学会 (2004).
- [26] "Eigen," <http://eigen.tuxfamily.org/> (2016/12 アクセス)
- [27] [https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen\\_1\\_1EigenSolver.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen_1_1EigenSolver.html) (2017/1 アクセス).
- [28] D. D. Dorfman, K. S. Berbaum, C.E. Metz, "Receiver operating characteristic rating analysis: Generalization to the population of readers and patients with the jackknife method," *Invest. Radiol.*, **27**, pp, 723-731 (1992).
- [29] Nuclear Energy Agency Organisation for Economic Co-operation and Development, "Benchmark on Deterministic Transport Calculations Without Spatial Homogenisation," ISBN 92-64-02139-6, (2003).
- [30] A. Yamamoto, T. Endo, M. Tabuchi, *et al.*, "AEGIS: an advanced lattice physics code for light water reactor analyses," *Nucl. Eng. Technol.*, **42**[5]pp.500-519 (2010).
- [31] T. Ueki, "Standard Deviation of Local Tallies in Global Monte Carlo fission sources: II. Confidence interval estimation," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **47**, pp. 739-753 (2010).

[32] 平岡 和幸, 堀 玄, *プログラミングのための線形代数*, オーム社, 東京, ISBN 4-274-06578-2 (2004).

## Appendix. A 断面積が統計誤差過小評価に与える影響

### A.1 計算条件

統計誤差過小評価割合の理論式を下式に示す.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E[S_{\bar{R}_v}(l)]}{\sigma_{\bar{R}_v}} = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{d_n}^2}{1 - \rho_n^2}}{\sum_n \frac{w_{n,v}^2 \sigma_{d_n}^2}{1 - \rho_n^2} \left( \frac{1 + \rho_n}{1 - \rho_n} \right)}} \quad (\text{A.1})$$

$$\rho_n \equiv \frac{k_n}{k_0} \quad (\text{A.2})$$

$$w_{n,v} \equiv \int_v \mathbf{R} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{R} \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \Sigma_x(\vec{r}, E) \quad (\text{A.4})$$

エネルギー 1 群の 1 次元無限平板体系について考える. この時, 固有値比  $\rho_n$  は輸送理論に従って導出すると (A.5) 式のようになる.

$$\rho_n = \frac{\Sigma_a}{\frac{B_n}{\arctan(B_n/\Sigma_s)} - \Sigma_s} \quad (\text{A.5})$$

また, ノイズ項  $d_n$  の理論式は (A.6) 式で表せ, その分散は (A.7) 式のようになる.

$$d_n^{(i+1)} = \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_n^{(i+1,j)} \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{d_n}^2 \propto \left( \frac{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{T} \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \mathbf{A} \psi_n \rangle} \right)^2 \quad (\text{A.7})$$

(A.1)(A.5), (A.7) 式より, 統計誤差過小評価割合は断面積の値によって変化することが予想される. そこで, 断面積を変えた場合でも (A.1) 式によって統計誤差過小評価割合を予測することができるか検証を行った. 検証には GMVP を使った.

計算条件は Table A.1 の通りである.

Table A.1 GMVP 計算条件

	計算条件
体系	1次元無限平板
エネルギー群	1群
ヒストリー数	1000
有効バッチ数	1000
領域数	10
WKIL	0.6
WSRV	1.0
境界条件	両面完全反射

また、断面積は以下の6通りについて検討した。

Table A.2 断面積データ

	$\Sigma t$	$\Sigma a$	$v\Sigma f$	$\Sigma s$
Case 1	1.0	0.2	0.48	0.8
Case 2	1.0	0.8	0.48	0.2
Case 3	1.0	1.0	0.48	0.0
Case 4	1.0	0.4	0.96	0.6
Case 5	1.0	0.4	0.72	0.6
Case 6	1.0	0.4	0.24	0.6

Case 1~Case 3 は生成断面積と全断面積を一定とし、吸収断面積と散乱断面積を変えた。また、Case 4~Case 6 では全断面積、吸収断面積、散乱断面積を一定とし、生成断面積を変えた。

## A.2 計算結果

まず、それぞれの Case の統計誤差過小評価割合を比較したものを Fig. A.1, Fig. A.2 に示す。

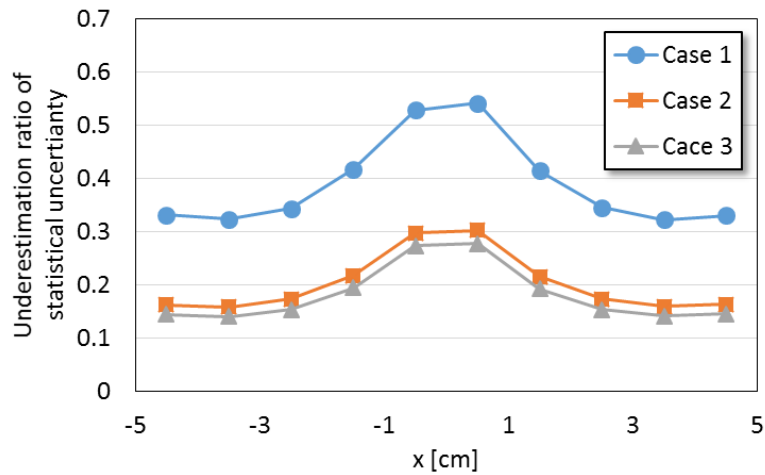


Fig. A.1 統計誤差過小評価割合 (Case 1~Case 3)

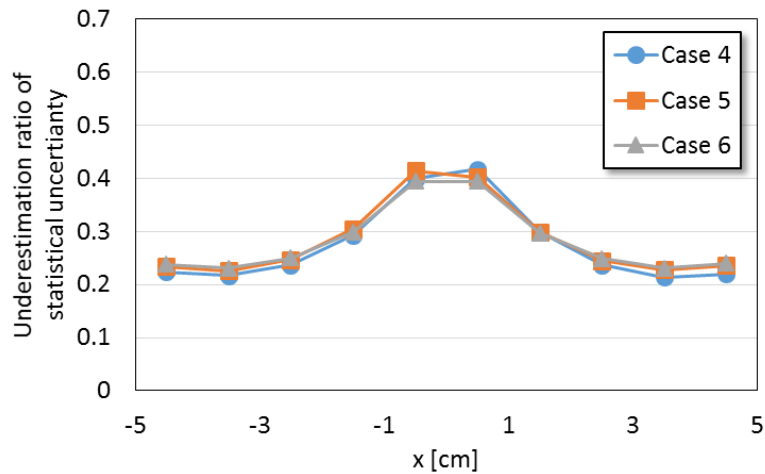


Fig. A.2 統計誤差過小評価割合 (Case 4~Case 6)

Fig. A.1, Fig. A.2 より, 散乱断面積を変化させた場合 (Case 1~Case 3) に統計誤差過小評価割合が変化していることが分かる. 一方で, 生成断面積を変えた場合 (Case 4~Case 6) は統計誤差過小評価割合に変化はなかった.

### A.3 考察

Case 1~Case 3 では, 散乱断面積が小さくなるほど統計誤差過小評価割合が小さくなった. (過小評価の効果が強く表れた.) このことは, 断面積による固有値比の振る舞いを見ることで説明できる. Fig. A.3 に(A.5)式から計算した各 Case の固有値比を示す.

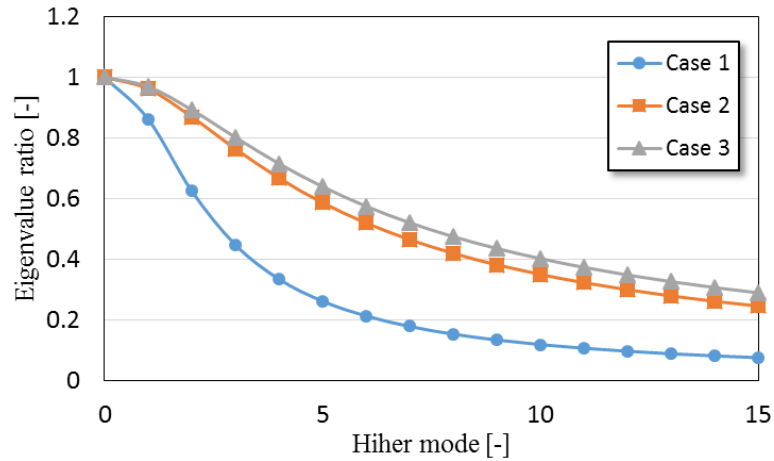
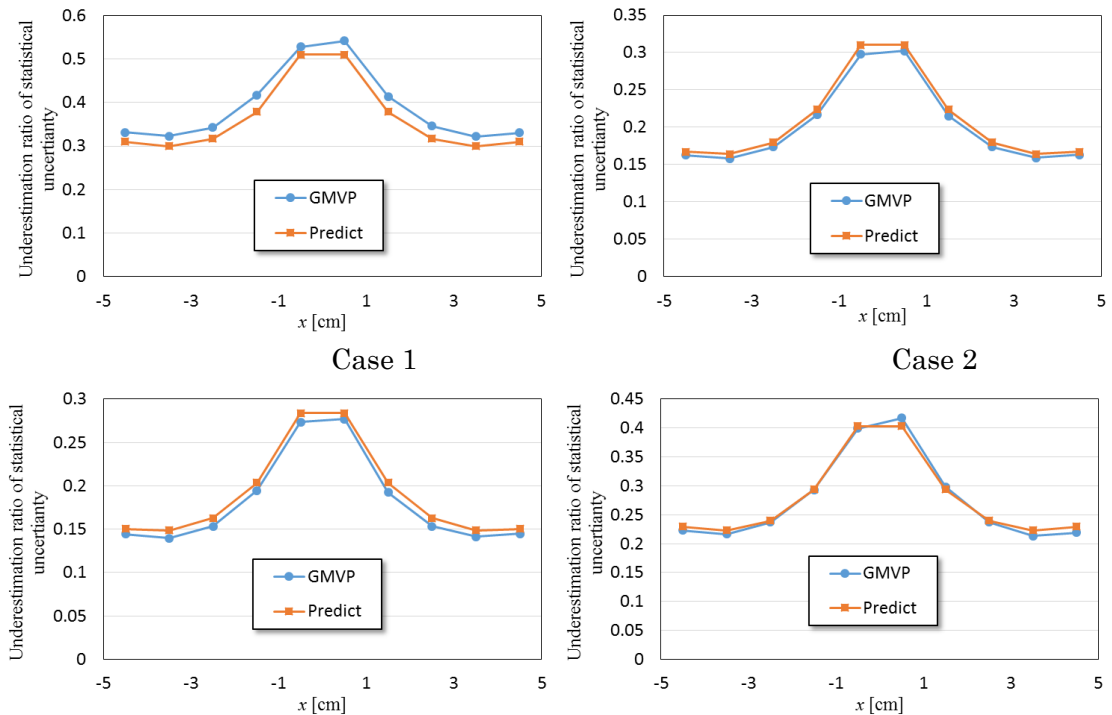


Fig. A.3 固有値比と断面積の関係

散乱断面積が小さくなると、固有値比の減衰が緩やかになり、高次の固有値比も比較的大きな値となっている。固有値比は世代間の相関を表すパラメータでもあるため、高次モードの固有値比が大きくなると、世代間の相関がより強くなる。そのため、Fig. A.1 のように散乱断面積が小さくなるほど統計誤差過小評価割合が小さくなった。

次に、GMVP の結果を(A.1)式を使って再現できるか検証した。式中の $w_{n,i}$ 、 $\rho_n$ は輸送理論により解析的に求めた。また $\sigma_{dn}^2$ については、(A.6)式中の $\delta_n^{(i+1,j)}$ がホワイトノイズであると仮定し、(A.7)式を用いて $\sigma_{dn}^2$ の次数依存性を考慮した。GMVP と予測値を比較した図をFig. A.4 に示す。



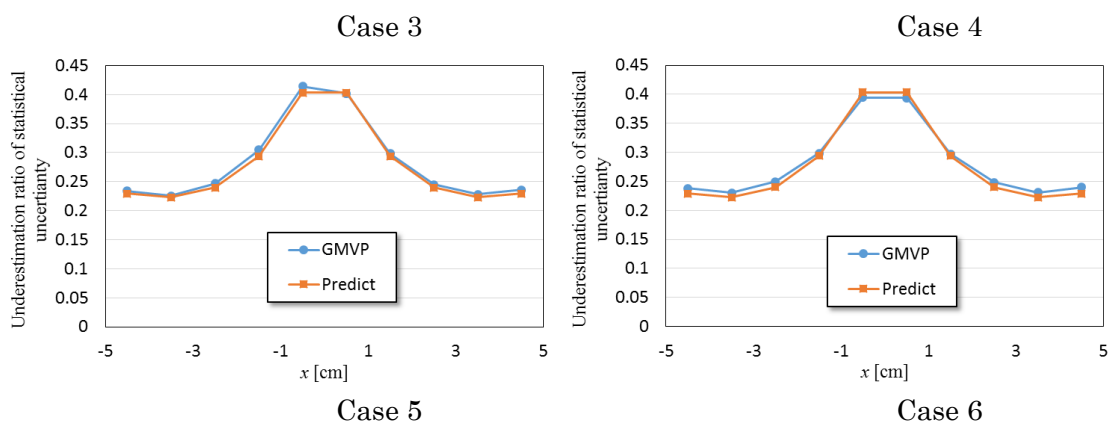


Fig. A.4 統計誤差過小評価割合の予測値

断面積を変えた場合でも、統計誤差過小評価割合の理論式は概ね GMVP の結果を再現することができた。ただし、Case 1 では最大で 4%弱の差が生じた。



## 公刊論文リスト

- [1] 林 幸司, 遠藤 知弘, 山本 章夫, “モンテカルロ法による固有値計算における中性子束の統計誤差過小評価に関する検討,” 日本原子力学会 2015 秋の大会, 静岡市, 静岡, 9 月 7-9 日 (2015).
- [2] K. Hayashi, T. Endo, A. Yamamoto, “Underestimation of Statistical Uncertainty of Monte Carlo Method with Non-Analog of Fission Source Sampling,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **113**, pp. 1153-1157 (2015).
- [3] 林 幸司, 遠藤 知弘, 山本 章夫, “2 次元非均質体系におけるモンテカルロ法の統計誤差過小評価の予測-(2) -UO<sub>2</sub>-MOX 2×2 集合体体系への適用-,” 日本原子力学会 2016 秋の大会, 久留米市, 福岡, 9 月 7-9 日 (2016).
- [4] K. Hayashi, T. Endo, A. Yamamoto, “Prediction on Underestimation of Statistical Uncertainty in Monte Carlo Eigenvalue Calculation for Two-dimensional Heterogeneous Color Set Geometry,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **115**, pp. 1213-1216 (2016).